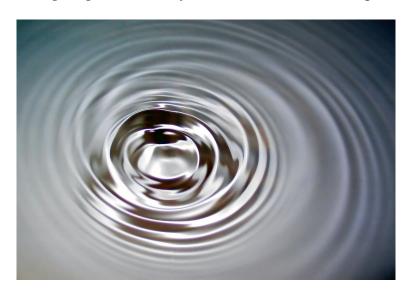


Propagation des ondes

Étienne Thibierge

etienne.thibierge@ens-lyon.fr
http://perso.ens-lyon.fr/etienne.thibierge



Ce document contient les notes du cours sur la propagation des ondes, donné à la prépa agreg de l'ENS Lyon en janvier et février 2015. Elles sont plus complètes que ce que j'ai présenté en classe : elles contiennent un peu plus d'exemples, de remarques et de détails de calcul.

Ces notes ont largement bénéficié des questions et des commentaires des étudiants des promotions 2014 et 2015. Je les remercie chaleureusement! Je remercie également Michel Fruchart et Pierre Lidon pour leur relecture attentive et rigoureuse, auxquels j'ajoute Jean-Baptiste Caussin et Arnaud Le Diffon pour toutes nos discussions ondulatoires.

Enfin, toutes les questions, remarques, commentaires, sont les bienvenus. N'hésitez pas.

Version du 6 février 2015.

Photo: http://fr.wikipedia.org/wiki/Onde

Préambule

Situation du cours

- Déroulement : quatre séances de deux heures, type cours magistral.
- ▷ Niveau : rappels niveau CPGE et compléments qui seraient accessibles en L3.
- ▶ **Prérequis :** de la mécanique des fluides, de l'électromagnétisme et de l'analyse de Fourier, mais seulement des notions assez simples que vous connaissez déjà bien.

* Attention! Il ne s'agit pas ici de faire les leçons à votre place, mais bien de faire le cours associé aux leçons. On se centre donc sur les notions physiques qui vous sont le moins familières, afin que vous les compreniez le plus finement possible, mais en traitant la mise en contexte et les illustrations de façon globalement insuffisante pour une bonne leçon d'agrégation.

Objectifs

J'ai défini le programme du cours à partir des annales des épreuves écrites et des rapports de jury des épreuves orales, ainsi que des questions que je me suis posées en passant l'agreg. Les objectifs du cours pourraient être définis de la façon suivante :

- 1. Comprendre que le couplage entre deux grandeurs permet la propagation;
- 2. Analyser la phénoménologie associée à différents types d'ondes : planes, sphériques, progressives, stationnaires, harmoniques et comprendre les liens possibles entre ces qualificatifs ;
- 3. Décrire une onde plane réelle et sa propagation sous la forme d'un paquet d'ondes harmoniques;
- 4. Comprendre l'influence de l'extension limitée du milieu de propagation : apparition d'ondes stationnaires ou sélection d'ondes guidées mais toujours associée à une discrétisation;
- 5. Comprendre les origines de la dispersion : réponse du milieu ou conditions aux limites transverses ;
- 6. Décrire la propagation d'un paquet d'ondes en présence de dispersion;
- 7. Comprendre les caractéristiques de la propagation guidée : confinement, guidage, discrétisation des modes propagatifs, structure mixte stationnaire et progressive des ondes guidées, dispersion de mode.

Travail complémentaire nécessaire

Par manque de temps, ce cours ne peut pas couvrir tous les aspects de la propagation des ondes. Les points insuffisamment traités qui me semblent les plus importants sont les suivants :

- ▷ l'obtention des équations de propagation par des modèles mésoscopiques : la corde vibrante et l'acoustique dans les fluides par l'équation d'Euler doivent absolument être retravaillées;
- ▷ la transformation d'une onde à une interface : cœfficients de réflexion et de transmission en amplitude, en énergie, adaptation d'impédance, rapport d'ondes stationnaires;
- ⊳ les aspects énergétiques : vecteur de Poynting, densité volumique d'énergie, vitesse de l'énergie, bilans d'énergie.

Insistons sur le fait que ce cours n'a pas vocation à remplacer complètement un cours de CPGE, que vous ne devez pas oublier de réviser par ailleurs. Vous pouvez bien sûr vous référer à des livres [1, 2] disponibles à la BU. J'attire aussi votre attention sur les cours mis en ligne gracieusement par des enseignants en CPGE, en particulier le cours de Matthieu Rigaut ¹ qui est à mon avis largement meilleur que bien des livres.

 $^{1. \ \}mathtt{http://www.matthieurigaut.net/}$

Pour vous entraîner

La physique des ondes est un thème récurrent aux écrits, et fait régulièrement l'objet d'une ou deux parties (onze fois depuis 2003). De nombreuses épreuves sont donc à votre disposition. Trois d'entre elles sont explicitement centrées sur la physique des ondes :

- ▷ Épreuve A 2004 : ce problème traite de la propagation d'ondes acoustiques et capillaires dans les fluides.

Les autres épreuves faisant partiellement appel à la physique des ondes sont les suivantes :

- ▶ Épreuve A 2003 : fibre optique, guide d'onde diélectrique ;
- ▶ Épreuve A 2005 : paquet d'onde, lien à l'optique ondulatoire ;
- ▶ Épreuve A 2007 : guide d'onde diélectrique, optique non-linéaire ;
- ⊳ Épreuve C 2007 : OEM dans les plasmas;
- ▶ Épreuve C 2011 : OEM longitudinales et de surface;
- ▶ Épreuve A 2012 : quantité de mouvement et moment cinétique d'une OEM;
- ▷ Épreuve C 2014 : diffraction de Bragg, description matricielle de la propagation dans un matériau multi-couche.

Bibliographie

Une bilbiographie exhaustive se trouve à la fin de ces notes. En attendant, voici la liste des principaux livres m'ayant servi à préparer le cours, plus ou moins classés par ordre d'importance.

- [1] H-Prépa *Ondes*, J.M. Brébec. C'est le plus complet de tous les livres de CPGE, mais ce n'est en revanche pas un modèle de pédagogie : à utiliser si vous connaissez déjà la physique que vous voulez montrer. Il couvre plus ou moins tout le spectre du cours, à l'exception des notions les plus avancées.
- [2] Dunod *Tout en un PC-PC**, M.N. Sanz. C'est à mon sens le meilleur livre de CPGE disponible, clair et rigoureux tant sur le plan des calculs que de la physique. Il rentre moins dans les détails que le H-Prépa, mais couvre lui aussi plus ou moins tout le spectre du cours.
- [3] La physique par la pratique, B. Portelli. Un très bon livre pour préparer l'agrégation. C'est le seul de la liste qui traite de façon exhaustive la construction des paquets d'onde et leur propagation en présence de dispersion.
- [4] Optique physique, R. Taillet. Ce livre explique particulièrement bien la physique, mais contient malheureusement beaucoup de coquilles dans les calculs. L'approche qualitative du guidage en est extraite.
- [5] Ondes électromagnétiques dans le vide et les conducteurs, C. Garing. Comme tous les livres de l'auteur, c'est une mine d'exemples et d'illustrations. Il complète utilement l'approche du guide d'onde, et traite de façon exhaustive les modes de propagation du câble coaxial.
- [6] Mathématiques pour la physique et les physiciens, W. Appel. La bible du physicien qui se pose des questions sur les objets mathématiques qu'il utilise. À consulter sans modération!

