Mécanique des solides indéformables et des milieux continus

David RODNEY rédigé par Juliette COLOMBIER & Guillaume RAMADIER

22 mai 2022

Table des matières

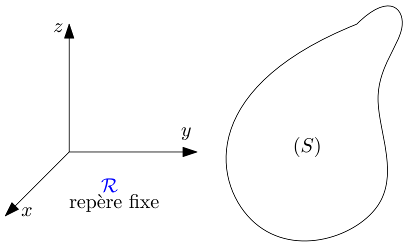
1 Cinématique des solides indéformables

1.1 Torseur cinématique

1.1.1 Définition

On considère le solide (S) en mouvement dans le référentiel $\mathscr{R}$ fixe. De façon générale, on a besoin de 6 variables pour décrire le mouvement d'un solide :

- 3 variables pour la translation
- 3 variables pour la rotation



Pour cela, on se donne la vitesse d'un point de référence O' et l'orientation d'un repère $\mathscr{R}'$ attaché à (S). Pour l'orientation de $\mathscr{R}'$, on peut utliser les angles d'Euler (*c.f* plus tard) ou les coordonnées des 3 vecteurs de base de $\mathscr{R}'$ dans le repère $(\hat{e_x}, \hat{e_y}, \hat{e_z})$ soient 9 variables mais qui peuvent être réduites à 3 en utilisant les contraintes (d'orthogonalité, de normalité des vecteurs de bases de $\mathscr{R}'$).

Propriété cinématique fondamentale

$$\forall A, B \in (S), \quad \vec{v}(A,t) = \underbrace{\vec{v}(B,t)}_{\text{translation}} + \underbrace{\vec{\Omega}(t) \times \overrightarrow{BA}}_{\text{rotation}} \tag{1}$$

Si l'on veut connaitre la vitesse en tout point de (S), il faut connaitre la vitesse en un point $B \in (S)$ et le vecteur rotation $\vec{\Omega}(t)$. On note :

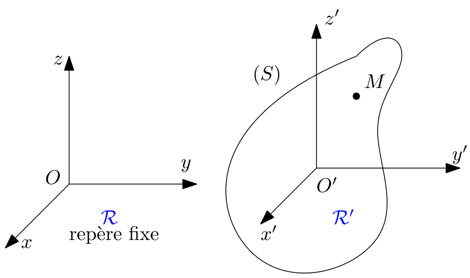
$$T = \left| \begin{matrix} \vec{\Omega}(t) \\ \vec{v}(B,t) \end{matrix} \right|_B \tag{2}$$

le torseur cinématique.

NB : $\vec{v}(A,t)$ ne dépend pas du choix du point de référence

$$\begin{aligned} \vec{v}(O',t) &= \vec{v}(B,t) + \vec{\Omega}(t) \times \overrightarrow{BO'} \\ \text{donc } \vec{v}(A,t) &= \vec{v}(O',t) - \vec{\Omega}(t) \times \overrightarrow{BO'} + \vec{\Omega}(t) \times \overrightarrow{BA} \\ \vec{v}(A,t) &= \vec{v}(O',t) + \vec{\Omega}(t) \times \overrightarrow{O'A} \end{aligned}$$

Démonstration de (1) :
Considérons un point M dans le solide indéformable (S).



On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ et on exprime le vecteur $\overrightarrow{O'M}$ dans $\mathscr{R}'$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + x'_M \hat{e_x}' + y'_M \hat{e_y}' + z'_M \hat{e_z}'$$

Nous dérivons l'expression précédente pour avoir accès à la vitesse du point M

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{v}(M,t) = \overrightarrow{v}(O',t) + x'_M \frac{\mathrm{d}\hat{e_x}'}{\mathrm{d}t} + y'_M \frac{\mathrm{d}\hat{e_y}'}{\mathrm{d}t} + z'_M \frac{\mathrm{d}\hat{e_z}'}{\mathrm{d}t}$$

car (x'_M, y'_M, z'_M) sont constant dans $\mathscr{R}'$.

On exprime $\frac{\mathrm{d}\hat{e_i}'}{\mathrm{d}t}$ dans $\mathscr{R}'$.

$$\forall i (= x, y, z), \quad \frac{\mathrm{d}\hat{e_i}'}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{3} R_{i,j} \hat{e_j}'$$
$$\text{avec } R_{i,j} = \frac{\mathrm{d}\hat{e_i}'}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{e_j}'$$

Or, on sait que $||\hat{e_i}'||^2 = 1$ donc $R_{i,i} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}||\hat{e_i}'||^2}{\mathrm{d}t} = 0$.

Et si $i \neq j$

$$\hat{e_i}'(t+\mathrm{d}t) \cdot \hat{e_j}'(t+\mathrm{d}t) = 0$$

Alors

$$0 = \left(\hat{e_i}'(t) + \frac{\mathrm{d}\hat{e_i}'}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t\right) \cdot \left(\hat{e_j}'(t) + \frac{\mathrm{d}\hat{e_j}'}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t\right)$$
$$0 = \hat{e_i}' \cdot \hat{e_j}' + \left(\hat{e_i}' \cdot \frac{\mathrm{d}\hat{e_j}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\hat{e_i}'}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{e_j}'(t)\right) + \text{terme quadratique}$$

Donc,

$$\frac{\hat{e_i}'}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{e_j}'(t) = -\hat{e_i}' \cdot \frac{\mathrm{d}\hat{e_j}'}{\mathrm{d}t}$$
$$R_{i,j} = -R_{j,i}$$

Finalement, R est une matrice **anti-symétrique**, on peut la mettre sous la forme :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & R_{1,2} & R_{1,3} \\ -R_{1,2} & 0 & R_{2,3} \\ -R_{1,3} & -R_{2,3} & 0 \end{pmatrix}$$

En prenant $\overrightarrow{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} R_{2,3} \\ -R_{1,3} \\ R_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{R}'$, on vérifie bien que :

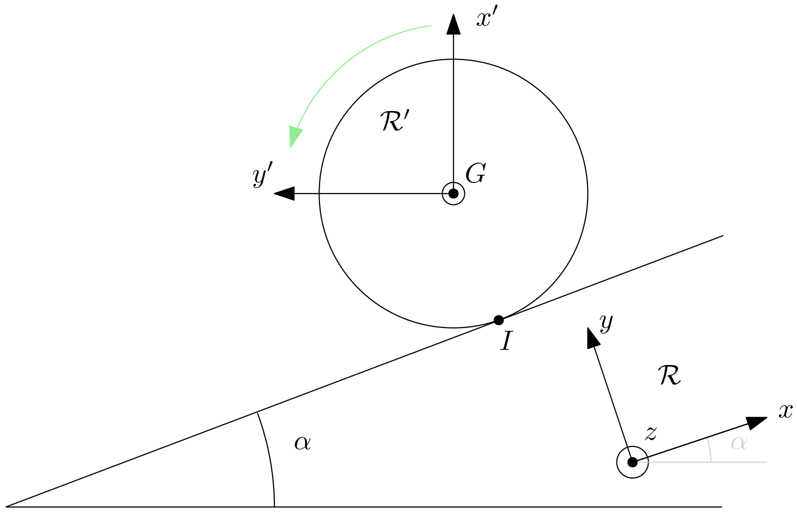
$$\forall i, \quad \frac{\hat{e_i}'}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\Omega}(t) \times \hat{e_i}'$$

d'où

$$\overrightarrow{v}(M,t) = \overrightarrow{v}(O',t) + \overrightarrow{\Omega}(t) \times \overrightarrow{O'M}$$

1.1.2 Exemple

On considère un cylindre roulant sans glissement le long d'un plan incliné.



