TD9 Géométrie Riemannienne

4 avril 2025

1. (Théorème de Schur)

   Soit (M, g) une variété riemannienne connexe de dimension $n \geq 3$ vérifiant la propriété suivante : il existe une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $p \in M$, la courbure sectionnelle de tout plan 2-dimensionnel $\Sigma \subset T_pM$ satisfait
   $$K(\Sigma) = f(p)$$
   L'objectif de cet exercice est de montrer que f est une fonction constante.

   a) Définir
   $$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$$
   et
   $$R'(X, Y, Z, W) = g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)(Y, W)$$
   Montrer que
   $$\nabla R(X, Y, Z, W, U) = (Uf)R'(X, Y, Z, W).$$

   b) Démontrer la deuxième identité de Bianchi :
   $$\nabla R(X, Y, Z, W, T) + \nabla R(X, Y, W, T, Z) + \nabla R(X, Y, T, Z, W) = 0$$
   pour X, Y, Z, W, T des champs de vecteurs sur M.

   c) Utiliser a) et b) pour démontrer le théorème de Schur.

2. (Espaces localement symétriques)

   Soit (M, g) une variété riemannienne. M est un espace localement symétrique si $\nabla R = 0$.

   a) Soit M un espace localement symétrique et soit $\gamma : [0, l) \to M$ une géodésique. Soient X, Y et Z des champs de vecteurs parallèles le long de γ. Montrer que $R(X, Y)Z$ est un champ de vecteurs parallèle le long de γ.

   b) Montrer que toute surface connexe localement symétrique a une courbure sectionnelle constante.

   c) Montrer que si M a une courbure sectionnelle constante, alors M est localement symétrique.

3. Soient $(\overline{M}, \overline{g})$ et (M, g) deux variétés riemanniennes, et soit $\pi : \overline{M} \to M$ une submersion lisse. En chaque point $x \in \overline{M}$, l'espace tangent $T_x\overline{M}$ se décompose en une somme directe orthogonale :
   $$T_x\overline{M} = H_x \oplus V_x$$
   où $V_x := \ker(d_x\pi)$ est l'espace vertical et $H_x := V_x^{\perp}$ est l'espace horizontal.
   Rappelons que π est appelée submersion riemannienne si et seulement si $\overline{g}(X, Y) = g(d\pi(X), d\pi(Y))$ pour tout X, Y horizontaux.

   a) Si $X \in \mathcal{X}(M)$, le relevé horizontal $\overline{X}$ de X est le champ horizontal défini par $d\pi(\overline{X}) = X$. Montrer que $\overline{X}$ est lisse.

   b) Soient $\overline{\nabla}$ et ∇ les connexions de Levi-Civita de $\overline{M}$ et M respectivement. Montrer que :
   $$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}[\overline{X}, \overline{Y}]^V$$
   où Z^V est la composante verticale de Z.

   c) Montrer que $[\overline{X}, \overline{Y}]^V(x)$ dépend uniquement de $\overline{X}(x)$ et $\overline{Y}(x)$.

d) Soient $\overline{R}$ et R les tenseurs de courbure de $\overline{M}$ et M respectivement. Prouver que :

$$\begin{aligned}\overline{R}(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},\overline{W}) =& R(X,Y,Z,W)+\frac{1}{4}\overline{g}([\overline{X},\overline{Z}]^V,[\overline{Y},\overline{W}]^V)\\ &-\frac{1}{4}\overline{g}([\overline{Y},\overline{Z}]^V,[\overline{X},\overline{W}]^V)+\frac{1}{2}\overline{g}([\overline{Z},\overline{W}]^V,[\overline{X},\overline{Y}]^V)\end{aligned}$$

e) En déduire que : $\kappa_g(P)=\kappa_{\overline{g}}(\overline{P})+\frac{3}{4}\parallel[\overline{X},\overline{Y}]^V\parallel_{\overline{g}}^2\geq\kappa_{\overline{g}}(\overline{P})$
où P est le plan engendré par les vecteurs orthonormaux X,Y et $\overline{P}$ est le plan engendré par $\overline{X},\overline{Y}$.

f) Rappelons que l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ est défini comme l'ensemble des sous-espaces complexes de dimension 1 de $\mathbb{C}^{n+1}$. On pose $\pi:\mathbb{S}^{2n+1}\longrightarrow\mathbb{C}P^n$ la restriction de l'application de projection.

(i) Prouver qu'il existe une unique métrique g sur $\mathbb{C}P^n$ pour laquelle l'application $\pi:\mathbb{S}^{2n+1}\longrightarrow\mathbb{C}P^n$ est une submersion riemannienne (où $\mathbb{S}^{2n+1}$ est munie de la métrique induite de $\mathbb{C}^{n+1}$). La métrique g est appelée la métrique de Fubini-Study.

(ii) Montrer que la courbure sectionnelle pour la métrique de Fubini-Study est donnée par :

$$\kappa_g(P)=1+3\cos^2\varphi$$

où P est engendré par les vecteurs orthonormaux X,Y, et $\cos(\varphi)=\overline{g}(\overline{X},i\overline{Y})$. En particulier, $1\leq\kappa_g(P)\leq 4$.

4. (Courbure et homogénéité)

Soit (M,g) une variété riemannienne. Considérons le fibré de Stiefel $\pi:St^k(M)\to M$ où $St^k(M)=\{(p,v_1,...,v_k),\ p\in M,\ (v_1,...v_k)$ est un k-repère orthonormal de $T_pM\}$. On dit que M est k-homogène si l'action de M sur $St^k(M)$ est transitive.

a) Prouver, sans calcul, que le modèle hyperboloïde du plan hyperbolique est de courbure négative constante.

b) Prouver que si M est k-homogène avec $k\geq 2$, alors M a une courbure sectionnelle constante.

c) Que peut-on dire du cas où M est 0-homogène en dimension 2 ? dimension 3 ?

d) Que peut-on dire du cas où M est 1-homogène en dimension 3 ? dimension 4 ?