

M_1 en fonction de M_2 . Les courbes de valeurs constantes de \tilde{V} sont représentées, et on voit que sa valeur augmente quand on va vers le bas et à droite. Deux jeux de courbes sont tracés, l'un pour une isolation thermique de longue durée (durée de vie 10 ans), l'autre pour la réfrigération de courte durée ($t = 1$ mois). Pour les tracer, on a pris comme valeurs $\Delta T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $x_{\text{max}} = 20 \text{ mm}$ et $E^* = -0,02 \text{ } \$/\text{MJ}$, comme précédemment.

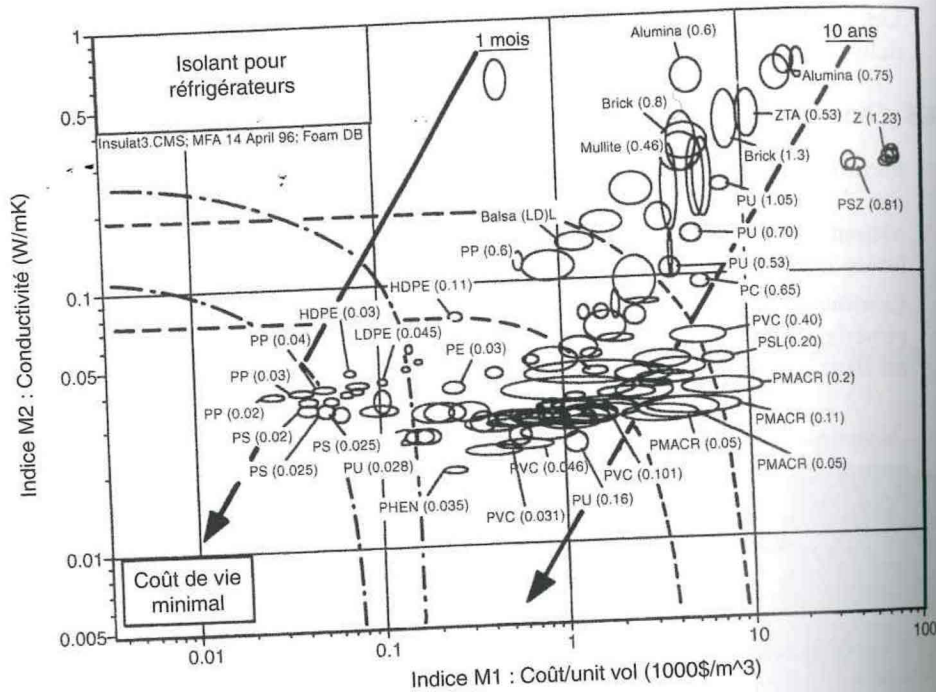


Figure 10.8 – Choix des matériaux isolants pour réfrigérateurs, pour différentes durées de vie (réalisée avec le logiciel CES3 (1999) ; les chiffres entre parenthèses correspondent aux densités des matériaux en Mg/m^3).

Pour une durée de vie courte, c'est le coût de l'isolation qui prédomine dans la fonction de valeur et le meilleur choix est tout simplement le moins cher, à savoir le polystyrène expansé basse densité. Mais pour une durée de vie plus longue, le deuxième terme de l'équation devient prédominant, ce qui modifie le choix du matériau. La courbe tracée pour $t = 10$ ans suggère que les mousses phénoliques basse densité devraient être un bon choix, parce que leur conductivité est inférieure à celle des polystyrènes. Le tableau 10.10 récapitule ces résultats.

10.4.5 Conclusions

Dans de nombreuses applications d'isolation, la mousse est attachée aux parois interne et externe du réfrigérateur pour donner de la rigidité ; elle remplit un rôle à la fois mécanique et thermique. Le critère de résistance peut alors s'avérer important. Le tableau inclut deux mousses à haute résistance. Des deux, la mousse de polyméthacrylimide donne la fonction de valeur la plus élevée.

Tableau 10.10 – Matériaux isolants pour réfrigérateurs.