L'absence de glissement impose :

$$\vec{v}(I,t) = 0 \quad \forall t$$

On pose :

$$\hat{e_x}' = \cos(\theta)\hat{e_x} + \sin(\theta)\hat{e_y}$$
$$\hat{e_y}' = -\sin(\theta)\hat{e_x} + \cos(\theta)\hat{e_y}$$

Dans ce cas

$$\frac{\mathrm{d}\hat{e_x}'}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\hat{e_y}' = \dot{\theta}\hat{e_z}' \times \hat{e_x}'$$

On pose $\vec{\Omega}(t) = \dot{\theta}\hat{e_z}' = \dot{\theta}\hat{e_z}$ et on obtient le torseur cinématique suivant :

$$T = \begin{vmatrix} \dot{\theta}\hat{e_z} \\ 0 \end{vmatrix}_I$$

Alors,

$$\forall M \in (S), \quad \vec{v}(M,t) = \dot{\theta}\hat{e_z}' \times \overrightarrow{IM}$$
$$\vec{v}(G,t) = \dot{\theta}\hat{e_z} \times R\hat{e_y} = -\dot{\theta}R\hat{e_x}$$

1.2 Généralités sur les torseurs

Un torseur est un champ vectoriel $M \mapsto \vec{m}(M)$ défini par :

— 2 vecteurs

$$T = \begin{vmatrix} \vec{R}\text{, la résultante} \\ \vec{m}(O)\text{, le moment en un point de réf} \end{vmatrix}_0$$

— Une règle de calcul : $\vec{m}(M) = \vec{m}(O) + \vec{R} \times \overrightarrow{OM}$

Propriétés :

— Indépendance par rapport au point de référence

— Équi-projectivité $\vec{m}(M) \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{m}(0) \cdot \overrightarrow{OM}$ car $\vec{R} \times \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM}$.

— Invariant scalaire

$$\forall M,\ \vec{m}(M)\cdot\vec{R} = \vec{m}(O)\cdot\vec{R}$$

— Axe du torseur Pour tout torseur, il existe une droite (Δ) parallèle à $\vec{R}$ telle que, $\forall M \in (\Delta)$, $\vec{m}(M)$ est constant et parallèle à $\vec{R}$.

Deux cas particuliers

— Couple : si $\vec{R} = 0$ (pour la vitesse, mouvement de translation)

— Glisseur : $\exists$ un point O / $\vec{m}(O) = 0$ alors $\vec{m}(M) = \vec{R}\times\overrightarrow{OM}$ perpendiculaire au plan engendré par $\vec{R}$ et $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{m} = 0$ le long de (Δ) (Pour la vitesse, mouvement de rotation)

Deux remarques sur le torseur cinématique

— On a

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t} = \vec{\Omega}\times\overrightarrow{AB}$$

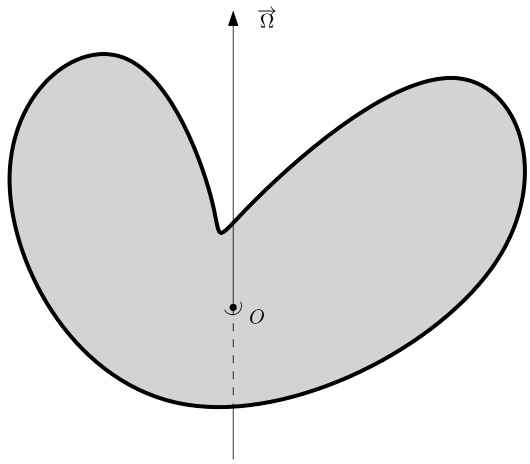
car

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}(B) - \vec{B}(A)$$

— L'accélération n'est pas un torseur

$$\begin{aligned}\vec{v}(A) &= \vec{v}(B) + \vec{\Omega}(t)\times\overrightarrow{BA}\\ \vec{a}(A) &= \vec{a}(B) + \frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}(t)}{\mathrm{d}t}\times\overrightarrow{BA} + \underbrace{\vec{\Omega}(t)\times\left(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{BA}\right)}_{\text{accélération centripète}}\end{aligned}$$

1.3 Solide en rotation



$\exists$ un point $O/\vec{v}(O) = 0$ alors le torseur est un glisseur avec $\vec{v} = 0$ le long de l'axe parallèle à $\vec{\Omega}$ passant par O.

On a un mouvement de rotation autour de cet axe car

$$\forall O \in \text{l'axe},\ \vec{v}(M) = \vec{\Omega}(t)\times\overrightarrow{OM}$$

Si la direction de $\vec{\Omega}$ est constante dans le temps, on a une rotation autour d'un axe : dans ce cas, $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\hat{e}_z$. Sinon, on a une rotation autour d'un point (qui peut lui-même changer dans le temps). Dans ce cas on a besoin de 3 angles, **les anlges d'Euler**, on transforme $\mathscr{R}$ en $\mathscr{R}'$ grâce à 3 angles.

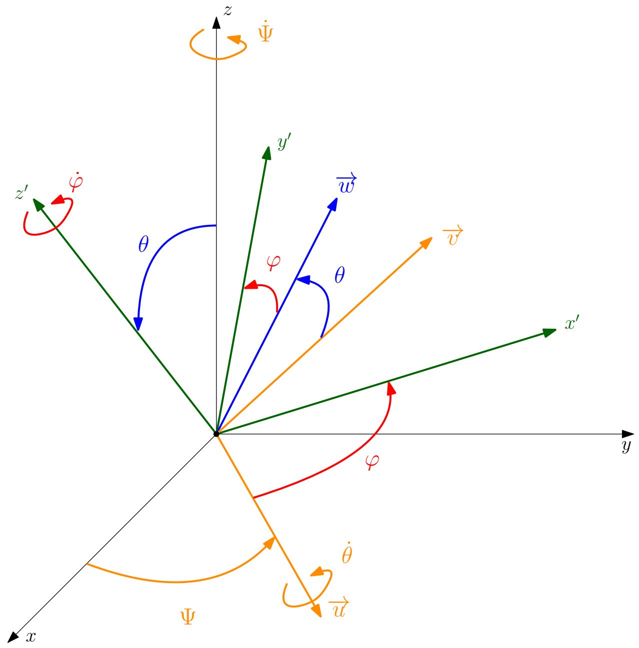
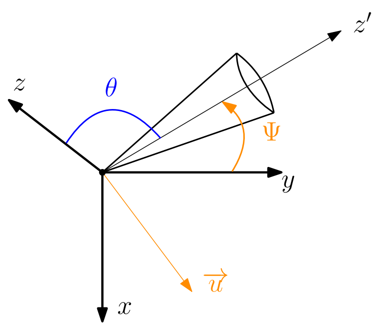


FIGURE 1 – Angles d'Euler

1. **Précession**
   Rotation de Ψ autour de $\hat{e}_z$
   $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z) \longmapsto (\hat{u}, \hat{v}, \hat{e}_z)$
   tq $\hat{u} \in (x'y')$ ou $\hat{v} \in (zz')$.
2. **Nutation**
   Rotation de θ autour de $\hat{u}$
   $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{e}_z) \longmapsto (\hat{u}, \hat{w}, \hat{e}'_z)$
   tq $\hat{e}_z \longmapsto \hat{e}'_z$ ou $\hat{w} \in (x'y')$.
3. **Giration**
   Rotation de φ autour de $\hat{e}'_z$
   $(\hat{u}, \hat{w}, \hat{e}'_z) \longmapsto (\hat{e}'_x, \hat{e}'_y, \hat{e}'_z)$

$$\overrightarrow{\Omega} = \dot\Psi \hat{e}_z + \dot\theta \hat{u} + \dot\varphi \hat{e}'_z$$

Exemple : Cône en rotation sur un plan (xy).



