Mécanique analytique

Objet . Deux branches de la physique fondamentale classique

→ Mécanique newtonienne (PFD)

→ Électromagnétisme (éq° de Maxwell)

. Inconvénients de ces formulations

→ formalismes très différents, donc manque d'unité

→ formes des éq° dépendent du choix de coordonnées

exemple mécanique : cartésienne $m\ddot{x}_i = F_i$ vs

cylindrique $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = F_\rho$, etc. → pas de covariance

→ pas de méthode systématique pour étudier les quantités conservées

→ " de quantification (construction d'une théorie quantique)

. Intérêt de la mécanique analytique

→ formulation commune à la mécanique et l'EM, mais aussi à toutes les interactions fondamentales (modèle standard, relativité générale)

→ covariance

→ méthodes systématiques de traitement des quantités conservées (théorème de Noether) et de quantification (crochets de Poisson)

I) Formalisme lagrangien

A) Contexte

Problème décrit par des coordonnées généralisées

$q : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fonctions d'un paramètre t.
$t \mapsto \{q_i(t)\}$

espace des configurations

On se donne un Lagrangien $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a,b] \to \mathbb{R}$
$(q, \dot{q}, t) \to \mathcal{L}(q,\dot{q},t)$

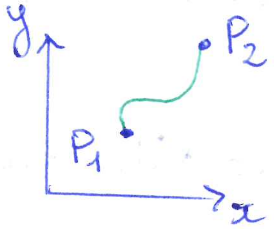
et une fonctionnelle appelée action

$$\boxed{S[q] = \int_a^b dt\, \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)} \in \mathbb{R}$$

fonction — dérivée

On souhaite extrémaliser S.

Exemples • Chemin le plus court entre deux points du plan



longueur du chemin $L[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1+\dot{y}(x)^2}$

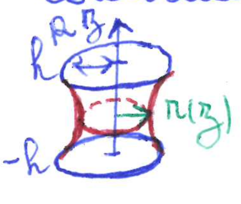
- coordonnée généralisée y
- vitesse " $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$
- paramètre x
- Lagrangien $\mathcal{L}(y,\dot{y},x) = \sqrt{1+\dot{y}^2}$
- action $L[y]$

• Principe de Fermat

Trajet suivi par la lumière correspond à un chemin optique stationnaire

$$L[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \underbrace{n(x,y)}_{\text{indice de réfraction}} \sqrt{1+\dot{y}(x)^2}$$

• Forme d'une bulle de savon entre deux anneaux coaxiaux → minimisation de l'énergie de surface $E_s = \gamma A$



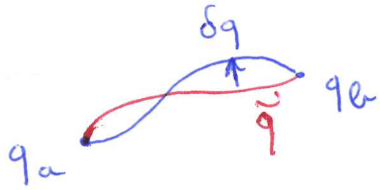
$\Rightarrow$ " de l'aire A

$$A[r] = \int_{-h}^{h} dz\, 2\pi r(z) \sqrt{1+\dot{r}(z)^2}$$

B) Principe variationnel

- Fonction $\tilde{q}$ qui extrémalise S avec conditions aux limites

$$\begin{cases} \tilde{q}(a) = q_a \\ \tilde{q}(b) = q_b \end{cases}$$



S est stationnaire en $\tilde{q}$: pour toute fonction $q = \tilde{q} + \delta q$ voisine

$$\boxed{\delta S = S[q] - S[\tilde{q}] = 0}$$ au 1er ordre en δq

avec mêmes conditions aux limites $(\delta q(a) = \delta q(b) = 0)$.

- On définit la dérivée fonctionnelle par

$$\delta S = S[\tilde{q} + \delta q] - S[\tilde{q}] = \int_a^b dt \sum_{i=1}^n \frac{\delta S}{\delta q_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t)\,\delta q_i(t)$$

Cherchons son expression.

$$\delta S[\tilde{q}] = \int_a^b dt \left[\mathcal{L}(\tilde{q}(t) + \delta q(t), \dot{\tilde{q}}(t) + \delta\dot{q}(t), t) - \mathcal{L}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) \right]$$

$$\underset{DL(1)}{=} \int_a^b dt \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t)\,\delta q_i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t)\underbrace{\delta\dot{q}_i(t)}_{= \frac{d}{dt}\delta q_i(t)} \right]$$

$$\underset{IPP}{=} \int_a^b dt \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t)\,\delta q_i(t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t)\right)\delta q_i(t) \right]$$
$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t)\,\delta q_i(t) \right]_{t=a}^{t=b}}_{\text{terme de bord } = 0}$$