Matériau	Commentaire
<i>Durée de vie courte (1 mois)</i>	
Mousse de polystyrène, par exemple PS(0,02) ou PS (0,025)	Le coût de l'isolation prédomine dans la fonction de valeur. Ces matériaux sont les meilleurs car ce sont les moins chers.
Mousses de polypropylène, par exemple PP(0,02) ou PP(0,03).	
<i>Durée de vie longue (10 ans)</i>	
Mousses phénoliques, par exemple PHEN(0,035)	La conduction de chaleur est le paramètre important de la fonction de valeur. Les mousses phénoliques, plus chères, minimisent la fonction de valeur et sont donc les meilleurs.
Mousses de polyuréthanes, par exemple PU(0,028)	
Mousses de polystyrène, par exemple PS(0,02) ou PS (0,00025)	

10.5 Objectifs multiples : gobelets jetables

10.5.1 Contexte

Il est de plus en plus admis que l'emploi des matériaux en ingénierie a un coût environnemental : pollution de l'air et de l'eau, déchets solides, consommation de ressources non renouvelables, etc., que l'on désigne par le terme d'écodommage. Une réponse à cela consiste à adopter comme objectif de conception la minimisation de ce dommage.

Considérons, par exemple, le cas du remplacement d'un gobelet jetable existant (figure 10.9) par un autre qui soit moins nocif pour l'environnement. L'impact environnemental causé est difficile à quantifier. Une de ces composantes est liée au contenu énergétique du matériau ; de nombreux aspects de cet impact (émissions de CO_2 , particules en suspension dans l'air) lui sont proportionnels. L'avantage est que l'on peut quantifier, au moins approximativement, ce contenu énergétique. On va l'utiliser comme mesure de l'impact environnemental, pour illustrer son influence par rapport au coût.

Les gobelets jetables ne sont pas pour le moment recyclés, donc l'énergie et le matériau qu'ils contiennent sont irrémédiablement perdus quand on les jette. Pour minimiser l'impact environnemental (contenu énergétique), on recherche la conception qui demande le moins d'énergie ; les gobelets doivent également coûter peu. On a alors deux objectifs qui s'opposent : l'un environnemental, de minimiser le contenu énergétique, l'autre économique de minimiser le coût. Il y a également des contraintes à satisfaire : le gobelet doit être suffisamment rigide

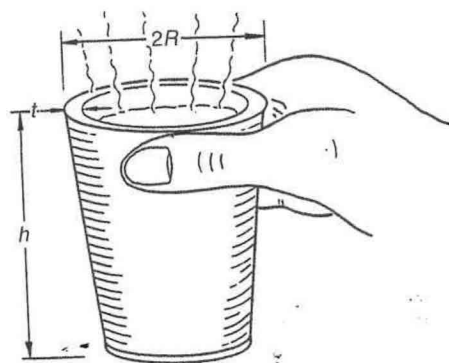


Figure 10.9 – Gobelet jetable pour boisson chaude.

pour pouvoir être pris en main sans trop se déformer, et il serait également souhaitable qu'il soit isolant thermiquement (tableau 10.11)

Tableau 10.11 – Spécifications de conception pour gobelet jetable.

Fonction	Gobelet jetable
Objectif	Contenu énergétique minimal Coût minimal
Contraintes	(a) Assez rigide pour pouvoir être tenu à la main (b) Isolant thermiquement

10.5.2 Modélisation

On écrit d'abord une fonction de valeur pour le gobelet :

$$V = -C + E^{\$} qm \quad (10.22)$$

Ici, C est le coût du gobelet, m , sa masse et q , le contenu énergétique massique du matériau. La quantité $E^{\$}$ est la constante d'échange, qui est la valeur associée à une unité de dommage environnemental. Ces valeurs ne sont pas connues, pour l'instant, mais en prenant des valeurs extrêmes, on pourra se faire une idée de son influence.

Le premier terme de l'équation correspond au coût du matériau du gobelet, c'est-à-dire le volume de matériau qu'il contient (assimilé à un cylindre de rayon R , de hauteur h et d'épaisseur t fermé à un bout) multiplié par le coût par unité de volume $C_m \rho$:

$$C = C_m m \approx (2\pi R h + \pi R^2) t C_m \rho = (2\alpha + 1) \pi R^2 t C_m \rho \quad (10.23)$$

avec $\alpha = h/R$, le rapport de la hauteur sur le rayon. La contrainte sur la rigidité exige que la déformation ovale ne devienne pas inacceptable quand le gobelet est chargé suivant une diagonale, comme sur la figure 10.8. Cela impose une limite sur la rigidité :