On a une précession de Ψ, nutation de $\alpha - \frac{\pi}{2} = \theta$, et une giration de φ dans le plan $(x'y')$. Soit

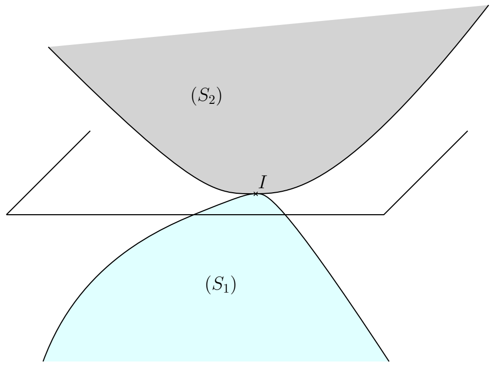
$$\overrightarrow{\Omega} = \dot\Psi \hat{e}_z + 0 + \dot\varphi \hat{e}_z$$

Si roulement sans glissement, $\overrightarrow{v} = 0$ le long de l'axe (OI)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \text{rotation autour de (OI)} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{\Omega} \text{ doit être parallèle à } (OI) \\ &\Rightarrow \overrightarrow{\Omega} \cdot \overrightarrow{\hat{e}_z} = 0 \end{aligned}$$

d'où $\dot{\Psi} + \dot{\varphi}\hat{e}'_z \cdot \hat{e}_z = 0$.
i.e $\dot{\Psi} + \dot{\varphi}\sin(\alpha) = 0$ (Condition de non glissement)

1.4 Cinématique des liaisons



On modélise une le contact par un point I où un point I_1 de (S_1) coïncide avec un point I_2 de (S_2). Sans glissement, $\overrightarrow{v}(I_1) = \overrightarrow{v}(I_2)$.

Sinon, on note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}(I_2) - \overrightarrow{v}(I_1)$ la vitesse de glissement de (S_2) par rapport à (S_1).

Si on exprime la vitesse d'un point M dans (S_2) par rapport à (S_1).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}(M \in S_2/S_1) &= \overrightarrow{v}(M \in S_2) - \underbrace{\overrightarrow{v}(M \in S_1)}_{\text{v qu'aurait M s'il } \in (S_1)} \\ &= \overrightarrow{I_2} + \overrightarrow{\Omega}_2 \times \overrightarrow{I_2M} - \overrightarrow{v}(I_1) - \overrightarrow{\Omega}_1 \times \overrightarrow{I_1M} \\ &= \overrightarrow{u} + \underbrace{\left(\overrightarrow{\Omega}_2 - \overrightarrow{\Omega}_1\right)}_{\overrightarrow{\Omega}_{2/1}} \times \overrightarrow{IM} \end{aligned}$$

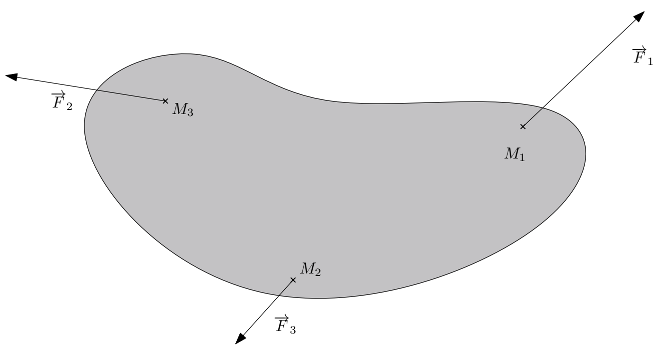
On décompose

$$\overrightarrow{\Omega}_{2/1} = \underbrace{\overrightarrow{\Omega}_{\parallel}}_{\text{roulement}} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega}_{\perp}}_{\text{frottement}}$$

2 Cinétique des solides indéformables

2.1 Torseur cinétique

2.1.1 Définition



Pour tout champ vectoriel $\vec{F}(M)$ (discret ou continu) on peut associé un torseur tel que :

$$\vec{R} = \sum_M \vec{F}(M) \left(= \int \mathrm{d}^3 r \vec{F}(\vec{r}) \right)$$

et le moment en un point, tel que :

$$\vec{m}(O) = \sum_M \overrightarrow{OM} \times \vec{F}(M) \left(= \int \mathrm{d}^3 r \left(\overrightarrow{OM} \times \vec{F}(\vec{r}) \right) \right)$$

Le torseur cinétique est associé à la **quantité de mouvement** $\rho(M)\vec{v}(M)$, champ continu avec $\rho(M)$ la densité volumique locale.
La résultante est

$$\vec{P} = \int \mathrm{d}^3 r \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}) = M_T \underbrace{\vec{v}_G}_{\text{vitesse cdm}}$$

et le moment cinétique en un point A

$$\vec{\sigma}(A) = \int \mathrm{d}^3 r \overrightarrow{AM} \times \rho(M) \vec{v}(M)$$

Propriétés :

— $\vec{\sigma}_O = \vec{\sigma}_A + M_T \vec{v}_G \times \overrightarrow{AO}$

— $\vec{\sigma}_O \cdot \overrightarrow{OA} = \vec{\sigma}_A \cdot \overrightarrow{OA}$

— $\vec{\sigma}_O \cdot \vec{v}_G = \text{cte}$

2.1.2 Référentiel barycentrique

On considère le référentiel barycentrique $\mathscr{R}^\star$ qui est uniquement en translation à la vitesse $\vec{v}_G$ (en général, non Galiléen). Dans la suite, toutes les grandeurs calculées dans le référentiel barycentrique porteront une notation « * ».

Dans $\mathscr{R}^\star$, on a évidement $\vec{v}^\star_G = 0$ donc $\overrightarrow{P^\star} = 0$
Le torseur cinétique $T^\star_{cin}$ est un couple avec $\vec{\sigma}^\star_O = \overrightarrow{\text{cte}} = \vec{\sigma}^\star$ et un glisseur d'où $\vec{v}^\star_m = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{GM}$.
De plus, on a un mouvement de rotation autour de G.

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}^\star = \vec{\sigma}^\star_G &= \int \mathrm{d}^3 \overrightarrow{GM} \times \rho(M) \vec{v}^\star(M) \\
&= \int \mathrm{d}^3 r \overrightarrow{GM} \times \rho(M) \vec{v}(M) - \cancelto{0}{\int \mathrm{d}^3 r \overrightarrow{GM} \times \rho(M) \vec{v}_G} \\
&= \vec{\sigma}_G
\end{aligned}$$

donc $\vec{\sigma}^\star = \vec{\sigma}_G$ *i.e* G a le même moment cinétique en $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}^\star$

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_A &= \vec{\sigma}_G + M_T \vec{v}_G \times \overrightarrow{GA} \\
\vec{\sigma}_A &= \vec{\sigma}^\star + M_T \vec{v}_G \times \overrightarrow{GA}
\end{aligned}$$

C'est le **théorème de Köening**.