Donc $$\boxed{\frac{\delta S}{\delta q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}$$ en notation simplifiée

- S stationnaire en $\tilde{q}$ $\iff$ $\frac{\delta S}{\delta q_i} = 0$ en $\tilde{q}$ $\iff$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, en $\tilde{q}$, $$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0}$$ équations d'Euler-Lagrange

Exemples . Chemin le plus court entre 2 points du plan

$$\mathcal{L}(y,\dot{y},x)=\sqrt{1+\dot{y}^2} \text{ donne } \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right)=0$$

Donc $\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}$ constant $\Rightarrow$ $\dot{y}$ constant $\Rightarrow$ $y(x)=Ax+B$.

droite !

. Principe de Fermat

$$\mathcal{L}(y,\dot{y},x)=n(x,y)\sqrt{1+\dot{y}^2} \text{ donne } \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}=\sqrt{1+\dot{y}^2}\frac{\partial n}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{n\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial y}=\frac{d}{\underbrace{dx\sqrt{1+\dot{y}^2}}_{ds}}\left(n\frac{dy}{\underbrace{dx\sqrt{1+\dot{y}^2}}_{ds}}\right) \text{ donc } \boxed{\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right)=\vec{\nabla}n}$$

ds abscisse curviligne

équation des rayons lumineux

. Bulle de savon

$$\mathcal{L}(r,\dot{r},z)=2\pi r\sqrt{1+\dot{r}^2} \text{ donne } \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r}-\frac{d}{dz}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}=2\pi\sqrt{1+\dot{r}^2}-\frac{d}{dz}\left(\frac{2\pi r\dot{r}}{\sqrt{1+\dot{r}^2}}\right)=0$$

$$\text{Donc } \underbrace{\sqrt{1+\dot{r}^2}-\frac{\dot{r}^2}{\sqrt{1+\dot{r}^2}}}_{\frac{1}{\sqrt{1+\dot{r}^2}}}\underbrace{-\frac{r\ddot{r}}{\sqrt{1+\dot{r}^2}}+\frac{r\ddot{r}\dot{r}^2}{(1+\dot{r}^2)^{3/2}}}_{-\frac{r\ddot{r}}{(1+\dot{r}^2)^{3/2}}}=0 \text{ d'où } \boxed{1+\dot{r}^2=r\ddot{r}}$$

Solution $r(z)=a\,\mathrm{ch}(z/a)$ = caténoïde

C) Mécanique lagrangienne

Formalisme lagrangien appliqué à la mécanique newtonienne

→ écriture du PFD comme principe variationnel

Contexte Particule ponctuelle, masse m, position $\vec{x}$, soumise à force conservative $\vec{F}=-\vec{\nabla}V$ avec $V(\vec{x},t)$ potentiel (indépendant de $\dot{\vec{x}}$)

- PFD $m\ddot{x}_i(t) = F_i(\vec{x}(t), t) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x}(t), t)$, $i \in [\![1,3]\!]$

donc $-\frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x}(t), t) - \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}_i(t)\right) = 0$

Analogue à Euler-Lagrange $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = 0$

avec $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = T(\dot{\vec{x}}, t) - V(\vec{x}, t)}$

avec $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i \Rightarrow \boxed{T(\dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2}$ énergie cinétique

Paramètres de l'espace de configura°
- coordonnées généralisées = position $\vec{x}$
- vitesses " = vitesse $\dot{\vec{x}}$
- paramètre = temps t

- Cas général Système soumis à des forces conservatives

Lagrangien $\boxed{\mathcal{L} = T - V}$ avec
- T = énergie cinétique
- V = " potentielle

Action $S = \int dt\, \mathcal{L}$ stationnaire ↳ principe moindre action

Exemple : N particules de masses $m^{(a)}$, positions $\vec{x}^{(a)}$, interagissant par un potentiel $V(\{\vec{x}^{(a)}\}, t)$

$$\mathcal{L}(\{\vec{x}^{(a)}\}, \{\dot{\vec{x}}^{(a)}\}, t) = \sum_b \frac{1}{2} m^{(b)} \dot{\vec{x}}^{(b)2} - V(\{\vec{x}^{(a)}\}, t)$$

- Remarques
  - Interactions fondamentales du modèle standard décrites par formulation lagrangienne.

