ENS de Lyon **Master 1 – Algebraic topology**
TD8 **Spring 2024**

Corrigé de l'exercice sur le groupe fini d'homéomorphismes d'un graphe

(i) **Calcul de $H_1(X)$.** Le complexe $C_*(X)$ est donné par

$$\partial_1 : \mathbb{Z}^e = \mathbb{Z}a_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}a_e \to \mathbb{Z}^v = \mathbb{Z}s_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}s_v$$

qui est de la forme

$$\partial_1 a_i = s_{j_+(i)} - s_{j_-(i)}.$$

De plus, comme X est connexe on peut passer d'un sommet à un autre par une suite d'arêtes, donc l'image est $\{\sum a_j s_j \mid \sum a_j = 0\}$, qui est isomorphe à $\mathbb{Z}^{v-1}$. On a $H_1(X) = \ker \partial_1 \subset \mathbb{Z}^e$, donc c'est un groupe abélien libre, d'un certain rang r. De plus la suite exacte courte $H_1(X) \to \mathbb{Z}^e \to \mathrm{im}(\partial_1)$ est scindée puisque $\mathbb{Z}^{v-1}$ est libre, donc $r + v - 1 = e$ soit $r = e - v + 1$.

(ii) **Injection $G \to \mathrm{GL}(g, \mathbb{Z})$, $g = e - v + 1$.** La condition que X ne soit pas homéomorphe à S^1 est essentielle, puisque Homéo(S^1) contient un sous-groupe de rotations isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in G$ telle que $H_1(f) = \mathrm{Id}$, on veut montrer que $f = \mathrm{Id}$.

1) Montrons d'abord que (sous la seule hypothèse $H_1(f) = \mathrm{Id}$), si $C \subset X$ est un cycle injectif, on a $f(C) = C$ et $f_{|C}$ préserve l'orientation. Soit $T \subset X$ un arbre maximal contenant C moins une arête e. Alors $X_{/T}$ est un bouquet de de cercles $\gamma_1, \cdots, \gamma_g$, avec $g \geq 2$. Notons $\pi : X \to X_{/T}$ la projection, de sorte $\pi(C) = \pi(e)$ est un cercle γ_i.

Puisque $H_1(f)([C]) = [C]$, on a $H_1(\pi_i \circ \pi \circ f)([C])) = [\gamma_i]$, donc $\pi_i \circ \pi(f(C) = \gamma_i$. Donc $f(C)$ contient e et $f(C) \subset T \cup e$. Comme $f(C)$ est un cercle topologique, ceci implique $f(C) = C$. Et puisque $H_1(f)([C]) = [C] \neq 0$, $f_{|C}$ préserve l'orientation.

2) Si e est une arête hors de T, il existe un unique cycle injectif $C_e \subset T \cup e$, et d'après 1) on a $f(C_e) = C_e$. Puisque $g > 1$, il existe $e' \neq e$ arête hors de T. Alors soit $C_e \cap C_{e'} = [a, b]$ (avec peut-être $a = b$) soit $C_e \cap C_{e'} = \emptyset$ et il existe un chemin injectif $c : [0, 1] \to T$ de C_e à $C_{e'}$, unique à reparamétrage près.

Dans le premier cas, $f(a) = a$ et $f(b) = b$ (si $a \neq b$, parce que f préserve l'orientatioj de C_e et $C_{e'}$). Dans le second cas, f fixe les poits d'intersection de c et de C_e, $C_{e'}$. Donc $f_{|C_e}$ a toujours un point fixe.

3) Montrons que $f_{|C_e} = \mathrm{Id}$: sinon, on trouve un homéomorphisme h croissant de $[0, 1]$ qui est d'ordre fini et $\neq \mathrm{Id}$, ce qui est impossible : il existe $[a, b] \subset [0, 1]$ non trivial tel que $h(a) = a$, $h(b) = b$ et $h(x) \neq x$ sur $]a, b[$. Quitte à remplacer h par h^{-1}, on peut supposer que $h(x) > x$ sur $]a, b[$. Alors $n \mapsto h^n(x)$ est une suite strictement croissante pour tout $x \in]a, b[$, ce qui contredit le fait que f est d'ordre fini.

4) Si maintenant e est une arête quelconque, il existe un arbre maximal T ne la contenant pas, et d'après 3) on a $f_{|e} = \mathrm{Id}$. Donc $f = \mathrm{Id}$.