Pour l'énergie cinétique K du solide (S), le **théorème de Köening** s'écrit

$$K = \underbrace{\frac{1}{2} M_T \vec{v}^2_G}_{\text{translation}} + \underbrace{K^\star}_{\text{rotation dans } \mathscr{R}^\star}$$

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 r \rho(M) \vec{v}^{\,2}(M) \\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 r \rho(M) \big(\vec{v}_G - \vec{v}^{\,\star}(M)\big)^2 \\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 r \rho(M) \vec{v}_G^{\,2} + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 r \rho(M) \vec{v}^{\,\star}(M)^2 - \int \left(\mathrm{d}^3 r \rho(M) \vec{v}^{\,\star}(M)\right) \cdot \vec{v}_G \\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 r \rho(M) \vec{v}_G^{\,2} + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 r \rho(M) \vec{v}^{\,\star}(M)^2 - \cancelto{0}{\int \left(\mathrm{d}^3 r \vec{P}^{\star}(M)\right)} \cdot \vec{v}_G \\
&= \frac{1}{2} M_T \vec{v}_G^{\,2} + K^\star
\end{aligned}
$$

2.2 Solide en rotation

2.2.1 Opérateur d'inertie

$$
\vec{\sigma}_A = \int \mathrm{d}^3 r \overrightarrow{AM} \times \rho(M) \vec{v}(M)
$$

Si $A, M \in (S)$, alors $\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{AM}$. Donc

$$
\begin{aligned}
\vec{\sigma}_A &= \int \mathrm{d}^3 r \overrightarrow{AM} \times \rho(M) \times \left(\vec{v}(A) + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{AM}\right) \\
&= \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r \overrightarrow{AM} \rho(M)}_{M_T \overrightarrow{AG}} \times \vec{v}(A) + \int \mathrm{d}^3 r \overrightarrow{AM} \rho(M) \times \left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AM}\right) \\
&= M_T \overrightarrow{AG} \times \vec{v}(A) + \int \mathrm{d}^3 r \overrightarrow{AM} \rho(M) \times \left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AM}\right)
\end{aligned}
$$

si $\vec{v}_A = 0$ ou $A = G$, alors

$$
\vec{\sigma}_A = \int \mathrm{d}^3 r \overrightarrow{AM} \rho(M) \times \left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AM}\right)
$$

donc $\vec{\sigma}_A$ est une fonction linéaire de $\vec{\Omega}$ donc il existe une matrice $[J_A]$, opérateur d'inertie, tel que :

$$
\vec{\sigma}_A = [J_A] \cdot \vec{\Omega}
$$

Expression de l'opérateur d'inertie

Dans le repère $\mathscr{R}'$ attaché à (S) et centré sur A, on note $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{R}'$.

$$
\begin{aligned}
\vec{\sigma}_A &= \int \mathrm{d}^3 r \rho(M) \left(||AM||^2 \vec{\Omega} - \left(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{\Omega}\right) \overrightarrow{AM} \right) \\
&= \int \mathrm{d}^3 r \rho(M) \begin{pmatrix} (x^2+y^2+z^2)\Omega_x - (x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z)x \\ (x^2+y^2+z^2)\Omega_y - (x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z)y \\ (x^2+y^2+z^2)\Omega_z - (x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z)z \end{pmatrix} \\
&= \int \mathrm{d}^3 r \rho(M) \begin{pmatrix} (y^2+z^2)\Omega_x - xy\Omega_y - xz\Omega_z \\ (x^2+z^2)\Omega_y - xz\Omega_x - yz\Omega_z \\ (x^2+y^2)\Omega_z - zx\Omega_x - zy\Omega_y \end{pmatrix} \\
&= \int \mathrm{d}^3 r \rho(M) \begin{pmatrix} (y^2+z^2) & -xy & -xz \\ -xy & (x^2+z^2) & -yz \\ -xz & -yz & (x^2+y^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Alors $[J_A]$ est une matrice symétrique et

$$
[J_A] = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ & I_{yy} & -I_{yz} \\ & & I_{zz} \end{pmatrix}
$$

avec

$$I_{xx} = \int \mathrm{d}^3 r \rho(M)(y^2 + z^2) = I_{O_x} \text{ moment d'intertie par rapport à l'axe } (Ox)$$
$$I_{xy} = \int \mathrm{d}^3 r \rho(M) xy \text{ produit d'inertie}$$

$[J_A]$ renseigne sur la répartition des masses dans (S). De plus, $[J_A]$ est symétrique réelle donc **diagonalisable** : il existe une base d'inertie et 3 axes principaux d'inertie.

Exemple : Cylindre plein homogène de longueur L et d'axe (Oz).

$$\int \mathrm{d}^3 r xy = 0 \text{ par symétrie miroir \% } (Oxz)$$

Donc une base d'inertie est l'axe du cylindre et toute paire de vecteur perpendiculaires dans le plan perpendiculaire à z

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int \mathrm{d}^3 r \rho(M)(x^2 + y^2) = \rho L \int_0^R 2\pi r \mathrm{d}r r^2 = \rho L \frac{\pi}{2} R^4 \\ \text{et } M_T &= \rho L R^2 \pi \\ \text{d'où } I_{zz} &= \frac{1}{2} M_T R^2 \end{aligned}$$

Pour un cylindre qui roule $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \hat{e}_z$, on a $\vec{\sigma}_O = [J_O] \vec{\Omega} = I_{zz} \dot{\theta} \hat{e}_z$.

2.2.2 Énergie cinétique de rotation

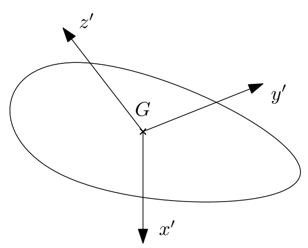
On a

$$K = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \rho(M) \vec{v}(M)^2$$

On considère une rotation autour de A, d'où $\vec{v}_A = 0$. Il vient :

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \rho(M) \left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AM}\right) \cdot \left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AM}\right) \\ &= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \rho(M) \vec{\Omega} \cdot \left(\overrightarrow{AM} \times \left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AM}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_A \\ &= \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot [J_A] \vec{\Omega} \end{aligned}$$

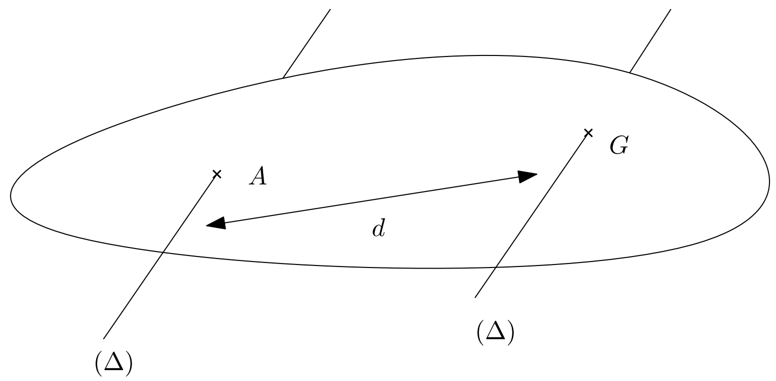
De façon générale, dans $\mathscr{R}'$ base d'inertie centrée sur G.