$$S = \frac{F}{\delta} = \frac{C_1 E I}{R^3} = \frac{\alpha C_1 E t^3}{12 R^2} > S_c \quad (10.24)$$

avec I , le moment d'inertie de la surface de la paroi du gobelet (proportionnel à $ht^3/12$ pour une paroi d'épaisseur uniforme), E , le module d'Young, C_1 , une constante et S_c , la rigidité critique pour une préhension sûre. En isolant t :

$$t = \left(\frac{12 R^2 S_c}{\alpha C_1 E} \right)^{1/3} \quad (10.25)$$

qui, réinjecté dans l'équation (10.23), donne le coût du gobelet :

$$C = C_m m \approx (2\pi R h + \pi R^2) t C_m \rho = (2\alpha + 1) \pi R^2 C_m \rho \left(\frac{12 R^2 S_c}{\alpha C_1 E} \right)^{1/3} \quad (10.26)$$

ou :

$$C = C_2 \left(\frac{C_m \rho}{E^{1/3}} \right) \quad (10.27)$$

expression dans laquelle C_2 contient les paramètres de la conception. En raisonnant de la même façon, on obtient le contenu énergétique du gobelet :

$$qm = C_2 \left(\frac{q \rho}{E^{1/3}} \right) \quad (10.28)$$

Si on associe maintenant un coût $E^{\$}$ à l'impact environnemental mesuré par le contenu énergétique (une taxe énergétique ou de pollution, par exemple), on peut convertir l'impact en coût :

$$V = C_2 [M_1 + E^{\$} M_2] \quad (10.29)$$

avec $M_1 = C_m \rho / E^{1/3}$ et $M_2 = q \rho / E^{1/3}$.

10.5.3 Choix des matériaux : méthode analytique

Le tableau 10.12 liste les propriétés de trois matériaux possibles pour le gobelet : le polystyrène expansé (PS), le polycarbonate expansé (PC) et le HDPE expansé. Pour calculer les valeurs, on prend $R = 40$ mm, $\alpha = 4$, $C_1 = 24$ et $S_c = 3$ kN/m.

Si l'impact environnemental n'est pas sanctionné ($E^{\$} = 0$), le polystyrène présente la meilleure valeur. Une taxe de pollution de 0,01 \$/MJ donne le classement de l'avant-dernière colonne, et une taxe de 0,05 \$/MJ donne les valeurs de la dernière colonne. Dans le cas de la taxe la plus élevée, le polycarbonate devient le meilleur choix.

On a utilisé des valeurs numériques pour les données du problème, mais ce n'était pas nécessaire. Il n'est pas rare que le choix optimal soit indépendant de plusieurs ou de toutes les variables de conception, comme on le voit ici. Les variables sont toutes contenues dans la quantité C_2 de l'équation (10.29), dont la valeur n'a pas d'influence sur le classement des matériaux du tableau 10.12, que l'on classe indifféremment selon les valeurs de V ou de V/C_2 .

Tableau 10.12 – Fonctions de valeur V pour deux valeurs de la constante d'échange.

Matériau	ρ Mg/m ³	E GPa	C _m [*] \$/kg	q MJ/kg	t mm	C \$	V	V
							$E^S = -0,01$ \$/MJ	$E^S = -0,05$ \$/MJ
PS expansé	0,05	0,03	1,4	180	2,7	0,009	-0,02	-0,07
PC expansé	0,065	0,95	5,0	170	1	0,016	-0,02	-0,04
HDPE expansé	0,08	0,006	1,6	150	4,6	0,3	-0,06	-0,17

* Le coût du matériau sous forme de gobelet, produit en grande série, est quasiment le même que celui du matériau lui-même.

10.5.4 Choix des matériaux : méthode graphique

La figure 10.10 donne le graphe de M_1 en fonction de M_2 , qui permet de choisir les matériaux qui minimisent à la fois le coût et le contenu énergétique. On supposera qu'à l'origine les gobelets sont fabriqués par compression de feuilles de polystyrène compact ayant une densité de 1 060 kg/m³ (ellipse noire sur la figure). Les courbes montrent les frontières pour différentes valeurs de E^S . Les matériaux qui se trouvent en dessous de la courbe appropriée constituent des meilleurs choix que le PS utilisé. Pour les faibles valeurs de E^S , les courbes sont presque verticales, pour les valeurs élevées, horizontales.