Toutefois, certains paragraphes (en particulier dans le chapitre sur le guidage) ne sont pas directement issus d'une référence bibliographique, mais résultent plutôt d'une synthèse personnelle. Charge à vous de vous les approprier si vous les trouvez pertinentes, ou d'approfondir une autre approche si vous préférez avoir une bibliographie solide.

Table des matières

1	Pro	Propagation libre et non dispersive		
	1.1	Qu'est 1.1.1 1.1.2	-ce qu'une onde?	7 7 10
	1.2	Différe 1.2.1 1.2.2	entes familles d'ondes	12
	1.3	Relation 1.3.1 1.3.2 1.3.3	Cas de deux grandeurs couplées scalaires	14 15
	1.4	Paquet 1.4.1 1.4.2 1.4.3	ts d'ondes	16 17
	1.5	Ondes 1.5.1 1.5.2 1.5.3 1.5.4	stationnaires	22 23 26
2	Propagation dans un milieu dispersif; atténuation			
	2.1	De not 2.1.1 2.1.2 2.1.3	uvelles équations de propagation	29 32
	2.2		gation d'une onde plane pseudo-progressive harmonique	33 33 35
	2.3	Propag 2.3.1 2.3.2 2.3.3 2.3.4	gation d'un paquet d'onde en présence de dispersion	40 40 45
3	Guidage			47
	3.1	Phéno: 3.1.1 3.1.2 3.1.3 3.1.4	ménologie	48 50

Chapitre 1

Propagation libre et non dispersive

Ce premier chapitre est en bonne partie constitué de rappels de CPGE. Au cours de ce chapitre, nous allons dégager les conditions sous lesquelles un phénomène est ondulatoire, en insistant sur la notion de grandeurs couplées. Nous rappellerons également la phénoménologie associée à diverses solutions de l'équation de d'Alembert. Enfin, nous passerons un temps important à construire précisément la notion centrale de paquet d'onde.

1.1 Qu'est-ce qu'une onde?

1.1.1 Rappel par l'exemple

Commençons par rappeler trois exemples de situations physiques donnant lieu à la propagation d'ondes.

Exemple des ondes « électrocinétiques » dans un câble coaxial décrit par un modèle à constantes réparties

Un câble coaxial se compose comme son nom l'indique de deux conducteurs cylindriques de même axe, l'âme et la gaine, séparés par un isolant, comme représenté figure 1.1. Comme nous le montrerons §3.4 lors du chapitre sur le guidage, des ondes électromagnétiques se propagent le long du câble. Parmi ces ondes, certaines (le mode TEM, que nous définirons) peuvent être décrites par un modèle de type électrocinétique. Dans ce cadre, le câble vérifie localement des équations identiques à celles obtenues dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires de l'électromagnétisme, ce qui permet une étude électrocinétique.

Remarque: Insistons sur le fait que le modèle à constantes réparties décrit uniquement le mode TEM.

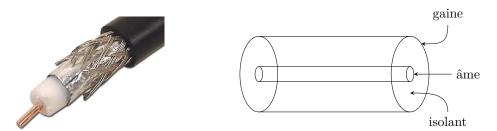


Fig. 1.1 – Câble coaxial. Un câble coaxial se compose de deux conducteurs coaxiaux, l'âme et la gaine, séparés par un isolant. Photo: http://news.techgenie.com/.

Comme représenté figure 1.2, une portion mésoscopique de câble de longueur δx se modélise par un circuit LC constitué

- \triangleright d'une bobine, d'inductance $\Lambda \delta x$, qui modélise les phénomènes d'induction ayant lieu entre les deux conducteurs, parcourus par des courants variant dans le temps;
- \triangleright d'un condensateur, de capacité $\Gamma \delta x$, qui modélise les phénomènes capacitifs ayant lieu entre les deux conducteurs, chargés, se faisant face.

Appliquons les lois de Kirchoff à la portion mésoscopique considérée. La loi des mailles s'écrit

$$u(x + \delta x, t) + \Lambda \, \delta x \, \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) - u(x, t) = 0, \qquad (1.1)$$

d'où dans la limite $\delta x \to 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x,t).$$
(1.2)

Fig. 1.2 – Modélisation mésoscopique d'un câble coaxial. Une portion mésoscopique de câble de longueur δx est modélisé par un circuit LC, d'inductance $\Lambda \delta x$ et de capacité $\Gamma \delta x$. La gaine est souvent reliée à la masse, mais ce n'est pas obligatoire.

La loi des nœuds s'écrit quant à elle

$$i(x,t) = i(x+\delta x,t) + \Gamma \delta x \frac{\partial u}{\partial t}(x+\delta x,t), \qquad (1.3)$$

ce qui devient dans la limite $\delta x \to 0$

$$\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x,t).$$
(1.4)

On trouve alors deux équations aux dérivées partielles, linéaires mais couplées. Le découplage se fait en dérivant l'une des deux équations par rapport à la position, l'autre par rapport au temps, et à l'aide du lemme de Schwartz. On obtient alors la même équation de d'Alembert pour chacune des grandeurs couplées [2, §13.1] :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}}.$$
(1.5)

Application numérique : Pour un câble coaxial de TP, les valeurs typiques sont $\Gamma = 100 \,\mathrm{pF} \cdot \mathrm{m}^{-1}$, $\Lambda = 0.15 \,\mathrm{\mu H} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ et $c = 3 \times 10^8 \,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Complément : Exemple des ondes électromagnétiques dans un milieu vide de charge et de courant

Les équations couplées sont directement les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \varepsilon_0 \,\mu_0 \,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$
(1.6)

Remarque : Même si elles ne couplent pas directement les champs, il ne faut pas oublier les deux équations faisant intervenir la divergence.

Comme nous le comprendrons au paragraphe suivant, les « bonnes » grandeurs couplées des ondes électromagnétiques sont le champ électrique \overrightarrow{E} et l'excitation magnétique \overrightarrow{H} , égale à \overrightarrow{B}/μ_0 dans le vide. Les équations de Maxwell s'écrivent en fonction de ces deux champs

$$\begin{cases}
\operatorname{div} \vec{E} = 0 \\
\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\
\operatorname{div} \vec{H} = 0 \\
\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{cases}$$
(1.7)

Le découplage se fait en calculant le rotationnel des équations en rotationnel, et conduit à l'équation de d'Alembert tridimensionnelle pour \overrightarrow{E} comme pour \overrightarrow{H} ,

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \, \mu_0}}.$$
 (1.8)

Complément : Exemple des ondes sonores dans un solide élastique

Intéressons-nous aux ondes sonores se propageant dans un barreau solide, qui sont des ondes de déformation longitudinale de celui-ci. Supposons que ses propriétés d'élasticité sont décrites par la loi de Hooke [7, \S III.A]. Celleci est une approximation linéaire de la loi de comportement du solide réel, valable tant que les déformations sont petites. Si on applique une force F à une extrémité du solide de section S, l'allongement relatif du solide est donné par

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{1}{E} \frac{F}{S},\tag{1.9}$$

où E est un coefficient phénoménologique, appelé $module\ d$ 'Young du solide. Pour les matériaux usuels, il est de l'ordre de $10^{11}-10^{12}$ Pa.