    Électromagnétisme $S = \int dt\, d^3x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

  - ∃ formulations pour systèmes non conservatifs et forces dérivant d'un potentiel généralisé $V(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ (dépend vitesse)

Particule chargée dans un champ EM, potentiel

$$V(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = q\left(\Phi(\vec{x},t) - \dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x},t)\right)$$

charge — potentiel scalaire — potentiel vecteur

Donne la force de Lorentz.

D) Propriétés des équations d'Euler-Lagrange

1) Covariance

Soit un changement de coordonnées :

transforma° $q \mapsto \boxed{q' = f(q,t)}$ inversible.

Inverse $q' \mapsto q = g(q',t)$.

Transforma° des vitesses : $\begin{cases} \dot{q} \mapsto \dot{q}' = \dfrac{dq'}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \dfrac{\partial f}{\partial t} \\ \dot{q}' \mapsto \dot{q} = \dfrac{\partial g}{\partial q'_i}\dot{q}'_i + \dfrac{\partial g}{\partial t} \end{cases}$

Une grandeur scalaire est transformée en

$$\boxed{G'(q',\dot{q}',t) = G(q,\dot{q},t)}.$$

Le Lagrangien est un scalaire $\mathcal{L}' : (q',\dot{q}',t) \mapsto \mathcal{L}\left(g(q',t), \dfrac{\partial g}{\partial q'_i}\dot{q}'_i + \dfrac{\partial g}{\partial t}, t\right)$

de même que l'action

$$S'[q'] = \int_a^b dt\, \mathcal{L}'(q',\dot{q}',t) = \int_a^b dt\, \mathcal{L}(q,\dot{q},t) = S[q].$$

S' stationnaire par rapport à q' $\Longleftrightarrow$ S stationnaire par rapport à q

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q'_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}'_i}\right) = 0 \iff \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0}$$

Équa° d'Euler-Lagrange ont même forme dans tous les syst^{M} de coordonnées → on parle de covariance

Remarque

Propriété	Comportement d'une grandeur scalaire
covariance	$\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}$ ne sont pas les mêmes fonctions
invariance Chap. 2	$\mathcal{L}(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}'(q', \dot{q}', t)$ $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}$ sont les mêmes fonctions

− ↓ + forte

Exemple Particule de masse m dans potentiel V à 2D.

→ cartésien $q = (x, y)$, $\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y, t)$

→ cylindrique $q' = (\rho, \theta)$ avec $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$

$$\mathcal{L}'(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) - V'(\rho, \theta, t) \quad \text{avec } V'(\rho, \theta, t) = V(x, y, t)$$

Euler-Lagrange $\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \rho} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\rho}}\right) = m \rho \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V'}{\partial \rho} - m \ddot{\rho} = 0$

soit $m \ddot{\rho} = \underbrace{-\frac{\partial V'}{\partial \rho}}_{F_\rho} + \underbrace{m \rho \dot{\theta}^2}_{\text{force centrifuge}}$

2) Non-unicité du Lagrangien

Soit le Lagrangien $\boxed{\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}}$ avec $F(q, \dot{q}, t)$ une fonction scalaire de l'espace des configurations.

L'action associée est

$$\bar{S}[q] = \int_a^b dt \left[\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt}(q, \dot{q}, t) \right] = S[q] + \underbrace{F(q(b), \dot{q}(b), b) - F(q(a), \dot{q}(a), a)}_{\text{constante}}$$

$\bar{S}$ et S conduisent aux mêmes eq° d'EL.

Le Lagrangien est unique à une dérivée totale près.

Remarque Nous avons montré que la condition $\bar{\mathcal{L}} - \mathcal{L} = \frac{dF}{dt}$ est suffisante. On peut montrer qu'elle est nécessaire.

E) Optimisation sous contraintes

Déf° Contrainte = réduction du nb de degrés de liberté du système, par exemple en fixant une donnée du problème (longueur du pendule, etc.)

Mécanique newtonienne : on doit introduire des forces de réaction associées à ces contraintes (tension de la corde, etc.)

" lagrangienne : pas besoin !