Les matériaux se trouvant dans le quart inférieur gauche sont à la fois moins coûteux et nécessitent moins d'énergie que le matériau utilisé jusqu'ici, quelle que soit la valeur de E^S . Parmi ceux-ci, on trouve une gamme de mousses de LDPE, avec des densités allant de 0,018 à 0,029 Mg/m³, ainsi que les polystyrènes expansés (densités de 0,02 à 0,05 Mg/m³). Mais si les taxes énergétiques sont très élevées (par exemple 0,01 \$/MJ), alors les mousses de PVC deviennent intéressantes ; et si elles montaient jusqu'à 0,10 \$/MJ, les gobelets en liège (L) deviendraient économiques. Le tableau 10.13 récapitule ces résultats.

Tableau 10.13 – Matériaux pour gobelets peu coûteux et à faible contenu énergétique.

Matériau	Commentaire
<i>Durée de vie courte</i>	
Mousse de polystyrène expansé, par exemple EPS(0,02) à EPS (0,05)	Le meilleur choix : coût et contenu énergétique plus faible que le PS compact ; bonnes propriétés thermiques.
Mousses de polypropylène, par exemple PP(0,02) à PP(0,06)	
Mousses de polyéthylène LDPE, par exemple LDPE(0,018) à LDPE(0,029).	Nettement plus coûteux en prix en énergie que le PS expansé.

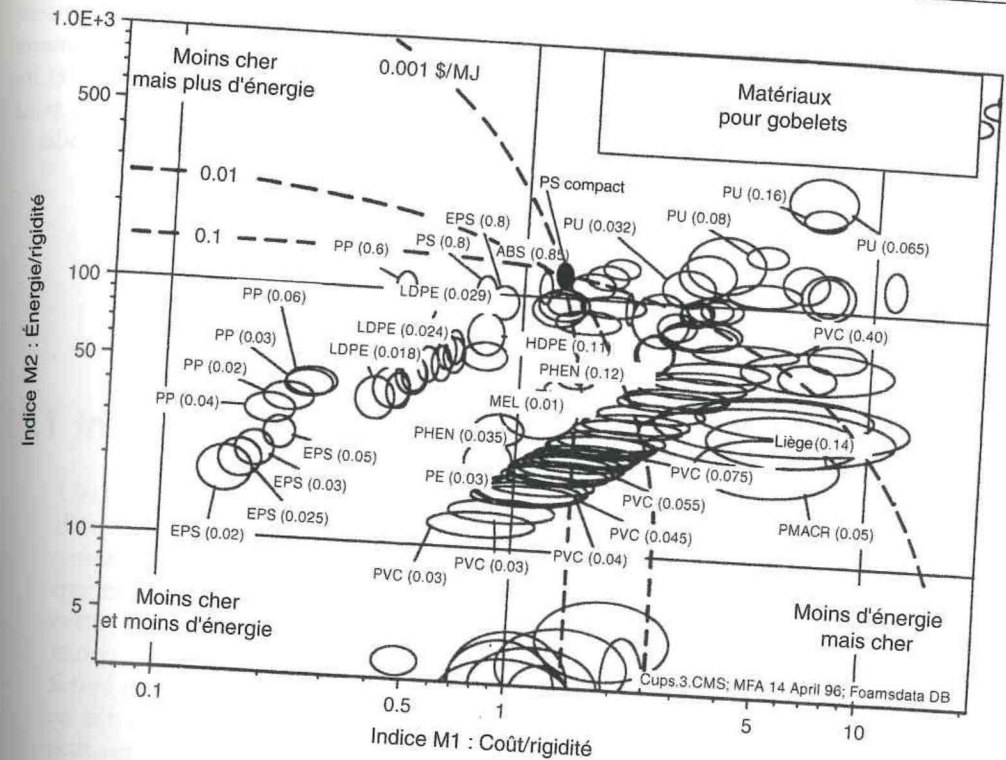


Figure 10.10 – Comparaison du polystyrène avec les autres matériaux (réalisée avec le logiciel CES3 (1999)).

■ Bibliographie

Boustead I. et Hancock G.F., (1979), *Handbook of Industrial Energy Analysis*, Wiley, New York.