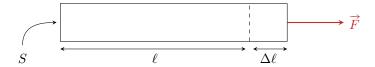


Fig. 1.3 – Loi de Hooke. Le barreau solide de section S a une longueur au repos ℓ . Une force F est appliquée à une de ses extrémités, l'allongeant d'une quantité $\Delta \ell$.

Remarque: L'allongement est également associé à une contraction latérale du solide [7, §III.A]. En notant $d \sim \sqrt{S}$ la dimension latérale typique du solide, la contraction latérale relative est donnée par

$$\frac{\Delta d}{d} = -\sigma \frac{\Delta \ell}{\ell} \,. \tag{1.10}$$

 σ est également un coefficient phénoménologique, appelé coefficient de Poisson du solide. Pour les matériaux usuels, il est de l'ordre de 0.3. Dans la suite, ces effets de contraction latérale sont négligés et seule la déformation longitudinale est envisagée.

Cherchons l'équation aux dérivées partielles à laquelle obéit le champ des déformations longitudinales $\xi(x,t)$. Pour ce faire, considérons une tranche mésoscopique de solide, de section S et de longueur au repos δx .

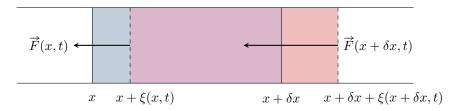


Fig. 1.4 – Élément mésoscopique de solide. L'élément mésoscopique est situé au repos entre les abscisses x et $x+\delta x$, et sous l'effet des efforts externes est déplacé entre $x+\xi(x,t)$ et $x+\delta x+\xi(x+\delta x,t)$

L'allongement de l'élément solide vaut

$$\Delta \ell = \{ [x + \delta x + \xi(x + \delta x, t)] - [x + \xi(x, t)] \} - \delta x = \xi(x + \delta x, t) - \xi(x, t).$$
 (1.11)

Connaissant l'allongement de l'élément solide, cherchons maintenant la force $\vec{F}(x,t) \stackrel{\text{def.}}{=} \vec{F}_{d\to g}(x,t)$ exercée par la partie « droite » du solide sur la partie « gauche » à l'abscisse x à l'instant t. À l'échelle mésoscopique, le solide est toujours un milieu continu et obéit donc encore à la loi de Hooke. Ainsi,

$$\vec{F}(x,t) = E S \frac{\xi(x+\delta x,t) - \xi(x,t)}{\delta x} \vec{e}_x.$$
 (1.12)

Le sens du vecteur force s'obtient sur la base d'arguments physiques : si le solide est allongé, il cherche à se contracter pour retrouver sa longueur au repos. En passant à la limite $\delta x \to 0$,

$$\overrightarrow{F}(x,t) = E S \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t) \overrightarrow{e}_x.$$
 (1.13)

Appliquons désormais le principe fondamental de la dynamique à l'élément mésoscopique. En notant ρ la masse volumique du solide et x_G , $x \le x_G \le x + \delta x$, la position (a priori inconnue) de son centre de masse, ce dernier s'écrit

$$\rho S \delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x_G, t) \overrightarrow{e}_x = \overrightarrow{F}_{g \to d}(x, t) + \overrightarrow{F}_{d \to g}(x + \delta x, t).$$
(1.14)

En vertu du principe des actions réciproques et en notant

$$F \stackrel{\text{def.}}{=} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{e}_x = \overrightarrow{F}_{d \to g} \cdot \overrightarrow{e}_x, \tag{1.15}$$

on obtient

$$\rho S \delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x_G, t) = -F(x, t) + F(x + \delta x, t), \qquad (1.16)$$

ce qui donne dans la limite $\delta x \to 0$

$$\rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,t). \tag{1.17}$$

D'après (1.13), cette équation devient

$$\rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E S \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \qquad (1.18)$$

soit

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$
 (1.19)

Ainsi, la propagation des déformations dans un solide élastique est un phénomène ondulatoire, décrit par l'équation de d'Alembert de célérité $c = \sqrt{E/\rho}$.

Application numérique : Pour le fer, $\rho = 7.9 \times 10^3 \,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et $E = 2.0 \times 10^{11} \,\mathrm{Pa}$, ce qui donne comme vitesse du son $c = 5.0 \times 10^3 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Pour faire apparaître de façon transparente des équations couplées, écrivons un peu différemment les deux équations que sont la loi de force (1.13) et le PFD (1.17).

$$\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{F}{S} \right) \\
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F}{S} \right) = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)
\end{cases} (1.20)$$

La contrainte F/S et la vitesse de déformation $\partial \xi/\partial t$ sont donc les grandeurs ondulatoires couplées du problème. Remarquons la symétrie entre ces deux équations : les variations dans le temps de la contrainte F/S entraînent les variations dans l'espace de la dérivée temporelle de la déformation $\partial \xi/\partial t$ et réciproquement. Remarquons aussi que dériver la loi de force par rapport au temps conduit à l'équation de d'Alembert pour la contrainte, avec la même célérité.

Remarque: Il est essentiel que le barreau solide ait une surface latérale S finie, sans quoi les efforts latéraux ne peuvent plus être négligés et modifient drastiquement l'expression de la célérité $[7, \S V.D]$, faisant notamment intervenir le coefficient de Poisson. Ceci est relié au fait que la « bonne » grandeur couplée est la contrainte F/S et non la force F.

1.1.2 Tentative de caractérisation d'un phénomène ondulatoire

Leur diversité rend la définition générale d'une onde délicate à donner ¹. On peut toutefois tenter de dégager des caractéristiques communes à tous types d'ondes.

Une **onde** correspond à la propagation d'une perturbation à travers un milieu. Cette perturbation est générée par une source, qui apporte de l'énergie au milieu.

La propagation d'une onde dans un milieu n'entraîne jamais de transport macroscopique de matière ². Cela ne veut cependant pas dire qu'il est impossible d'avoir simultanément une onde et du transport : on peut penser par exemple à des ondes acoustiques se propageant dans un fluide en écoulement. Dans ce cas, l'onde n'est pas à l'origine du phénomène de transport.

Dans les trois exemples précédents, on a mis en évidence l'importance du couplage entre deux champs, ce qui est très général :

Pour qu'il y ait propagation, il faut qu'il existe un couplage entre deux champs, appelés **grandeurs couplées**. Le couplage se traduit par des échanges d'énergie entre les grandeurs couplées.

^{1.} Une onde est parfois définie comme un champ dont les dérivées spatiales et temporelles sont couplées par une équation aux dérivées partielles ... ce qui englobe à peu près toute la physique des milieux continus, et me semble être une définition beaucoup trop large.