$$K = \frac{1}{2} M_T \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \left(I_{O_{x'}} \Omega_x^2 + I_{O_{y'}} \Omega_y^2 + I_{O_{z'}} \Omega_z^2 \right)$$

avec $\vec{\Omega}$ exprimé dans $\mathscr{R}'$

2.2.3 Théorème de Huygens



On considère une rotation autour de (Δ) passant par A, donc $\overrightarrow{\Omega} = \omega \hat{e}_\Delta$. et

$$\begin{aligned} K_{tot} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega} \cdot [J_A]\,\overrightarrow{\Omega} \\ &= \frac{1}{2}\omega_2 \Big(\underbrace{\hat{e}_\Delta \cdot [J_A]\,\hat{e}_\Delta}_{I_{A,(\Delta)}}\Big) \end{aligned}$$

avec $I_{A,(\Delta)}$ moment cinétique calculé en A par rapport à la droite (Δ).

Théorème de Huygens

$$I_{A,(\Delta)} = I_{G,(\Delta)} + M_T d^2 \tag{3}$$

2.3 Principe fondamental de la dynamique

2.3.1 Énoncé

Dans un repère Galiléen, la dérivée par rapport au temps du torseur cinétique est égale au torseur des forces extérieures.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}}{\mathrm{d}t} &= M_T \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_G}{\mathrm{d}t} = \sum_M \overrightarrow{F}_{ext}(M) = \overrightarrow{F}^{tot}_{ext} \\ \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}_O}{\mathrm{d}t} &= \sum_M \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F}_{ext}(M) = \overrightarrow{m}_{O/\overrightarrow{F}_{ext}} \end{aligned}$$

si O est fixe dans le repère Galiléens

Le « théorème » du moment cinétique s'applique en O fixe ou en G quelque soit son mouvement.

Démonstration

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma}_O &= \overrightarrow{\sigma}_G + M_T \overrightarrow{v}_G \times \overrightarrow{GO} \\ \text{et } \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}_O}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}_G}{\mathrm{d}t} + M_T \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_G}{\mathrm{d}t} \times \overrightarrow{GO} + M_T \overrightarrow{v}_G \times \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GO}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}_G}{\mathrm{d}t} + \sum_M \overrightarrow{F}_{ext}(M) \times \overrightarrow{GO} + \underbrace{M_T \overrightarrow{v}_G \times \left(\cancelto{0}{\overrightarrow{v}_O} - \overrightarrow{v}_G\right)}_{=0} \end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}_G}{\mathrm{d}t} &= \sum_M \left(\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F}_{ext}(M)\right) + \overrightarrow{GO} \times \sum_M \overrightarrow{F}_{ext}(M) \\ \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}^\star}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}_G}{\mathrm{d}t} = \sum_M \left(\overrightarrow{GM} \times \overrightarrow{F}_{ext}(M)\right) = \overrightarrow{m}_{G/\overrightarrow{F}_{ext}} \end{aligned}$$

avec $\vec{\sigma}^\star$ le moment cinétique du repère barycentrique.

2.3.2 Théorème de l'énergie cinétique

Si (S) se déplace, la puissance des forces extérieures fournies à (S) est $\mathscr{P} = \sum_M \vec{F}_{ext}(M) \cdot \vec{v}(M)$ et l'énergie potentielle des forces extérieures par rapport à un point O est donné par :

$$\epsilon_p = -\sum_M \vec{F}_{ext}(M) \cdot \overrightarrow{OM}$$

On a

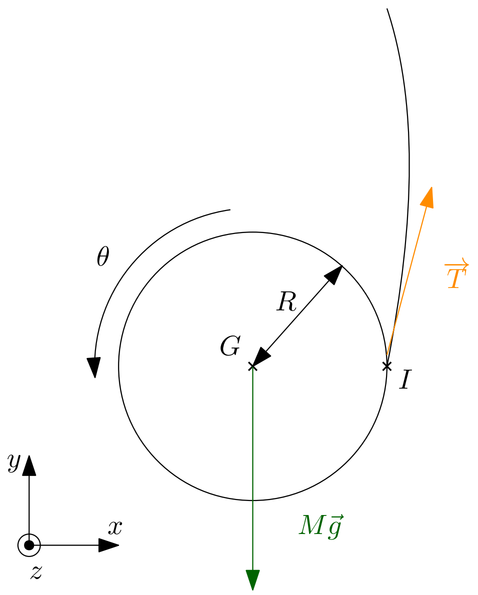
$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}$$

ou de façon équivalente $K + \epsilon_p = \text{cte}$

Démonstration *c.f* Compléments

2.3.3 Exemple : chute de yoyo

On assimile le yoyo à un disque et on note $\vec{T}$ la tension du fil.



$$M\frac{\mathrm{d}\vec{v}_G}{\mathrm{d}t} = M\vec{g} + \vec{T}$$
$$M\ddot{y}_G = -Mg + T_y$$

Méthode 1 :

On applique le théorème du moment cinétique en G.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_G}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{GI} \times \vec{T} = RT\hat{e}_z$$

et $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\hat{e}_z$ d'où $\vec{\sigma}_G = [J_G]\,\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} I_{xx} & & \\ & I_{yy} & \\ & & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$.

Alors

$$
\begin{aligned}
I_{zz}\ddot{\theta} &= RT \\
\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} &= RM(\ddot{y_G} + g) \\
\text{or } \dot{y_G} &= -R\dot{\theta} \text{ pas de glissement} \\
\text{d'où } \ddot{y_G} &= -\frac{2}{3}g
\end{aligned}
$$

Méthode 2 :

Comme $\overrightarrow{v_I} = 0$, on peut appliquer le théorème du moment cinétique en I et

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\sigma_I} &= [J_I]\,\overrightarrow{\Omega} = I_{I/(Oz)}\dot{\theta}\hat{e}_z \\
\text{et } I_{I/(Oz)} &= I_{G/(Oz)} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2
\end{aligned}
$$

Finalement,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_I}}{\mathrm{d}t} &= \frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta}\hat{e}_z = \overrightarrow{IG} \times M\overrightarrow{g} \\
&= RMg\hat{e}_z \\
\frac{3}{2}\underbrace{R\ddot{\theta}}_{-\ddot{y}_G} &= g
\end{aligned}
$$

Méthode 3 :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}M\dot{y_G}^2 + \frac{1}{2}I_{zz}\dot{\theta}^2 + Mgy_G = \text{cte}$$

On dérive par rapport au temps, et on retrouve encore $\ddot{y_G} = -\frac{2}{3}g$.