10.6 Récapitulation

Dans la plupart des cas, la conception est multi-contrainte : il faut satisfaire simultanément plusieurs exigences contradictoires. Malgré cette opposition, il est toujours possible d'optimiser le choix du matériau. La méthode de la contrainte active, développée au chapitre 9, permet de choisir des matériaux répondant de façon optimale aux différentes exigences. Deux cas pratiques illustrent cette méthode, l'un mécanique, l'autre électro-mécanique.

Les vrais problèmes commencent quand la conception doit répondre à plusieurs objectifs. Il est alors nécessaire de pouvoir exprimer tous les objectifs dans la même unité, une sorte de « monnaie commune ». On utilise un facteur de conversion, appelé constante d'échange. Trouver la valeur de ce facteur est un grand pas en avant dans la résolution du problème. Avec ce facteur, on construit

avec K_c la ténacité correspondant au mode de chargement, a_c , la longueur de la plus grande fissure contenue dans le matériau et C , une constante qui dépend de la géométrie, mais qui vaut généralement 1. En conception limitée par la charge (élément en traction d'un pont, par exemple), la pièce cassera de façon fragile si la contrainte dépasse celle donnée par l'équation (6.41). Dans ce cas, évidemment, on recherche des matériaux ayant des valeurs de K_c élevées.

Mais toutes les conceptions ne sont pas limitées par la charge. Certaines sont limitées par l'énergie, d'autres par la déformation, et le critère de choix est différent. Considérons donc les trois scénarios correspondant aux trois contraintes listées au tableau 6.27.

Tableau 6.27 – Spécifications de conception.

Fonction	Résistance à la rupture fragile
Objectif	Volume (poids, coût, etc.) minimal
Contrainte	(a) charge spécifiée, ou (b) énergie spécifiée, ou (c) déformation spécifiée

6.14.2 Modélisation

■ Conception limitée par la charge

Dans ce cas, le composant doit supporter une charge (ou une pression) spécifiée sans rompre. La contrainte locale ne doit donc pas dépasser la valeur spécifiée par l'équation (6.41) et, pour un volume minimal, le meilleur choix de matériaux se fera avec le maximum pour l'indice :

$$M_1 = K_c \quad (6.42)$$

On identifie généralement K_c avec la ténacité en déformations planes, qui correspond aux conditions de fissuration les plus fortes, parce que c'est l'habitude. Pour la conception limitée par la charge utilisant des tôles minces, il est plus approprié de choisir la ténacité en contraintes planes, et pour les matériaux multicouches, la ténacité à l'interface. Cela étant, l'idée générale est claire : les meilleurs matériaux pour des applications limitées par la charge sont ceux qui ont les plus fortes valeurs de K_c .

■ Conception limitée par l'énergie

Cependant, comme on l'a dit, la conception n'est pas toujours limitée par la charge. Les ressorts et les systèmes de confinement de turbines et de volants d'inertie sont limités par l'énergie. Prenons comme exemple un ressort (figure 6.16). L'énergie élastique volumique emmagasinée est l'intégrale sur le volume de :

$$U_e = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E}$$

La contrainte est limitée par la contrainte de rupture de l'équation (6.41) et donc (si l'endommagement se fait par rupture), l'énergie maximale que peut emmagasiner un ressort est :

$$U_{e\max} = \frac{C^2}{2\pi a_c} \left(\frac{K_{Ic}^2}{E} \right)$$

Pour une taille initiale de défaut donnée, l'énergie est maximale si on choisit les matériaux avec les plus grandes valeurs de :

$$M_2 = \frac{K_{Ic}^2}{E} \approx G_c \quad (6.43)$$

avec G_c , l'énergie de rupture (en $\text{kJ} \cdot \text{m}^{-2}$).

■ Conception limitée par la déformation

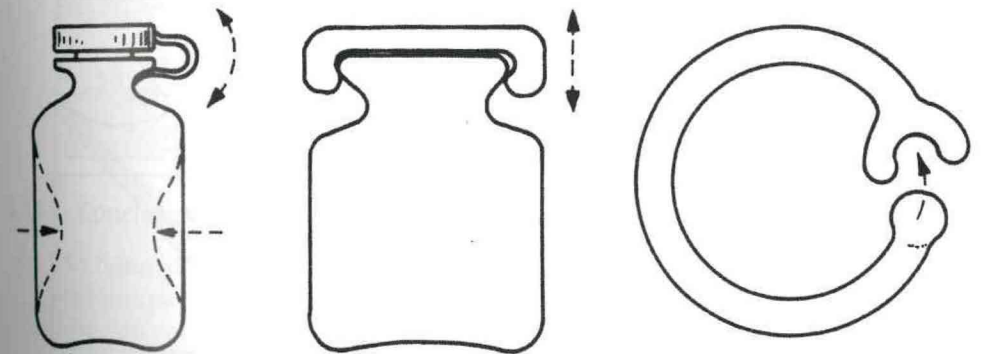


Figure 6.27 – Conception limitée par la charge et par la déformation.