^{2.} Le cas des ondes de matière de la mécanique quantique ne rentre bien sûr pas dans ce cadre ... mais il s'agit quand même d'ondes particulièrement particulières!

En pratique, les variations temporelles d'une grandeur couplée entraînent les variations spatiales de l'autre, et réciproquement. Formellement, les champs obéissent à des équations couplées, qui sont en général symétriques. Pour identifier les « bonnes » grandeurs couplées, il faut se concentrer sur les aspects énergétiques.

- ▷ Le carré des grandeurs couplées est associé à un stockage d'énergie. Dans les exemples précédents,
 - $\rightarrow \frac{1}{2}\Gamma u^2$ est une énergie électrique linéique, $\frac{1}{2}\Lambda i^2$ une énergie magnétique linéique;
 - $\Rightarrow \frac{1}{2}\rho \left(\partial \xi/\partial t\right)^2$ est une énergie cinétique volumique, $\frac{1}{2E}(F/S)^2$ une énergie potentielle d'élasticité volumique; $\Rightarrow \frac{1}{2}\mu_0 \overrightarrow{H}^2$ est une énergie magnétique volumique, $\frac{1}{2}\varepsilon_0 \overrightarrow{E}^2$ une énergie électrique volumique.

Remarquons qu'on voit ici apparaître les constantes de couplage.

- ▷ Leur produit est homogène à une puissance (éventuellement une puissance surfacique). Dans les exemples précé-

 - \Rightarrow $\vec{E} \wedge \vec{H}$ est le vecteur de Poynting de l'électromagnétisme, qui n'est autre qu'une puissance surfacique.

Le découplage des équations couplées permet d'obtenir l'équation de propagation. Pour que les échanges d'énergie entre grandeurs couplées à l'origine de la propagation puissent se faire,

L'équation de propagation est la même pour les deux grandeurs couplées.

Insistons sur le fait qu'en dehors du couplage entre deux champs, qui est la caractéristique fondamentale des phénomènes ondulatoires, ces derniers recouvrent par ailleurs des situations très diverses.

- ▶ La propagation peut être à une, deux ou trois dimensions, dans un milieu lui-même à une, deux ou trois dimensions;
- ▶ La propagation peut ou non entraîner un transport macroscopique d'énergie;
- ▶ Les champs peuvent être scalaires ou vectoriels, voire même tensoriels (pour les ondes gravitationnelles);
- ▶ La perturbation peut être orientée différemment par rapport à la direction de propagation. On distingue entre autres
 - → les **ondes longitudinales**, où la perturbation est colinéaire à la direction de propagation (c'est le cas des ondes acoustiques);
 - → les **ondes transverses**, où la perturbation est orthogonale à la direction de propagation (c'est le cas des ondes électromagnétiques dans le vide illimité);
 - → mais il existe aussi des cas plus complexes, comme nous le verrons au chapitre 3 sur le guidage.

Dans les exemples précédents, l'équation de propagation est l'équation de d'Alembert.

L'équation de d'Alembert est une équation de la forme

$$\Delta \vec{\xi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{0} . \tag{1.21}$$

où c est la vitesse de propagation, ou **célérité**, des ondes.

Le champ $\vec{\xi}$ peut être vectoriel ou scalaire, et le laplacien peut se simplifier en fonction des symétries du problème. La propriété sans doute la plus importante de l'équation de d'Alembert est sa linéarité :

L'équation de d'Alembert est une équation linéaire.

Cela permet d'appliquer le principe de superposition des solutions.

Notons que l'équation de d'Alembert ne décrit pas tous les phénomènes de propagation, comme nous le verrons lors du chapitre 2 sur la dispersion. En particulier, elle est invariante par renversement du temps, ce qui est loin d'être systématique, en particulier en présence d'absorption. En revanche, la plupart des équations de propagation qu'on peut rencontrer en passant l'agreg sont linéaires, mais ce n'est pas systématique.

1.2 Différentes familles d'ondes

L'équation de d'Alembert peut se résoudre en toute généralité à l'aide d'une fonction de Green [8, §3.1], mais sa forme n'est ni simple ni aisément exploitable. En revanche, dans certains cas de bonne géométrie, il existe une écriture simple et générale des solutions.

Commençons par rappeler la notion utile de surface d'onde, qui permet de classifier simplement différents types d'ondes:

> Une surface d'onde d'une onde est une surface continue de l'espace dont tous les points sont dans le même état vibratoire, c'est-à-dire que le champ ξ y prend la même valeur.

1.2.1 **Ondes planes**

Une onde est dite **plane** si ses surfaces d'onde sont des plans parallèles. Ces plans sont appelés plans d'onde.

À ces plans sont associés leur vecteur normal \vec{n} qui définit la direction de propagation. Ainsi, formellement, la dépendance spatiale du champ associé à une onde plane ne dépend que de $\vec{r} \cdot \vec{n}$, qui peut se réécrire comme une unique coordonnée cartésienne dans un repère bien choisi, et ce quelle que soit la dimension de l'espace dans lequel l'onde se propage.

Une onde plane est une onde à une dimension spatiale cartésienne.

Par extension, toute onde ne dépendant que d'une coordonnée cartésienne, y compris dans un milieu 1d ou 2d, est appelée onde plane. C'est le cas par exemple des ondes le long d'une corde vibrante. De façon générale, l'équation de d'Alembert pour une onde plane $\xi(x,t)$ se réduit à

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0. \tag{1.22}$$

Cherchons des solutions de cette équation se propageant avec la célérité c, c'est-à-dire telles que

$$\xi(x',t') = \xi(x,t) \qquad \text{si et seulement si} \qquad (x'-x) = \pm c(t'-t). \tag{1.23}$$

Le signe est laissé libre pour permettre des solutions se propageant dans les deux sens, vers les x croissants ou décroissants. Cette condition se reformule sous la forme

$$x' \pm ct' = x \pm ct. \tag{1.24}$$

On en déduit donc que les variables u = x - ct et v = x + ct sont des variables privilégiées du problème.

Une onde plane ne dépendant que de la variable x-ct ou de la variable x+ct est dite **progressive**. Une telle onde se propage à la célérité c, dans le sens des x croissants si elle dépend de x-ctet dans le sens des x décroissants si elle dépend de x + ct.

Remarque: Bien entendu, toutes les ondes planes ne sont pas des ondes planes progressives, et leurs dépendances spatiales et temporelles sont couplées de façon plus complexe.

Réécrivons l'équation d'onde (1.22) en termes des variables privilégiées u = x - ct et v = x + ct. Cela donnera accès facilement à la solution générale de cette équation.

> Remarque: Pour que cette réécriture soit valide, il est important de noter que ces deux variables sont indépendantes, on passe de la représentation en (x,t) à celle en (u,v) de façon univoque dans les deux sens. C'est donc un « bon » changement de variables.