Contraintes $\begin{cases} \text{holonomes : éq° algébriques sur les coordonnées } \boxed{f(q,t)=0} \\ \text{non holonomes : dépendance en vitesse (roulement sans glissement), inégalité (région de l'espace inaccessible)} \end{cases}$

Problème En présence de contraintes, les δq_i ne sont plus indépendants

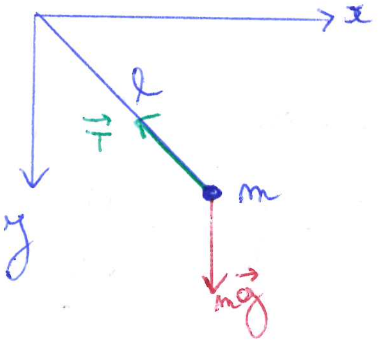
$$\delta S[q] = \int_a^b dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) \delta q_i = 0 \quad \not\Leftrightarrow \text{ Euler-Lagrange}$$

Solution formelle Pour contraintes $f_k(q,t) = 0$, $k \in [\![1, n]\!]$, on introduit des coordonnées généralisées λ_k = multiplicateurs de Lagrange.

Lagrangien $\boxed{\mathcal{L}_c(q,\dot{q},t;\lambda_k) = \mathcal{L}(q,\dot{q},t) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(q,t)}$

Extrémalisation de $S \Leftrightarrow$ Euler-Lagrange pour $\mathcal{L}_c$, ce qui redonne les contraintes car $\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \lambda_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \dot{\lambda}_k}\right) = f_k(q,t) = 0$.

Exemple Pendule simple. $\mathcal{L}_C(x,y,\dot{x},\dot{y},t;\lambda) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+mgy + \frac{1}{2}\lambda\underbrace{(x^2+y^2-\ell^2)}_{f(x,y)}$



Euler-Lagrange

$$\begin{cases} \text{pour } x : & m\ddot{x} = \lambda x \\ \quad \text{"} \quad y : & m\ddot{y} = mg + \lambda y \\ \quad \text{"} \quad \lambda : & x^2+y^2 = \ell^2 \end{cases}$$

(les deux premières) se résout avec ℓ cte

Comparaison avec approche newtonienne $\lambda = -\frac{T}{\ell}$, T = tension.

__Solution pratique__ Implémenter un changement de coordonnées qui intègre la contrainte.

$(x,y) \mapsto (\ell,\theta)$ et ℓ cte $\begin{cases} x = \ell\cos\theta \\ y = \ell\sin\theta \end{cases}$

$\mathcal{L}'(\theta,\dot{\theta},t) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta$

Euler-Lagrange $\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{\theta}}\right) = -mg\ell\sin\theta - m\ell^2\ddot{\theta} = 0$ d'où

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

II) Symétries et lois de conservation

A) Symétries

Soit un système, de Lagrangien $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$. Soit une __transf° inversible__ (chg^t de coordonnées)

$$q \mapsto q' = f(q,t).$$

Le Lagrangien transformé est $\mathcal{L}'(q',\dot{q}',t) = \mathcal{L}(q,\dot{q},t)$, de sorte que (Euler-Lagrange pour $\mathcal{L}'$ $\Leftrightarrow$ Euler-Lagrange pour $\mathcal{L}$)

= __covariance__

Déf° On dit que $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est une } \underline{\text{symétrie}} \text{ de } \mathcal{L} \\ \mathcal{L} \text{ est } \underline{\text{invariant}} \text{ par } f \end{array} \right\}$ si les fonctions

$\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont identiques, i.e. (à une dérivée totale près)

$$\boxed{\mathcal{L}(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) + \frac{dF}{dt} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt}}$$

B) Symétries continues et infitésimales

- Soit une famille de transforma° paramétrée par $\alpha \in \mathbb{R}$

$$q \mapsto q' = f_\alpha(q, t), \text{ avec } f_0(q,t) = q \text{ (identité)}.$$

Déf° On dit que f_α est une symétrie continue de $\mathcal{L}$ si c'est une symétrie de $\mathcal{L}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Supposons α petit → développement limité proche de l'identité.

Alors $q' = f_\alpha(q,t) = \underbrace{f_0(q,t)}_{=q} + \underbrace{\alpha\, g(q,t)}_{:=\delta q} + o(\alpha)$

$\exists\, F_\alpha(q,t)$ telle que $\mathcal{L}(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{dF_\alpha}{dt}(q, \dot{q}, t)$.