Ce type de conception constitue le troisième scénario possible (figure 6.27). Les capsules de bouteilles ou les attaches qui s'encliquettent et autres procédés similaires sont limités par la déformation. Ils doivent permettre une déformation élastique suffisante pour permettre l'encliquetage sans subir d'endommagement, ce qui nécessite une déformation élastique limite ε_f importante. La déformation est reliée à la contrainte par la loi de Hooke :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

et la contrainte est limitée par la valeur de l'équation (6.41). La déformation limite est donc :

$$\varepsilon_f = \frac{CK_{Ic}}{\sqrt{\pi a_c E}}$$

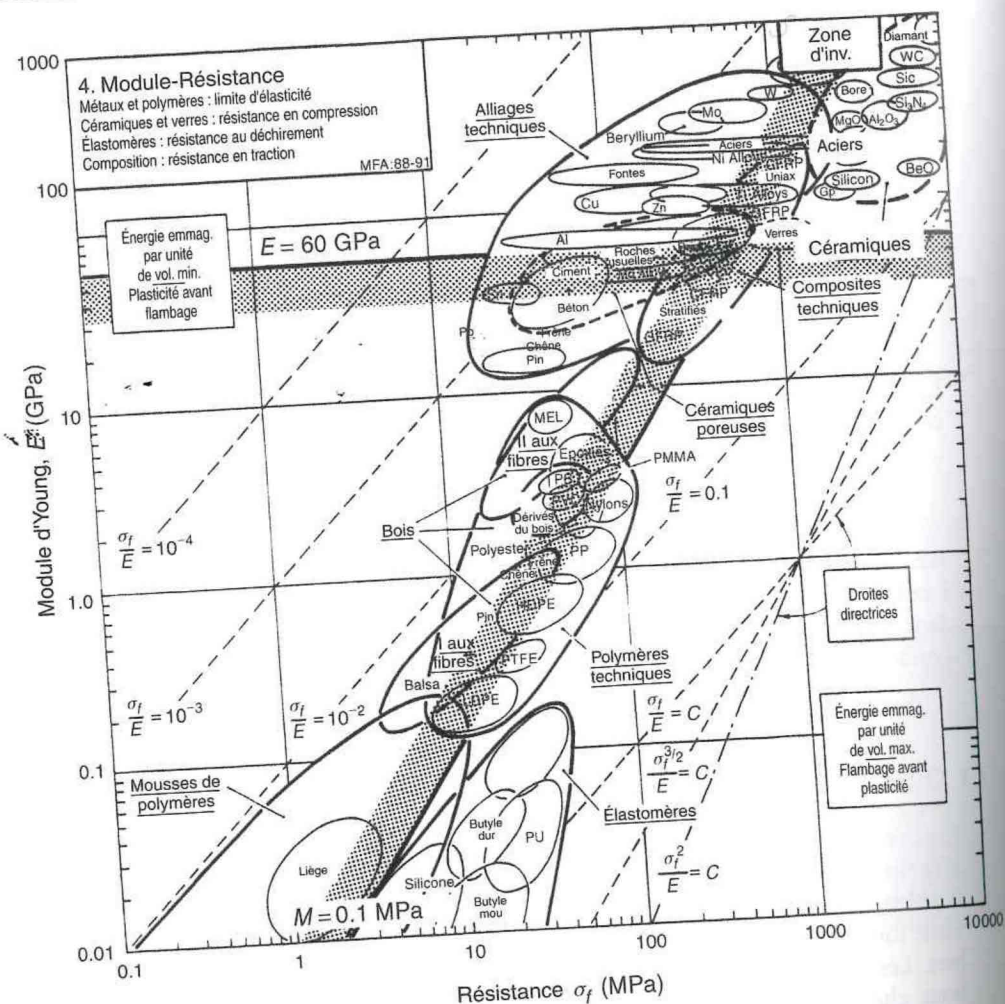


Figure 6.26 – Matériaux pour couteaux et pivots.