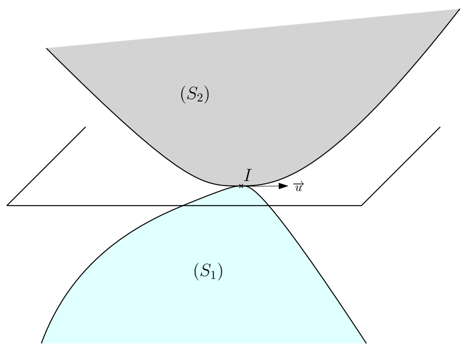
2.3.4 Liaisons et contacts

Un contact ou une liaison impose un torseur pour contraindre le mouvement du solide. Ils imposent une force et/ou un moment pour bloquer les translation et/ou les rotations du solide.

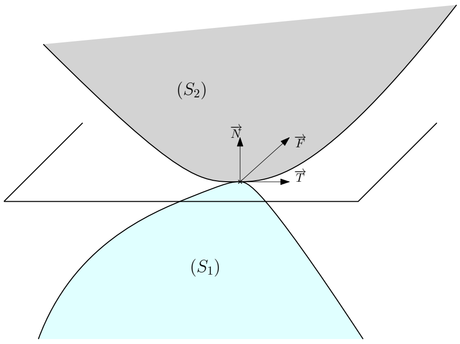
Toupie $T_L = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|$.

Cube $T_L = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ 0 \end{pmatrix}\right|$.

<u>**Force de frottement**</u>



Si on a un mouvement relatif de (S_2) par rapport à (S_1), on a une force de frottement. On représente ces frottements par la **loi phénoménologique de Coulomb :**



Si $||\overrightarrow{T}|| < f_s||\overrightarrow{N}||$, il n'y a **pas de glissement.**

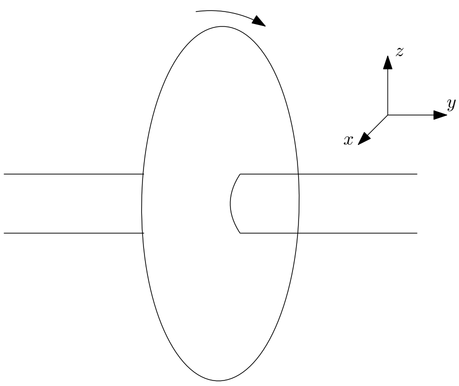
En cas de **glissement**, $||\overrightarrow{T}|| = f_d||\overrightarrow{N}||$ et $\overrightarrow{T} = -f_d||\overrightarrow{N}||\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$.

3 Solides en rotation et effet gyroscopique

L'effet gyroscopique est la conséquence du « théorème » du moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{m}_{O/F_{ext}}$$

Exemple : Roue en rotation



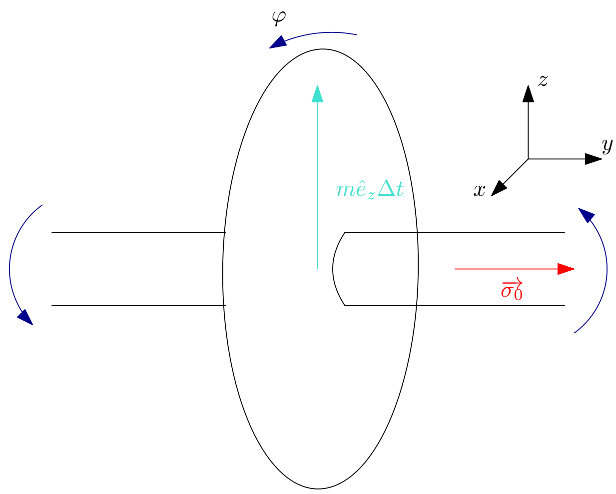
Ce système impose un moment

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\sigma_O}(t+\Delta t) &= \overrightarrow{\sigma_O}(t) + m\Delta t\hat{e}_z \\ &= \sigma_O\hat{e}_y + m\Delta t\hat{e}_z\end{aligned}$$

- $\hookrightarrow$ En l'absence de moment appliquée $\overrightarrow{\sigma_O}$ = cte : un solide en rotation conserve son moment cinétique.
- $\hookrightarrow$ A l'inverse, pour changer $\overrightarrow{\sigma_O}$, il faut appliquer un moment, d'où la présence d'une résistance au changement d'orientation d'un solid en rotation

3.1 Illustrations

a) **Roue en rotation**
Une roue en rotation résiste **à tout changement de direction**.



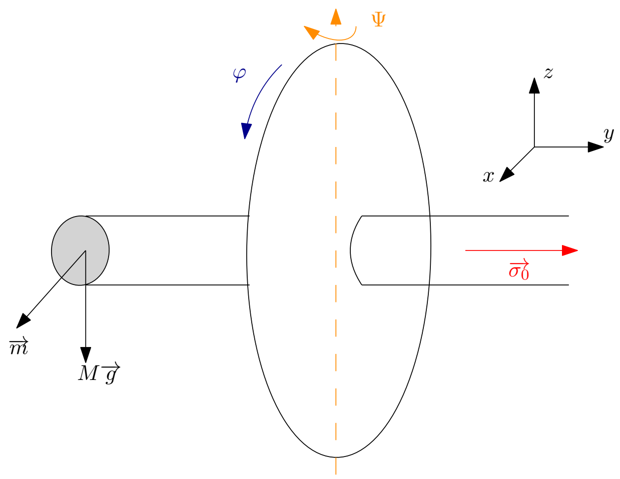
Si on tourne la roue horizontalement autour de $\hat{e}_z$, on applique un moment de la forme $m\hat{e}_z$. De plus, si ce moment est constant pendant Δt,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\sigma_O}(t+\Delta t) &= \overrightarrow{\sigma_O}(t) + m\Delta t\hat{e}_z \\ &= \sigma_O\hat{e}_y + m\Delta t\hat{e}_z\end{aligned}$$

L'axe de rotation de la roue tourne autour de (Ox) et la roue s'incline. De même, si on tourne la roue autour de (Ox), on, impose un moment de la forme $m\hat{e}_x$ et la roue tourne autour de l'axe $\hat{e}_z$.

b) **Ajout d'une masse**

Si on rajoute une masse à l'extrémité d'une poignée, elle créée un moment perpendiculaire à l'axe de la roue qui fait tourner la roue autour de e_z

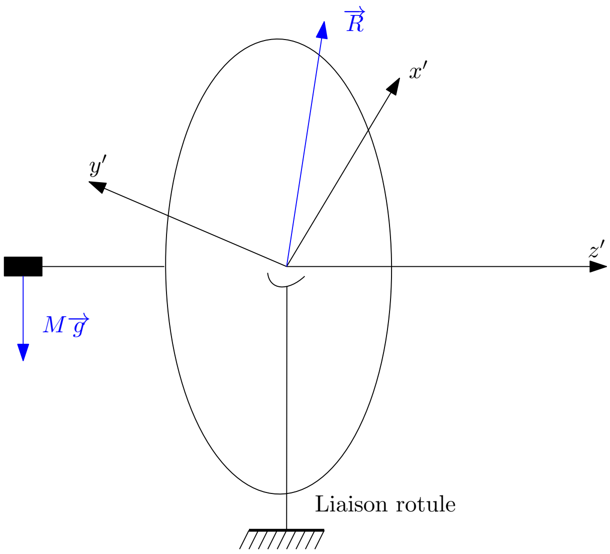


On retrouve, ici, un moment de précession à $\dot{\Psi} = \text{cte}$.

De plus, si $\dot{\varphi}$ est faible, on observe une rotation de *l'axe de rotation* autour d'un axe moyen : c'est un mouvement de **nutation**.