Or $F_\alpha(q,t) = \underbrace{F_0(q,t)}_{=0 \text{ car } f_0 = id} + \alpha\, G(q,t) + o(\alpha)$, donc

$$\boxed{\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \alpha \frac{dG}{dt}} + o(\alpha)$$

On dit que f_α définit une symétrie infinitésimale de $\mathcal{L}$.

Exemples
- Chute libre : $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz$

Transla° $z' = z + \alpha$ donc $\mathcal{L}(z', \dot{z}', t) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz - mg\alpha$

donc $\mathcal{L}(z', \dot{z}', t) = \mathcal{L}(z, \dot{z}, t) + \frac{dF_\alpha}{dt}$ avec $F_\alpha = -mg\alpha t$.

Transla° spatiale est une symétrie continue.

- Oscillateur harmonique 2D : $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2+y^2)$

Rotation $\begin{cases} x' = \cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y \\ y' = -\sin\alpha\, x + \cos\alpha\, y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x = \alpha y \\ \delta y = -\alpha x \end{cases}$

laisse $\mathcal{L}$ invariant.

C) Théorème de Noether

Lien entre symétrie infinitésimale et quantité conservée.

1) Motivation

On dit que q_i est une variable cyclique si $\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0}$. Alors Euler-Lagrange donne $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$, i.e que la quantité

$$\boxed{p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}$$, appelée moment conjugué,

est constante au cours du mouvement = quantité conservée.

Généralisation ?

2) Charge de Noether

Transforma° infinitésimal $q' = q + \delta q$ avec $\delta q = \alpha g(q,t)$.

Si symétrie, alors $\delta \mathcal{L} = \alpha \frac{dG}{dt}$. Or

$$\delta \mathcal{L} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i$$

$$+ \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)$$ donc

$$\sum_i \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]}_{=0 \text{ si éq° mouv}^t \text{ vérifiées}}\delta q_i = \alpha \frac{d}{dt}\left[-\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} g_i(q,t) + G \right]$$

D'où la quantité conservée

$$\boxed{Q = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} g_i - G} \quad = \text{charge de Noether}$$

Exemples . Chute libre $\mathcal{L}(z, \dot{z}, t) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz$

Translation spatiale $\delta z = \alpha$ donne $\delta \mathcal{L} = \alpha \frac{dG}{dt}$ avec $G = -mgt$. Donc avec $p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$ moment conjugué, on a $Q = p_z - G = m\dot{z} + mgt$.

. Invariance stricte sous translation spatiale

Système de 2 particules à 1D interagissant, potentiel $V(q_1 - q_2)$

Translation spatiale $\delta q_i = \alpha$. On a $\begin{cases} \delta \dot{q}_i = 0 \\ \delta(q_1 - q_2) = 0 \end{cases}$ donc

$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 - V(q_1 - q_2) = \mathcal{L}(q', \dot{q}', t)$

est strictement invariant $(\delta \mathcal{L} = 0)$

Charge conservée $Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = P_1 + P_2$ est le moment conjugué (total).

Ici $Q = m_1 \dot{q}_1 + m_2 \dot{q}_2$ est la quantité de mouv^t (pas de potentiel généralisé, comme potentiel vecteur $\vec{A}$)

. Invariance stricte sous rotation

Oscillateur harmonique 2D $\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$

Rotation $\begin{cases} \delta x = \alpha y \\ \delta y = -\alpha x \end{cases}$ $\Rightarrow$ Charge conservée

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}(-x) = m\dot{x}y - m\dot{y}x = -\underbrace{m(\vec{x}\times\vec{v})}_{\vec{L} \text{ moment cinétique}}\cdot\vec{e_z}$$

est la composante du moment cinétique selon l'axe de rotation

3) Translation temporelle

- Transforma° du paramètre $t \mapsto t' = t + \delta t$. C'est une symétrie si $\mathcal{L}(q,\dot{q},t+\delta t) = \mathcal{L}(q,\dot{q},t)$, soit

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0} \quad \text{symétrie de transla° tempo}^{L}$$

- Pour trouver la quantité conservée :

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \implies$$

$$0 = \frac{d\mathcal{L}}{dt} - \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)$$

$\downarrow$ si eq° mouv^t vérifiées

$$= \frac{d\mathcal{L}}{dt} - \sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\dot{q}_i\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\mathcal{L} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

La quantité conservée est l'Hamiltonien

$$\boxed{\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L}}$$

Exemple Particule dans un potentiel $V(q)$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) \text{ donc } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \text{ et } \mathcal{H} = m\dot{q}^2 - \mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q)$$

s'interprète comme l'énergie mécanique.

