TD12 Géométrie Riemannienne

18 Avril 2025

1. a) Existe-t-il une métrique g sur la 2-sphère $\mathbb{S}^2$ telle que la courbure de Gauss κ prenne des valeurs négatives en certains points ?

b) Existe-t-il une métrique g sur le tore $\mathbb{T}^2$ telle que κ ne s'annule pas ?

c) Existe-t-il une sous-variété M de dimension 2 sans bord de $\mathbb{R}^3$ telle que κ s'annule partout sur M ?

d) Même question en supposant que M est compacte sans bord.

e) Existe-t-il une surface compacte M sans bord dans $\mathbb{R}^3$ telle que κ soit négative partout ?

2. Soit (M^{n+1}, g) une variété riemannienne et soit ∇ sa connexion de Levi-Civita. Nous disons qu'une immersion $\iota : N^n \to M^{n+1}$ est (totalement) ombilicale si pour tout $p \in N$, la seconde forme fondamentale de ι en p satisfait

$$\mathrm{II}(X, Y) = \lambda(p) g(X, Y)$$

pour tout $X, Y \in \mathcal{X}(N)$.

a) Montrer que si M^{n+1} a une courbure sectionnelle constante, λ ne dépend pas de p.

b) Prouver que la propriété d'être ombilicale est invariante sous changement conforme de la métrique g.

c) Prenons $M = \mathbb{R}^{n+1}$ avec la métrique euclidienne. Montrer que si $\iota : N^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ est ombilicale, alors $\iota(N)$ est contenue dans une n-sphère ou un n-plan dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

d) Quelles sont les hypersurfaces ombilicales du plan hyperbolique ? Calculer leur courbure sectionnelle.

3. Montrer que pour $n \geq 4$, il n'existe pas d'hypersurface dans $\mathbb{R}^n$ à courbure sectionnelle négative.

4. Soit Γ un réseau co-compact dans $\mathsf{PSL}(2, \mathbb{R})$ et considérons la surface hyperbolique $S = \mathbb{H}/\Gamma$.

(a) Montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma$, la classe de conjugaison :

$$C(\gamma) = \{g\gamma g^{-1},\ g \in \mathsf{PSL}(2, \mathbb{R})\}$$

est fermée.

(b) En déduire que tous les éléments non triviaux de Γ sont hyperboliques.

(c) Soit g un élément hyperbolique de $\mathsf{PSL}(2, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique géodésique globale sur $\mathbb{H}$ qui est préservée par g. Nous appelons cette géodésique l'axe de g.

(d) Soit $\gamma \in \Gamma - \{id\}$. Montrer que l'image de l'axe de γ sous la projection $\mathbb{H} \to S$ est une géodésique fermée dans S. Quelle est sa longueur ?

(e) Montrer que toute courbe fermée sur S est homotope (parmi les courbes fermées) à une unique géodésique fermée.

(f) Montrer que les géodésiques fermées de S correspondent précisément aux classes de conjugaison des éléments de Γ.

(g) Soit $L > 0$. Montrer qu'il existe au plus un nombre fini de géodésiques fermées sur S de longueur inférieure ou égale à L.

5. Pour $l_1, l_2, l_3 > 0$, soit $P = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ un hexagone dans le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ tel que les angles intérieurs de P sont tous égaux à $\frac{\pi}{2}$ et $d_{hyp}(v_1, v_2) = l_1$, $d_{hyp}(v_3, v_4) = l_2$, $d_{hyp}(v_5, v_6) = l_3$. Nous notons ce polygone par P_{l_1,l_2,l_3}. Montrer que pour tout $l_1, l_2, l_3 > 0$, P_{l_1,l_2,l_3} existe et qu'il est unique à isométries près de $\mathbb{H}^2$. (En utilisant cet hexagone, on peut construire des sphères hyperboliques à trois trous et les coller ensemble pour obtenir des surfaces fermées hyperboliques de genre quelconque)