TD7 Géométrie Riemannienne

14 Mars 2025

1. Soit (M, g) une variété Riemannienne, $X \in \mathcal{X}(M)$ et $f \in C^\infty(M)$. On définit la divergence de X comme une fonction $divX : M \to \mathbb{R}$ donnée par $divX(p) = tr(\nabla_\bullet X)(p)$ et le gradient de f comme un champ de vecteurs $grad\ f \in \mathcal{X}(M)$ défini par

$$g(grad\ f(p), X(p)) = X(f)(p)$$

pour $p \in M$

a) Montrer que pour tout $p \in M$, il existe un voisinage $U \subset M$ de p, et n champs de vecteurs $E_1, ..., E_n \in \mathcal{X}(U)$, orthonormés en chaque point de U, tels que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$.
On appelle une telle famille de champs de vecteurs un repère géodésique en p.

b) Soit $E_1, ..., E_n$ un repère géodésique en p. Montrer que

$$grad\ f(p) = \sum_{i=1}^{n} (E_i(f))E_i(p)$$

$$divX(p) = \sum_{i=1}^{n} E_i(f_i)(p), \quad \text{où} \quad X = \sum f_i E_i$$

c) On définit l'opérateur Laplacien $\triangle : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ de M par

$$\triangle f = div(grad\ f)$$

Montrer que

$$\triangle(fh) = f\triangle h + h\triangle f + 2g(grad\ f, grad\ h)$$

d) Supposons maintenant que M est orientée et soit ν une forme volume sur M. Prouver que

$$d(i(X)\nu) = (divX)\nu$$

e) (Théorème de Hopf) Pour une variété Riemannienne compacte, connexe, orientable (M, g). Prouver que si $f \in C^\infty(M)$ telle que $\triangle f \geq 0$, alors f est constante.

2. Soit (M, g) une variété Riemannienne et $X \in \mathcal{X}(M)$ un champ de vecteurs. Soit $p \in M$ tel que $X(p) \neq 0$. Prouver qu'il existe un système de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ autour de p tel que $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ et déterminer l'expression de $divX$ en utilisant la forme volume.

3. Une variété Riemannienne est dite homogène si son groupe d'isométrie agit transitivement sur elle. Prouver que toute variété homogène est complète.

4. Soit M une variété Riemannienne complète, et soit X un champ de vecteurs lisse sur M. Supposons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\| X(p) \| \leq c$, pour tout $p \in M$. Prouver que les trajectoires de X sont définies pour toutes les valeurs de t (on dit que X est complet).