■ Cas pratiques apparentés

- 6.9 : Matériaux pour ressorts.
- 6.10 : Charnières élastiques.
- 6.11 : Matériaux pour joints.
- 6.12 : Diaphragmes pour capteurs de pression.
- 6.20 : Matériaux minimisant la distorsion thermique dans les instruments de précision.
- 6.21 : Vannes de robinets en céramique.

Tableau 6.26 – Matériaux pour couteaux et pivots.

Matériau	Indice M_1 (MPa)	Indice M_2 (GPa)	Commentaires
Quartz	0,5	70	Bon indice M_1 mais fragile (mauvaise résistance aux chocs).
Acier à haut carbone	0,2	210	De la ductilité, procurant de la résistance aux chocs. Résistance à la corrosion faible.
Acier à outils	0,3	210	
Silicium	1	120	Bon indice M_1 , mais fragile. Disponible facilement en grande quantités.
Saphir, Al_2O_3	0,9	380	Excellents indices et bonne résistance à la corrosion, mais pas aux chocs (faible ténacité).
Carbure de silicium, SiC	1	410	
Nitride de silicium, Si_3N_4	1,1	310	Exceptionnel à tous points de vue, sauf le coût.
Carbure de tungstène WC	1	580	
Diamant	2	1 000	

6.14 Conception limitée par la déformation avec des polymères fragiles

6.14.1 Contexte

Il existe chez les ingénieurs un critère « pifométrique » : « Éviter les matériaux ayant une ténacité K_{Ic} inférieure à $15 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$. » Presque tous les métaux, qui ont des valeurs de ténacité comprises entre 20 et 100, satisfont à ce critère. La fonte blanche, ainsi que quelques produits de la métallurgie des poudres, ne conviennent pas, car ils ont des valeurs autour de 10. Les céramiques techniques ordinaires ont des ténacités entre 1 et 6 et sont considérées par les ingénieurs en mécanique avec beaucoup de suspicion. Mais les polymères techniques ont des ténacités de l'ordre de 0,5 à 3 et pourtant les ingénieurs les utilisent tout le temps. Pourquoi ?

Quand un matériau fragile est soumis à une contrainte, il se déforme élastiquement jusqu'à la rupture. La contrainte à laquelle celle-ci se produit est :

$$\sigma_f = \frac{CK_c}{\sqrt{\pi a_c}} \quad (6.41)$$

Les meilleurs matériaux pour une conception limitée par la déformation sont ceux qui ont les plus grandes valeurs de l'indice :