Considérons donc

$$\xi = \xi(u, v) = \xi(u(x, t), v(x, t)), \tag{1.25}$$

et exprimons les dérivées partielles par rapport à x et t intervenant dans l'équation de d'Alembert en termes des dérivées partielles par rapport à u et v:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}\bigg|_{T} = \frac{\partial \xi}{\partial u}\bigg|_{U} \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{T} + \frac{\partial \xi}{\partial v}\bigg|_{U} \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{T} = \frac{\partial \xi}{\partial u}\bigg|_{U} \times (-c) + \frac{\partial \xi}{\partial v}\bigg|_{U} \times c, \tag{1.26}$$

puis

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right) + c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \right) \tag{1.27}$$

$$= -c\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial^2 \xi}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial t}$$
(1.28)

$$= -c\frac{\partial^{2}\xi}{\partial u^{2}}\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial^{2}\xi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial^{2}\xi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v} + c\frac{\partial^{2}\xi}{\partial v^{2}}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^{2}\xi}{\partial t^{2}} = c^{2}\left(\frac{\partial^{2}\xi}{\partial u^{2}} - 2\frac{\partial^{2}\xi}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial v} + \frac{\partial^{2}\xi}{\partial v^{2}}\right).$$

$$(1.28)$$

Le même calcul pour le calcul de la dérivée spatiale conduit à

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}.$$
 (1.30)

Ainsi, l'équation de d'Alembert se réécrit en fonction de u et v sous la forme

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \, \partial v} = 0. \tag{1.31}$$

Intégrons alors successivement par rapport aux deux variables. L'intégration sur u (à v fixé) donne

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = G(v) \,, \tag{1.32}$$

où G est une fonction de v seulement, c'est-à-dire « une constante par rapport à u ». L'intégration sur v (à u fixé) donne ensuite

$$\xi(u, v) = f(u) + g(v),$$
 (1.33)

où G(v) = g'(v), et où f est une fonction de u seulement. En conclusion,

Toute onde plane, solution de l'équation de d'Alembert à une dimension, peut s'écrire de façon générale sous la forme d'une superposition de deux ondes planes progressives :

$$\xi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) = \varphi\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\left(t + \frac{x}{c}\right). \tag{1.34}$$

f et φ sont des ondes planes progressives se propageant à la célérité c dans le sens des x croissants, alors que g et ψ sont des ondes planes progressives se propageant à la célérité c dans le sens des x décroissants.

Mathématiquement, f, g, φ et ψ sont des fonctions quelconques deux fois dérivables.

Remarque : La décomposition en f+g est pratique pour travailler en fonction de x à t fixé, alors que la décomposition en $\varphi+\psi$ est plus appropriée pour travailler en fonction de t à x donné.

1.2.2 Ondes sphériques

Une onde est dite **sphérique** si ses surfaces d'onde sont des sphères concentriques. Le centre des sphères est appelé **foyer** de l'onde sphérique.

Formellement, le champ associé à une onde sphérique ne dépend spatialement que de $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{e}_r = r$, qui n'est autre que le rayon des coordonnées sphériques.

Remarque: Parler de « direction de propagation » d'une onde sphérique n'a aucun sens. Cela ne pourrait en avoir que localement ... ce qui revient à assimiler l'onde sphérique à une onde plane. Cette approximation locale en onde quasi-plane est très utilisée dans le cadre de l'optique ondulatoire, voir le cours d'optique d'Arnaud Le Diffon.

Dans le cas d'une onde sphérique, $\xi = \xi(r,t)$ et le la placien tridimensionnel s'écrit de façon simple. Pour une onde sphérique, l'équation de d'Alembert s'écrit

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,\xi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0\,, (1.35)$$

qui n'est autre que l'équation de d'Alembert des ondes planes pour la variable $r \xi$. Les résultats du paragraphe précédent mènent alors directement à la conclusion :

Toute onde sphérique, solution de l'équation de d'Alembert à symétrie sphérique, peut s'écrire de façon générale sous la forme d'une superposition de deux ondes sphériques progressives :

$$\xi(r,t) = \frac{1}{r} \left[f(r-ct) + g(r+ct) \right] = \frac{1}{r} \left[\varphi\left(t - \frac{r}{c}\right) + \psi\left(t + \frac{r}{c}\right) \right]. \tag{1.36}$$

f et φ sont des ondes sphériques divergentes, alors que g et ψ sont des ondes sphériques convergentes.

Remarque : Le préfacteur 1/r est associé à la conservation de l'énergie au cours de la propagation, puisque l'onde sphérique s'étale dans l'espace.

Dans la suite de ce chapitre, le cas des seules ondes planes sera considéré, et nous illustrerons plusieurs de leurs propriétés. Nous verrons que par linéarité les seules ondes planes suffisent en fait à décrire une onde quelconque.

1.3 Relation de structure et impédance propagative

Nous avons présenté quelques solutions de l'équation d'onde pour un seul champ §1.2. Néanmoins, l'étude d'exemples a montré l'importance du couplage entre deux champs pour qu'un phénomène ondulatoire puisse exister, et on s'attend à ce que les deux grandeurs couplées soient reliées l'une à l'autre. Cherchons donc ladite relation entre les grandeurs couplées.

On appelle relation de structure d'une onde l'équation qui relie les grandeurs couplées l'une à l'autre.

Remarque: Les équations couplées telles qu'elles ont été introduites via les exemples ne sont pas la relation de structure, qui implique directement les grandeurs couplées et non pas leurs dérivées. En revanche, ce sont bien sûr les équations couplées qui permettent d'obtenir la relation de structure.

1.3.1 Cas de deux grandeurs couplées scalaires

Commençons par le cas le plus simple où les deux grandeurs couplées sont des champs scalaires. Considérons de nouveau un câble coaxial comme présenté p. 7, dans lequel est envoyé une OPP en courant,

$$i(x,t) = f(x-ct). (1.37)$$

Cherchons la tension u(x,t) pour une telle onde. Injectons cette solution dans l'équation de couplage issue de la loi des mailles :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} = \Lambda c f'(x - ct). \tag{1.38}$$

L'intégration par rapport à l'espace donne

$$u(x,t) = \Lambda c f(x - ct) + \phi(t), \qquad (1.39)$$

où $\phi(t)$ est une fonction du temps seulement. Le fait que u et f soient des solutions de l'équation de d'Alembert impose à $\phi(t)$ d'en être solution également. Comme ϕ ne dépend que du temps, l'équation de d'Alembert s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2 \phi}{\mathrm{d}t^2} = 0. \tag{1.40}$$

Par conséquent, $\phi(t)$ est une fonction affine. Si la pente est non-nulle, cela conduit à une divergence non physique en $t \to \pm \infty$. La seule possibilité est donc que ϕ soit une fonction constante, ne décrivant pas une onde. On ne la prendra donc plus en compte par la suite.

Remarque: La constante en question n'est pas forcément nulle pour autant : dans le cas des ondes acoustiques dans les fluides, le champ de surpression $p_1(x,t)$ s'ajoute à la pression p_0 préexistant dans le fluide au repos.