3.2 Fréquence de précession

On place une liaison rotule qui bloque la translation mais laisse les rotations libres.



La torseur de liaison s'écrit :

$$T_L = \left| \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|.$$

On utilise les angles d'Euler :

$$\overrightarrow{\Omega} = \dot{\Psi}\hat{e}_z + \dot{\theta}\hat{u} + \dot{\varphi}\hat{e}'_z$$

Comme la roue est symétrique, la base $\mathscr{R}_1(\hat{u}, \hat{\omega}, \hat{e}_z)$ est une base d'inertie avec un vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}_{\mathscr{R}_1/\mathscr{R}} = \dot{\Psi}\hat{e}_z + \dot{\theta}\hat{u} + \dot{\varphi}\hat{e}'_z$.

De plus $\hat{e}_z = \cos(\theta)\hat{e}'_z + \sin(\theta)\hat{\omega}$.

d'où,

$$\overrightarrow{\Omega}_{\mathscr{R}_1/\mathscr{R}} = \dot{\theta}\hat{u} + \dot{\Psi}\sin(\theta)\hat{\omega} + \big(\dot{\varphi} + \dot{\Psi}\cos(\theta)\big)\hat{e}'_z$$

Si on note $I_1 = I_2$ et I_3 les moments d'inertie en O respectivement par rapport à $\hat{u}$, $\hat{\omega}$, et à $\hat{e}'_z$, il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma_O} = [J_O]\cdot\Omega = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}\cdot\Omega \\ = I_1\dot{\theta}\hat{u} + I_1\dot{\Psi}\sin(\theta)\hat{\omega} + I_3\big(\dot{\varphi} + \dot{\Psi}\cos(\theta)\big)\hat{e}'_z \end{aligned}$$

Remarque : Formule de la dérivée en repère mobile
Si $\mathscr{R}_1$ tourne à la vitesse $\overrightarrow{\Omega}_{\mathscr{R}_1/\mathscr{R}}$ par rapport à $\mathscr{R}$, pour tout vecteur $\overrightarrow{V}$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathscr{R}_1/\mathscr{R}} \times \overrightarrow{V}$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_O}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}} &= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_O}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathscr{R}_1/\mathscr{R}} \times \overrightarrow{\sigma_O} \\ &= \overrightarrow{OA} \times M\overrightarrow{g} \end{aligned}$$

Dans le cas de **l'approximation gyroscopique**, on suppose que $\dot{\varphi} \gg \dot{\Psi}, \dot{\theta}$. Dans ce cas, $\overrightarrow{\sigma_O} \simeq I_3\dot{\varphi}\hat{e}'_z$.

Finalement, dans $\mathscr{R}_1$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_O}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3\ddot{\Psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\Psi}\sin(\theta) \\ \dot{\Psi}\cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3\dot{\Psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l\ddot{\Psi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg\sin(\theta) \\ -Mg\cos(\theta)\ddot{\Psi} \end{pmatrix}$$

Si le solide est de révolution avec $I_1 = I_2 \neq I_3$ alors $\dot{\omega}_3 = 0$ d'où $\omega_3 = \text{cte}$.
Si on note $\Delta I = I_3 - I_1$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 + \Delta I\omega_3\omega_2 &= 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 + \Delta I\omega_3\omega_1 &= 0 \end{cases}$$

On a donc un système linéaire couple de solution générale :

$$\omega_1 = \overline{\omega}\cos(\lambda t + \phi)$$
$$\omega_2 = \overline{\omega}\sin(\lambda t + \phi)$$

avec $\lambda = \frac{\Delta I}{I_1} I_3$.

4 Déformations élastiques simples

4.1 Contraintes et déformations

a) **Loi de Hooke**

Essai de traction simple : un barreau de longueur L est fixe à une extrémité et soumis à une force F à l'autre extrémité $\longrightarrow$ le barreau s'allonge de ΔL.

- $\hookrightarrow$ **Effet de taille** : pour un barreau de longueur 2L, l'allongement est $2\Delta L$.
- $\hookrightarrow$ La grandeur pertinente est *l'allongement relatif* (ou déformation) : $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ (sans dimension).
- $\hookrightarrow$ De même, ce n'est pas F qui compte mais la *contrainte* : $\sigma = \frac{F}{S}$.
- $\hookrightarrow$ loi de Hooke (1675) : $\boxed{\sigma = E\varepsilon}$ avec E *module d'Young* en Pa.

OdG du module d'Young :

- $\hookrightarrow$ Acier : 100 GPa.
- $\hookrightarrow$ Caoutchouc : 1 à 100 MPa.
- $\hookrightarrow$ Gélatine : 10 à 100 Pa.

On remarque qu'il y a une **énorme** variation de E parmi différents matériaux.

b) **Origine atomique de E**

On assimile un cristal à un réseau cubique simple. On suppose que les déformations sont suffisament faibles pour approximer le potentiel interatomique par une fonction quadratique.

$$U(a) = U_0 + \tfrac{1}{2}K(a - a_0)^2$$

$\Rightarrow$ ressorts de raideur K entre atomes
On applique une force f par atome, à l'équilibre :

$$f = K(a - a_0)$$
$$\epsilon = \tfrac{a - a_0}{a_0}$$

$$\sigma = \frac{f}{(a_0)^2} = \frac{K}{a_0}\frac{a-a_0}{a_0} = \frac{K}{a_0}\varepsilon$$

E est controlé par la raideur du potentiel interatomique et la distance entre atomes. Comme $a_0 \simeq 2$ à 3 Åpour tous les matériaux, plus l'énergie de cohésion est grande, plus E est grand.

c) **Exemple : déformation sans poids propre**

Une portion élémentaire dz à la hauteur z subit une contrainte due au poids sous elle.

$$\sigma = \frac{\rho S(L-z)g}{S} = \rho g(L-z)$$

$$\varepsilon = \frac{\rho g}{E}(L-z)$$

$$\Delta L = \int_0^L \varepsilon(z)\mathrm{d}z = \frac{\rho g L^2}{2E}$$

4.2 Autres coefficients élastiques

a) **Coefficient de Poisson**

METTRE UN SCHÉMA

Comme les solides sont au moins partiellement incompressibles, si un solide s'allonge dans une direction, il a tendance à se contracter dans une autre.

Pour une traction simple :

$$\frac{\Delta L_x}{L_x} = \frac{\Delta L_z}{L_z} = -\nu\frac{\Delta L_y}{L_y}$$

On appelle ν le *coefficient de Poisson.*

ν traduit l'incompressibilité du solide car

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L_x}{L_x} + \frac{\Delta L_y}{L_y} + \frac{\Delta L_z}{L_z} = (1-2\nu)\frac{\Delta L_y}{L_y} = (1-2\nu)\frac{\sigma}{E}$$

On montre que pour les matériaux isotropes $-1 \leqslant \nu \leqslant 0,5$.

Pour la majorité des matériaux $\nu \sim 0,3$, mais pour le caoutchouc $\nu \sim 0,5$ et pour le liège $\nu = 0$.

b) **Module de compressibilité**

Un cube est soumis à une pression P.

