TD8 Géométrie Riemannienne

21 Mars 2025

1. Soit T un triangle hyperbolique avec des angles α, β et γ. Prouvez que

$$\text{aire}_{hyp}(T) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

En déduire une formule pour l'aire d'un polygone hyperbolique avec un nombre fini de côtés.

2. Soit $\mathbb{H}^2$ le plan hyperbolique.

a) Pour $z, w \in \mathbb{H}^2$, prouvez que :

- $$d_{hyp}(z,w) = \ln\left(\frac{|z-\overline{w}| + |z-w|}{|z-\overline{w}| + |z-w|}\right)$$
- $$\cosh(d_{hyp}(z,w)) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)}$$
- $$\sinh\left(\frac{1}{2}d_{hyp}(z,w)\right) = \frac{|z-w|}{2\sqrt{\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)}}$$

b) Soit T un triangle avec des angles 0 et $\frac{\pi}{2}$ et un côté fini de longueur a. Prouvez que pour le troisième angle $\varphi(a)$, on a :

- $$\tan(\varphi(a)) = \frac{1}{\sinh(a)}$$
- $$\sin(\varphi(a)) = \frac{1}{\cosh(a)}$$

c) Considérons un triangle T avec des côtés de longueurs hyperboliques a, b, c et des angles opposés α, β, γ. Prouvez que :

- La règle des sinus :
$$\frac{\sinh a}{\sin\alpha} = \frac{\sinh b}{\sin\beta} = \frac{\sinh c}{\sin\gamma}$$
- La première règle du cosinus :
$$\cosh(c) = \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\sinh(b)\cos(\gamma)$$
- La deuxième règle du cosinus :
$$\cosh(c) = \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

3. On rappelle qu'un sous-groupe $\Gamma \leq PSL(2,\mathbb{R})$ est appelé Fuchsien lorsqu'il est discret.

a) Montrez que tout groupe Fuchsien doit être dénombrable.

b) Si $\psi \in PSL(2,\mathbb{R})$ est elliptique, montrez que le groupe cyclique engendré par ψ est Fuchsien si et seulement s'il est fini.

c) Soit $\lambda \in (0,1) \cup (1,\infty)$, et $A, B \in PSL(2,\mathbb{R})$ les éléments générant
$$\psi_A(z) = z + 1, \quad \psi_B(z) = \lambda z.$$
Le groupe $\langle A, B\rangle$ est-il Fuchsien ?

d) Le groupe $PSL(2,\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ est-il Fuchsien ?

e) Soit Γ un groupe Fuchsien, supposons que tous ses éléments ont le même ensemble de points fixes dans $\overline{\mathbb{H}^2}$, c'est-à-dire que
$$\text{Fix}(\psi_A) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \psi_A(z) = z\}$$
est indépendant de A. Montrez que Γ est un groupe cyclique.

f) Montrez que tout groupe Fuchsien abélien doit être cyclique.

4. Soit $\Gamma \leq PSL(2,\mathbb{R})$ un groupe Fuchsien et soit z_0 un point du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$. Considérons l'application :
$$\Phi : A \in PSL(2,\mathbb{R}) \to \psi_A(z_0) \in \mathbb{H}^2.$$

(a) Montrez que Φ est propre.

(b) Montrez que le Γ-orbite de chaque point dans $\mathbb{H}^2$ est discrète si et seulement si Γ est Fuchsien.

(c) Supposez que Γ n'a pas de point fixe (son action sur $\mathbb{H}^2$ est libre). Prouvez que Γ agit proprement discontinument sur $\mathbb{H}^2$.

5. Étant donné un espace métrique X et un homéomorphisme $\varphi : X \to X$, on définit les limites α et ω d'un point $z \in X$ respectivement par :
$$\alpha(z) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{\varphi^k(z),\ k < -n\}}, \quad \omega(z) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{\varphi^k(z),\ k > n\}}.$$
Supposons que $\varphi \in PSL(2,\mathbb{R})$ soit hyperbolique ou parabolique. Déterminez les ensembles α-limite et ω-limite des points dans $\mathbb{H}^2$.