Ainsi,

$$u(x,t) = Z i(x,t) \quad \text{avec} \quad Z = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}.$$
(1.41)

C'est la relation de structure de l'OPP se déplaçant dans le sens des x croissants dans le câble coaxial. Si on avait considéré une OPP se déplaçant dans le sens des x décroissants, i(x,t) = g(x+ct) le même calcul aurait conduit à

$$u(x,t) = -Zi(x,t). (1.42)$$

La relation de structure d'une onde plane progressive scalaire est une relation de proportionnalité. Le coefficient de proportionnalité définit l'**impédance propagative** du milieu. L'impédance propagative ne dépend que du milieu de propagation.

Remarque 1 : Dans le cas d'une propagation dispersive, l'impédance propagative peut aussi dépendre de la fréquence, mais seulement au travers de la fonction de réponse du milieu.

Remarque 2: Bien qu'elles s'expriment toutes les deux en ohms, il ne faut pas confondre l'impédance propagative et l'impédance dissipative. En particulier, l'impédance propagative est une grandeur intensive, indépendante de la « taille » du milieu de propagation, alors qu'une impédance dissipative est extensive. Ces aspects sont détaillés dans le cours d'Adrien Licari qui leur est dédié.

Application numérique : Pour le câble coaxial considéré précédemment, on trouve $Z=50\,\Omega$, ce qui ne correspond heureusement pas à la résistance du câble. Cette valeur est en revanche intimement reliée à celle de l'impédance de sortie d'un GBF, qui vaut aussi $50\,\Omega$.

Dans le cas général,

$$\begin{cases} i(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \\ u(x,t) = Z[f(x-ct) - g(x+ct)] \end{cases}$$
 (1.43)

Les grandeurs couplées ne sont donc proportionnelles qu'en régime d'OPP, mais même dans le cas général d'une onde plane le seul paramètre intervenant dans la relation de structure est l'impédance propagative. Ainsi,

La célérité et l'impédance d'un milieu caractérisent intégralement le couplage entre grandeurs couplées.

En effet, ce dernier est donné par deux équations aux dérivées partielles, les équations couplées, faisant intervenir deux constantes de couplage. Si les équations couplées sont écrites sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} = \text{cte} \times \frac{\partial}{\partial x} \,, \tag{1.44}$$

le produit des constantes de couplage donne la célérité des ondes dans le milieu et leur quotient donne l'impédance propagative. Reste à savoir dans quel sens prendre le quotient. Le choix se fait sur la base « d'arguments » intuitifs, et l'impédance est définie en général comme le rapport de « la cause » sur « l'effet », ou encore de « la force » sur « le flux ».

1.3.2 Cas où une grandeur couplée au moins est vectorielle

Dans le cas où l'un des champs est vectoriel, la relation de structure est vectorielle également. Outre l'impédance propagative, elle peut faire intervenir le vecteur unitaire \vec{n} donnant la direction de propagation.

Exemple: Onde acoustique dans un fluide

Les grandeurs couplées sont la surpression acoustique $p_1(x,t)$, qui est « la cause », et la vitesse acoustique $\vec{v}_1(x,t)$, qui est « l'effet ». Ces deux grandeurs sont couplées par la masse volumique du fluide au repos, ρ_0 , et par le coefficient de compressibilité isentropique du fluide au repos,

$$\chi_S = \frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_S \tag{1.45}$$

La célérité des ondes acoustiques vaut

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}},\tag{1.46}$$

et la relation de structure d'une OPP s'écrit

$$p_1 \vec{n} = Z \vec{v}_1, \tag{1.47}$$

où l'impédance Z est donnée par

$$Z = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}} \tag{1.48}$$

Remarque: Faire intervenir explicitement le vecteur direction de propagation permet d'écrire la même relation de structure pour une OPP allant dans le sens croissant ou décroissant. En d'autres termes, cela permet de déterminer laquelle des deux relations (1.41) et (1.42) définit +Z et laquelle définit -Z.

Exemple : Onde électromagnétique dans le vide illimité

On analyse usuellement les ondes électromagnétiques en stipulant que \vec{E} en est la cause et \vec{B} , ou plutôt \vec{H} , la conséquence.

Remarque: On peut noter que c'est cohérent avec l'analyse du modèle électrocinétique du câble coaxial, où la tension est la cause.

On montre à partir des équations de Maxwell que les champs d'une OPP vérifient

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \, \vec{n} \wedge \vec{E} \tag{1.49}$$

Pour faire apparaître l'impédance propagative, il faut écrire différemment cette relation en la multipliant vectoriellement par \vec{n} :

$$\left(\vec{n} \wedge \vec{E}\right) \wedge \vec{n} = c \vec{B} \wedge \vec{n} \tag{1.50}$$

$$\vec{E} - (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{n} = \mu_0 c \vec{H} \wedge \vec{n}$$
(1.51)

$$\vec{E} - (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{n} = \mu_0 c \vec{H} \wedge \vec{n}$$

$$\vec{E} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \vec{H} \wedge \vec{n}$$

$$(1.51)$$

où le passage à la dernière égalité utilise le caractère transverse des ondes électromagnétiques dans le vide illimité. L'impédance électromagnétique du vide est alors définie par

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \,\Omega \,. \tag{1.53}$$

1.3.3 Interface entre deux milieux

Allons un peu plus loin dans le sens physique de l'impédance propagative. Lorsqu'une OPP rencontre une interface entre deux milieux, elle est partiellement réfléchie et partiellement transmise.

> Les coefficients de réflexion et de transmission à une interface ne dépendent que du rapport des impédances propagatives des deux milieux.

C'est pour cette raison que la maximisation de la transmission se fait par adaptation d'impédance. Il s'agit alors d'insérer un troisième milieu, d'impédance intermédiaire, entre les deux autres.

Par manque de temps, la transformation d'une onde à l'interface entre deux milieux n'est pas plus détaillée dans le cadre de ce cours. Je vous laisse le soin de faire vos propres révisions à ce sujet, par exemple à l'aide de livres de CPGE [1, 2] ou à partir du cours dédié à la notion d'impédance d'Adrien Licari.

Conclusion

Le couplage entre grandeurs couplées d'une onde est entièrement caractérisé par la donnée de sa célérité et de sa relation de structure, caractérisée par une seule grandeur caractéristique du milieu, l'impédance propagative. Du point de vue d'une seule des grandeurs couplées, la célérité caractérise sa propagation dans un milieu homogène et l'impédance propagative la façon dont elle est transformée à une interface entre deux milieux.

1.4 Paquets d'ondes

1.4.1 L'outil onde plane progressive harmonique

Définition

Une onde plane progressive harmonique, ou onde plane progressive sinusoïdale est une onde plane progressive dont la dépendance en temps est sinusoïdale. Formellement, le champ associé à une OPPH s'écrit

$$\xi(x,t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t + \phi) . \tag{1.54}$$

 $\overrightarrow{k} = k \overrightarrow{n}$ est le **vecteur d'onde** de l'OPPH.

Remarque 1: La notion de vecteur d'onde n'a de sens que pour une OPPH. En particulier, parler du vecteur d'onde d'une onde plane ou d'une onde plane progressive « tout court » ne veut rien dire. C'est encore pire pour une onde sphérique.

Remarque 2: Pour des raisons de sens physique, on choisit généralement de prendre $\omega > 0$ et k de signe quelconque. C'est alors le signe de k qui indique le sens de propagation de l'OPPH. Cependant choisir k > 0 et ω de signe quelconque conduirait aux mêmes résultats.