Invariance par translation du temps $\Leftrightarrow$ conservation énergie

III) Mécanique hamiltonienne

Soit un système mécanique décrit par Lagrangien $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$.

A) Le Hamiltonien

Nous avons défini les moments conjugués $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$.

On suppose le changement de variable $\dot{q}_i \mapsto p_i(q,\dot{q},t)$ inversible

On définit le Hamiltonien

$$\boxed{\mathcal{H}(q,p,t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}}$$

Tout est exprimé en fonc° de (q,p,t) $\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i(q,p,t) \\ \mathcal{L}(q,\dot{q}(q,p,t),t) \end{array} \right.$.

Espace (q,p) = espace des phases.

Exemples • Particule dans un potentiel $V(q,t)$. On a $p = m\dot{q}$ et

$$\mathcal{H}(q,p,t) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q,t) = \frac{p^2}{2m} + V(q,t).$$

• Particule de charge e dans un champ Em.

$$\mathcal{L}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{q}}^2 - e\Phi(\vec{q},t) + e\dot{\vec{q}}\cdot\vec{A}(\vec{q},t)$$

Moment conjugué $p_i = m\dot{q}_i + eA_i$ ($\neq$ quantitᵀ mouvᵗ)

Hamiltonien $\mathcal{H} = \vec{p}\cdot\dot{\vec{q}} - \mathcal{L}$

$$= m\dot{\vec{q}}^2 + \cancel{e\vec{A}\cdot\dot{\vec{q}}} - \frac{m}{2}\dot{\vec{q}}^2 + e\Phi(\vec{q},t) - \cancel{e\dot{\vec{q}}\cdot\vec{A}}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{\vec{q}}^2 + e\Phi(\vec{q},t) \text{ , soit}$$

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{(\vec{p}-e\vec{A})^2}{2m} + e\Phi}$$

B) Équations de Hamilton

Équations de la dynamique à partir de $\mathcal{H}$?

Dérivées partielles de $\mathcal{H}(q,p,t)$ par rapport à q et p ?

① $$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}\right) = \dot{q}_i + \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}$$

$$= \dot{q}_i + \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \sum_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j}$$

d'où $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dfrac{dq_i}{dt}$.

② $$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \left.\frac{\partial}{\partial q_i}\right|_p \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}\right) = \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\right|_{\dot{q}} - \sum_j \left.\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}\right|_p \underbrace{\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right|_q}_{p_j}$$

$$= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

Euler-Lagrange $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)$ donc $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dfrac{dp_i}{dt}$.

Équations de Hamilton

$$\boxed{\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}}$$

Équations plus « symétriques » que Euler-Lagrange.

Exemple Particule dans potentiel $V(\vec{q},t)$ $\mathcal{H}(\vec{q},\vec{p},t) = \dfrac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{q},t)$

donc $$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{p_i}{m} & (\text{quant}^T \text{ mouv}^t) \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial V}{\partial q_i} = F_i & (\text{PFD}) \end{cases}$$

Bilan = figure sur PC.

c) Crochets de Poisson

fonc° $A(q,p,t)$ est appelée observable. Équation d'évolution

On a vu que $\boxed{\dfrac{d\mathcal{H}}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$.

Ici $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \dot{q}_i \dfrac{\partial A}{\partial q_i} + \sum_i \dot{p}_i \dfrac{\partial A}{\partial p_i}$ $\Big\downarrow$ Hamilton

$$= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right)$$

On définit le crochet de Poisson

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

Alors
$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{H, A\}}$$

Propriétés du crochet de Poisson

- antisymétrique $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- bilinéaire
- Leibniz $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\} g$
- Jacobi
$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$$

Remarque
- Relations canoniques

$$\{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$$

Fondements de la mécanique quantique

p et q promus en tant qu'opérateurs $\hat{p}$ et $\hat{q}$

$\{ , \}$ remplacés par commutateurs $[,]\,\dfrac{i}{\hbar}$

relation canonique $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\, \delta_{ij}$

- Voir 2010 C pour problème complet.