Remarque : la convention P >0 est une compression, alors que σ >0 est une traction

$$\frac{\Delta L_x}{L_x}\left(= \frac{\Delta L_x}{L_x} = \frac{\Delta L_x}{L_x}\right) = \underbrace{-\frac{P}{E}}_{\text{compression en x}} + \underbrace{2\nu\frac{P}{E}}_{\text{compressions en y et z}}$$

$$\text{d'où } \frac{\Delta L_x}{L_x} = -(1-2\nu)\frac{P}{E}$$

$$\text{et } \frac{\Delta V}{V} = \underbrace{\frac{3(1-2\nu)}{E}}_{\chi_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T}|_T} P$$

Avec χ_T : *coefficient de compressibilité isotherme*

Un solide est stable si $\frac{\partial^2 F}{\partial^2 V}$ >0 d'où $\frac{\partial}{\partial V}\frac{\partial F}{\partial V} = -\frac{\partial P}{\partial V}$ >0 donc χ_T >0 et $\nu \leqslant \frac{1}{2}$

En mécanique, on note $P = -B\frac{\Delta V}{V} \Rightarrow B = \frac{E}{3(1-2\nu}$

Avec B : *Module de compressibilité*

c) **Module de cisaillement**
METTRE UN SCHÉMA
Torseur de la liaison :

$$T_L = \left| \begin{pmatrix} -F_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_z \end{pmatrix} \right|.$$

La déformation : $\gamma = \frac{\Delta L_x}{L_x} = tan(\Theta) \sim \Theta$ (si petite déformation)
La contrainte : $\sigma = \frac{F_x}{L_x L_z} = G\gamma$, avec G : *Module de cisaillement*

De façon générale, si on applique une force $\overrightarrow{dF}$ à une surface $\overrightarrow{dS}$, on définit le tenseur des contraintes $[\sigma]$ tel que $\overrightarrow{dF} = [\sigma]\overrightarrow{dS}$. Alors $\boxed{\sigma_{ij} = \frac{dF_i}{dS_j}}$

Par exemple

— en traction simple on a $\vec{F} = F_y \overrightarrow{e_y}$ et $\vec{S} = S_y \overrightarrow{e_y}$ d'où $\sigma_{yy} = \frac{F_y}{S_y}$
— en cisaillement $\sigma_{xy} = \frac{F_x}{S_y}$

d) **Déformations thermiques**
La dilatation thermique induit une déformation isotrope.

$$\varepsilon_{th} = \alpha \Delta T$$

Avec α : *Coefficient de dilatation thermique*

sans liaison ou contact, cette expression n'induit pas de contrainte.

5 Déformation de flexion

SCHEMA

On considère une poutre, encastrée à une extrémité et soumise à une force verticale à l'autre extrémité. Quelle est la déflexion δ ?

5.1 Efforts tranchants et moments fléchissants

L'encastrement bloque toutes les translations et rotations.
Torseur de liaison :

$$T_L = \left| \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}_A \right|.$$

Torseur de la force extérieure :

$$T_{ext} = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B \right|.$$

On suppose $\vec{F}$ et δ suffisament petits pour calculer les torseurs dans l'état initial non déformé.
À l'équilibre, $T_L + T_{ext} = 0 \Rightarrow \boxed{R_x = R_z = 0 \text{ et } R_y = F}$.

Le moment total en A est $\overrightarrow{m_{A/L}}+\overrightarrow{m_{A/ext}}=0$ soit $\overrightarrow{m_{A/L}}+\underbrace{\overrightarrow{m_{B/ext}}}_{=0}+\vec{F}\wedge\overrightarrow{BA}=0$

$$\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Soit } \boxed{m_x = m_y = 0 \text{ et } m_z = FL}$$

On peut faire l'équilibre d'une section 1 soumise à gauche à T_L et à droite au torseur des forces de 2 vers 1.
Torseur des forces $2 \longrightarrow 1$:

$$T_{2\longrightarrow 1} = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ V(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_f(x) \end{pmatrix}_I \right| .$$

Avec $M_f(x)$: *Moment de cisaillement*

À l'équilibre, on a $V(x) = F$ et le moment en I selon z :

$M_f(x) + FL - Fx = 0$ soit $\boxed{M_f(x) = -F(L-x)}$

Si on isole une portion élémentaire
SCHEMA
On rajoute une force linéique (par exemple pour représenter le poids de la poutre) qdx.
À l'équilibre,

$$-V(x) + qdx + V(x+dx) = 0 \Rightarrow \boxed{q = -\frac{dV}{dx}}$$

et le moment total en I

$$-M_f(x) + M_f(x+dx) + V(x+dx)dx + qdx\tfrac{dx}{2} = 0$$

$$\tfrac{dM_f}{dx}dx + V(x)dx + \tfrac{dV(x)}{dx}(dx)^2 + \tfrac{q}{2}(dx)^2 = 0$$

$$\boxed{V = -\frac{dM_f}{dx}} \text{ d'où } \boxed{\frac{d^2M_f}{dx^2} = q}$$

donc on a une équation différencielle pour M_f à résoudre en tenant compte des conditions aux limites. Et si $q = 0$ alors M_f est forcément linéaire par morceaux.

5.2 Déformation de flexion

Approximation de Euler Bernoulli :

- Toute section droite reste droite (valable pour les petites déformations).
- La partie haute est une traction simple ($\varepsilon > 0$). La partie basse est une compression ($\varepsilon < 0$). La médiane est une ligne neutre où $\varepsilon = 0$.

On note $Y(x)$, l'équation de la ligne neutre qu'on prend comme référence des ordonnées.
Soit R le rayon de courbure total : $dx = Rd\Theta$
À la hauteur y, $dl = (R+y)d\theta$ d'où $\varepsilon(y) = \frac{dl-dx}{dx} = \frac{(R+y)d\Theta - Rd\Theta}{Rd\Theta} = \frac{y}{R}$

La contrainte est donc $\sigma(y) = E\frac{y}{R}$. Or la force exercée par la partie droite du solide sur la partie gauche au travers d'une surface élémentaire dS orientée sur $\overrightarrow{e_x}$ est $\vec{F} = \sigma dxdy\overrightarrow{e_x}$.
D'où un moment fléchissant :

$$\overrightarrow{m_0} = \int_S \overrightarrow{dOM} \wedge \overrightarrow{dF} = \int_S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E\frac{y}{R}dydz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E\frac{y}{R}dydz \\ -E\frac{y}{R}dydz \end{pmatrix}$$

D'où par symétrie, $\overrightarrow{m_0} = (-\frac{E}{R}\underbrace{\int_S y^2 dydz}_{=\mathrm{I}})\overrightarrow{e_z}$. Avec I moment quadratique de la section S par rapport à (Oz), caractérise l'effet de la géométrie de S sur la déformabilité en flexion.
Finalement $\boxed{M_f(x) = -\frac{EI}{R(x)}}$

5.3 Déflexion

On a $M_f(x) = -F(L-x) = -\frac{EI}{R(x)}$. Or $\frac{1}{R(x)} = -\frac{\frac{d^2Y}{dx^2}}{(1+(\frac{dY}{dx})^2)^{3/2}} \simeq \frac{d^2Y}{dx^2}$ pour les petites déformations.
D'où $Y(x) = -\frac{F}{EI}(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6})$. Et finalement $\boxed{\delta = \frac{FL^3}{3EI}}$

5.4 Flambage

flambage : instabilité d'une poutre en compression.