Remarque 3 : Dans l'écriture (1.54), k et ω sont des paramètres de l'OPPH qui sont donc fixés. Ce ne sont a priori pas des variables de Fourier (même si les notations sont « volontairement ambiguës »).

Relation de dispersion

L'expression (1.22) montre la **double périodicité** de l'OPPH, qui est périodique dans l'espace et dans le temps : \triangleright la période spatiale d'une OPPH $\lambda = 2\pi/k$ est sa **longueur d'onde**;

 \triangleright la période temporelle d'une OPPH $T=2\pi/\omega$ est souvent appelée simplement « période ».

Le couplage spatio-temporel imposé par l'équation de d'Alembert fait que les deux périodes ne sont pas indépendantes.

La **relation de dispersion** est la relation entre la période spatiale et la période temporelle d'une onde plane progressive harmonique. Elle caractérise la propagation, par opposition au couplage.

Formellement, c'est l'équation qui relie ω et k. C'est en général une relation implicite, faisant intervenir ω^2 et k^2 en raison des dérivées secondes. Elle s'obtient en injectant l'expression d'une OPPH dans l'équation de propagation.

En appliquant cette méthode à l'équation de d'Alembert, on trouve que sa relation de dispersion est la relation bien connue

$$\omega^2 = k^2 c^2 \,. \tag{1.55}$$

Insistons une fois de plus sur le fait que cette notion n'est bien définie que pour les OPPH. Parler de « relation de dispersion d'un milieu » sous-entend que l'on considère des OPPH. Parler de relation de dispersion d'une onde progressive quelconque ne veut rien dire.

Vitesse de phase

La phase de l'OPPH (1.54) se factorise sous la forme

$$\Phi = k \left(x - \frac{\omega}{k} t \right) + \phi. \tag{1.56}$$

Par comparaison avec l'équation (1.34) décrivant une onde plane comme somme d'ondes planes progressives, ω/k s'interprète comme la vitesse à laquelle se propage la phase de l'OPPH.

La vitesse de phase v_{φ} est la vitesse de propagation de la phase d'une onde plane progressive sinusoïdale. Mathématiquement,

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} \,. \tag{1.57}$$

La propagation est dite **dispersive** lorsque toutes les OPPH n'ont pas la même vitesse de phase. Formellement, cela se traduit par une dépendance de la vitesse de phase en la fréquence de l'OPPH, ce qui est équivalent à une relation de dispersion non-linéaire.

Pour l'équation de d'Alembert, d'après la relation de dispersion (1.55),

$$v_{\varphi} = \pm c \,, \tag{1.58}$$

signe que la propagation n'est pas dispersive. Remarquons que ce résultat est cohérent avec le fait qu'une OPPH est une OPP, qui doit donc se propager avec la célérité c intervenant dans l'équation de d'Alembert.

Remarque : Le fait que la vitesse de phase soit définie algébriquement ou comme une norme (donc positive) n'est qu'une convention qui varie d'un auteur à l'autre, voire d'un paragraphe à l'autre ...

Caractère non-physique et intérêt de l'OPPH

Une OPPH ne peut pas décrire une onde physique réaliste, car elle est d'extension spatiale et temporelle infinie, et possède donc une énergie infinie. C'est néanmoins un outil mathématique essentiel grâce à l'analyse de Fourier, car les « OPPH » constituent la base de Fourier, sur laquelle on peut décomposer une onde quelconque.

Les OPPH forment une base des solutions de l'équation de d'Alembert.

Autrement dit, il est toujours pertinent de rechercher des solutions sous forme d'OPPH, puisque ces solutions, a priori particulières, donnent accès à *l'ensemble* des solutions par combinaison linéaire.

1.4.2 Paguet d'onde à une dimension

Construction d'un paquet d'onde [3, §21.1]

Un signal réel quelconque s'écrit en toute généralité

$$\xi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \,\widetilde{\xi}(k,\omega) \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \ . \tag{1.59}$$

Un tel signal $\xi(x,t)$ est donc une combinaison linéaire de signaux sinusoïdaux, pondérés par le coefficient complexe $\widetilde{\xi}(k,\omega)$, qui est la **transformée de Fourier** de $\xi(x,t)$.

Notons qu'ici $\xi(x,t)$ est nommé signal et non pas onde : rien ne dit a priori que ξ défini équation (1.59) est solution de l'équation de propagation. L'équation de d'Alembert étant linéaire, ce n'est le cas **que** si chacun des signaux sinusoïdaux impliqués est une OPPH, c'est-à-dire que si k et ω vérifient la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$. Ainsi, une onde (quelconque) s'écrit

$$\xi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \,\widetilde{\xi}(k,\omega) \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \,\delta(\omega - \omega(k)) \,. \tag{1.60}$$

 δ δ Attention! Les notations peuvent paraître ambigues : ω est une variable de Fourier, alors que $\omega(k)$ est la relation de dispersion, issue de l'équation de propagation. Il serait ici plus clair d'écrire cette dernière $\omega = f(k)$, et d'écrire l'argument de la distribution de Dirac sous la forme $\omega - f(k)$... ce que je ne fais pas pour être cohérent avec la suite où la notation $\omega(k)$ devient plus explicite.

La distribution de Dirac permet de procéder à l'intégration sur ω , ce qui conduit à

$$\xi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \,\hat{\xi}(k) \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega(k)t)}$$
(1.61)

où $\hat{\xi}(k) = \widetilde{\xi}[k,\omega(k)]$ est une fonction de la seule variable k à valeurs a priori complexes.

Un **paquet d'ondes** est une combinaison linéaire continue d'ondes planes progressives harmoniques dont les fréquences spatiales k et temporelles ω sont reliées par la relation de dispersion.

Insistons sur le fait qu'il est crucial de sommer les OPPH de façon continue et non pas discrète. En effet, la TF d'une fonction à spectre discret est une fonction périodique (techniquement, un spectre discret définit une série de Fourier), qui reste d'extension spatio-temporelle infinie.

Un paquet d'ondes physique possède un spectre de Fourier continu.

On peut proposer une lecture interférentielle de l'expression du paquet d'onde. Le paquet d'onde complet est alors issu de l'interférence d'un nombre infini d'OPPH cohérentes, chaque OPPH contribuant au paquet par l'amplitude $\hat{\xi}(k)$.