$$M_3 = \frac{K_{Ic}}{E} \quad (6.44)$$

6.14.3 Choix des matériaux

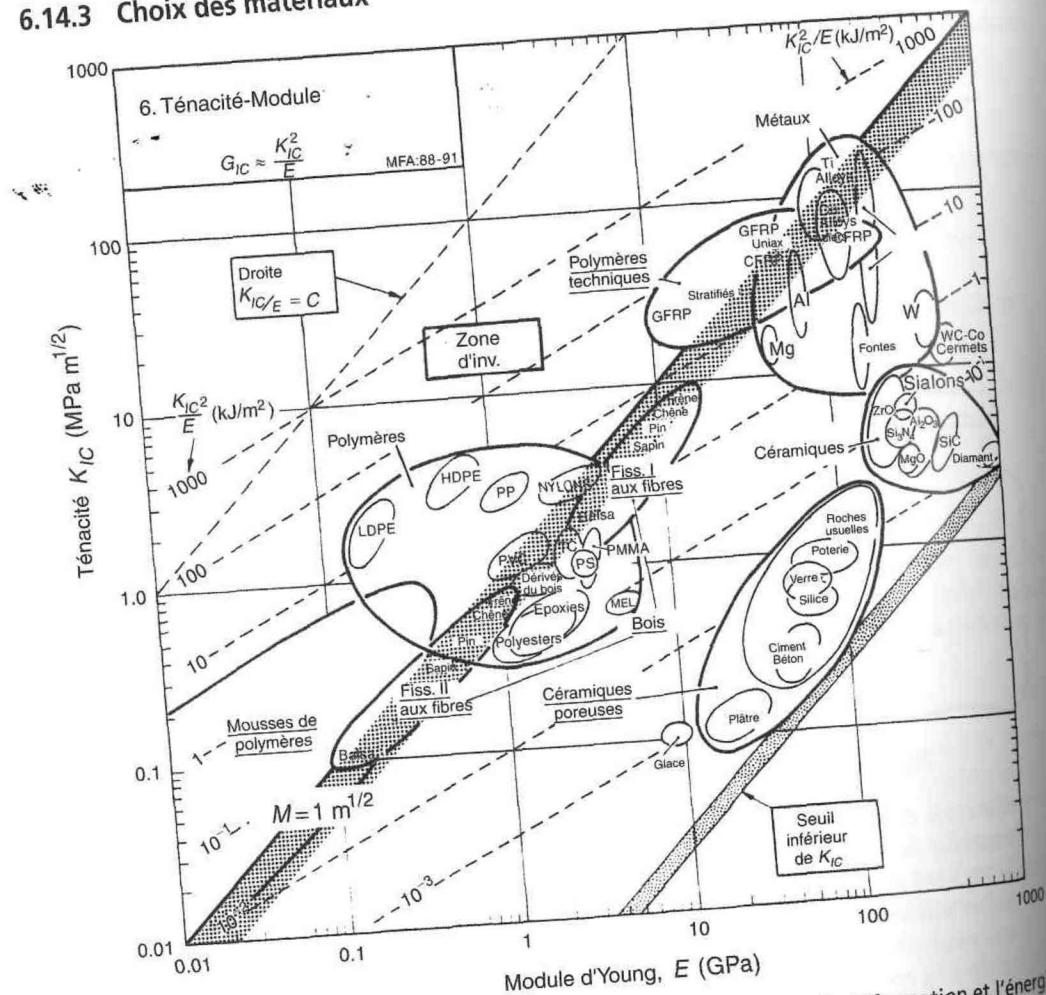


Figure 6.28 – Choix des matériaux pour dispositifs limités par la charge, la déformation et l'énergie.

des valeurs de K_{Ic} supérieures à $15 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$, limite inférieure tolérée pour les applications limitées par la charge, mais pas les polymères ni les céramiques.

La droite correspondant à M_2 est représentée à la figure 6.28 pour la valeur $1 \text{ kJ} \cdot \text{m}^{-2}$. Les matériaux qui ont des valeurs supérieures présentent une résistance aux chocs rassurante pour les ingénieurs. Les métaux, les composites et certains polymères satisfont à ce critère (tableau 6.28), mais pas les céramiques.

Dans le cas de la conception limitée par la déformation, la situation est encore différente. La droite tracée correspond à $M_3 = 10^{-3} \cdot \text{m}^{1/2}$. Elle montre pourquoi les polymères sont aussi largement utilisés : quand la conception est limitée par la déformation, les polymères, et particulièrement les nylons, les polycarbonates et le polystyrène, s'avèrent aussi bons que les métaux.

Tableau 6.28 – Matériaux pour conception limitée par la rupture.

Type de conception, critère	Matériau
Limitée par la charge $K_{Ic} > 15 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$	Métaux, composites à matrice polymère.
Limitée par l'énergie $G_c > 1 \text{ kJ} \cdot \text{m}^{-2}$	Métaux, composites et certains polymères.
Limitée par la déformation $K_{Ic}/E > 10^{-3} \text{ m}^{1/2}$	Polymères, élastomères et certains métaux

6.14.4 Conclusions

La figure donne quelques autres éclaircissements. L'affection que les ingénieurs en mécanique portent aux métaux (et plus récemment aux composites) n'est pas simplement inspirée par l'attrait de leurs valeurs de ténacité K_{Ic} . Ils sont bons pour tous les critères (K_{Ic} , K_{Ic}^2/E et K_{Ic}/E). Les polymères possèdent de bonnes valeurs pour K_{Ic}/E mais pas pour les deux autres. Les céramiques sont mauvaises pour les trois critères. De là provient la méfiance profonde des ingénieurs envers les céramiques.

■ Bibliographie

Des éléments sur la mécanique de la rupture et les critères de sécurité peuvent être trouvés dans les ouvrages suivants :

Brock D., (1984), *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Martinus Nijhoff, Boston.

Hellan K., (1985), *Introduction to Fracture Mechanics*, McGraw-Hill.

Hertzberg R. W., (1989), *Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials*, Wiley, New York.