Complément : Inégalité d'Heisenberg [6, §14.3]

L'écriture du paquet d'onde comme une transformée de Fourier contraint son extension dans l'espace réel et l'espace de Fourier, car cela lui impose d'obéir à l'inégalité d'Heisenberg, qui stipule que

$$\Delta X_{\xi} \, \Delta K_{\xi} \ge \frac{1}{2} \,. \tag{1.62}$$

Dans cette expression, ΔX_{ξ} (qui peut dépendre de t) et ΔK_{ξ} (qui lui n'en dépend pas) sont les écarts types du module carré du paquet d'onde. Par exemple, ΔK_{ξ} est défini à partir du jeu d'égalités

$$\langle K_{\xi} \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} k \left| \hat{\xi}(k) \right|^2 \qquad ; \qquad \langle K_{\xi}^2 \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} k^2 \left| \hat{\xi}(k) \right|^2 \tag{1.63}$$

$$\Delta K_{\xi}^{2} = \left\langle K_{\xi}^{2} \right\rangle - \left\langle K_{\xi} \right\rangle^{2} \tag{1.64}$$

οù

$$\mathcal{N} \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \left| \hat{\xi}(k) \right|^2 \tag{1.65}$$

est la norme du paquet d'ondes, reliée à l'énergie totale qu'il transporte. L'inégalité d'Heisenberg ne contraint pas l'éventuel étalement du paquet d'onde que nous étudierons au chapitre 2, puisqu'elle ne fixe qu'une borne inférieure à sa largeur.

Variable privilégiée

La contrainte liée à la relation de dispersion permet d'éliminer une variable de l'intégrale de Fourier, mais laisse le choix entre privilégier k ou ω .

Ici, l'intégration a été faite sur les pulsations au profit des vecteurs d'onde. Privilégier ω pose en effet des problèmes d'interprétation : quel sens physique donner aux pulsations négatives? Comment bien distinguer le sens de propagation des OPP? Garder k est donc a priori plus simple de ce point de vue.

Ce n'est cependant pas toujours le meilleur choix. En particulier, lors d'un changement de milieu, la quantité conservée est la pulsation et non pas le vecteur d'onde. Un problème se pose également en présence d'atténuation, où le nombre d'onde k prend des valeurs complexes, comme nous le verrons au chapitre 2. Dans ces cas là, il est préférable de privilégier la pulsation comme variable de description du paquet d'ondes.

Complément : Hermiticité, signal analytique

Le champ $\xi(x,t)$ est à valeurs réelles, donc sa transformée de Fourier est **hermitique**, c'est-à-dire

$$\widetilde{\xi}(-k, -\omega) = \widetilde{\xi}^*(k, \omega)$$
 (1.66)

Dans le plan (ω, k) , représenté figure 1.5, il y a donc redondance entre les quadrants $(\omega > 0, k > 0)$ et $(\omega < 0, k < 0)$ d'une part; et $(\omega > 0, k < 0)$ et $(\omega < 0, k > 0)$ d'autre part.

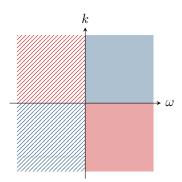


Fig. 1.5 – Schéma du plan de Fourier. Les deux quadrants rouges, $(\omega > 0, k < 0)$ et $(\omega < 0, k > 0)$, d'une part, et les deux quadrants bleus, $(\omega > 0, k > 0)$ et $(\omega < 0, k < 0)$, d'autre part, portent une information redondante. On peut donc se contenter du demi-plan droit, en couleurs pleines, pour décrire complètement le paquet d'onde. Cela revient à définir un signal analytique.

Tant qu'aucune atténuation n'entre en jeu, k est toujours réel, et on peut considérer $\omega(k)>0$ pour tout k sans perdre d'information. Notons que ce n'est a priori pas évident puisque la relation de dispersion relie ω^2 à k^2 sans fournir d'information sur le signe de ces deux grandeurs. Cela a l'avantage de rendre transparente l'interprétation en OPPH. En contrepartie, $\hat{\xi}(k)$ n'a pas de propriété de symétrie sous le changement de variable $k\to -k$. En ne gardant que le demi-plan de Fourier $\omega>0$, on définit un **signal analytique**, qui n'est autre que la fameuse « représentation complexe » largement utilisée par les physiciens. Le lecteur intéressé par la construction et les propriétés mathématiques d'un signal analytique pourra se reporter à l'ouvrage de W. Appel [6, §14.4].

Malgré tout, reconstruire le paquet d'ondes réel nécessite le plan de Fourier entier, et pas seulement la moitié $\omega > 0$. La propriété d'hermiticité permet d'en tenir compte à l'aide d'une partie réelle.

Ainsi, la façon la plus exacte d'écrire un paquet d'onde réel n'est pas (1.61), mais plutôt

$$\xi(x,t) = 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \hat{\xi}(k) \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega(k)t)} \,, \qquad \text{avec } \omega(k) > 0 \,.$$
 (1.67)

Extension à trois dimensions

La méthode utilisée ici s'étend sans difficulté au cas tridimensionnel. La relation de dispersion n'apporte toujours qu'une contrainte scalaire, et s'écrit formellement

$$\omega = \omega(\vec{k}) = \omega(k_x, k_y, k_z). \tag{1.68}$$

Elle ne permet donc de s'affranchir que d'une seule variable, disons ici la pulsation ω . Le paquet d'ondes met alors en jeu une intégrale triple,

$$\boxed{\xi(\vec{r},t) = 2 \operatorname{Re} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \hat{\xi}(\vec{k}) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(\vec{k})t)}, \quad \text{avec } \omega(\vec{k}) > 0.}$$
(1.69)

L'intégrale triple sur les composantes de \overrightarrow{k} peut alors être menée dans n'importe quel système de coordonnées, par exemple cartésiennes k_x, k_y, k_z ou sphériques k, θ_k, φ_k .

1.4.3 Propagation d'un paquet d'ondes

Enveloppe, vitesse de groupe [3, §21]

Étudions maintenant la façon dont un tel paquet d'ondes se propage. Pour faciliter l'interprétation des équations, considérons un paquet d'ondes se propageant dans une direction bien définie. Pour cela, on le suppose tel que $\hat{\xi}(k)$ ne prend des valeurs non-nulles que dans l'intervalle $[k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k]$ avec $k_0 > 0$ et $\Delta k \ll k_0$.

Faisons ensuite un « développement limité » de la relation de dispersion autour de $k=k_0$:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \Big|_{k_0} (k - k_0) + \mathcal{O}\left((k - k_0)^2\right). \tag{1.70}$$

Dans le cas où la relation de dispersion est celle de l'équation de d'Alembert, $d\omega/dk = c$ quel que soit k_0 et le développement à l'ordre 1 est exact. Utiliser un développement limité a l'intérêt d'être la méthode générale pour traiter la propagation d'un paquet d'onde en présence de dispersion, comme nous le ferons §2.3, c'est pourquoi on l'utilise dès maintenant.

Injectons ce développement dans l'expression complexe du paquet d'ondes (1.67). Pour simplifier les notations, on note le paquet complexe $\xi(x,t)$ de la même façon que le paquet lui-même.

$$\xi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \,\hat{\xi}(k) \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega(k)t)} \tag{1.71}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{\xi}(k) \exp i \left[k_0 x + (k - k_0) x - \omega(k_0) t - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} (k - k_0) t \right]$$
 (1.72)

De plus, $\hat{\xi}(k)$ est a priori complexe et on peut également en développer la phase au premier ordre en $(k-k_0)$:

$$\hat{\xi}(k) = \left| \hat{\xi}(k) \right| e^{i\phi(k_0)} e^{i\phi'(k_0)(k-k_0)}$$
(1.73)

Il apparaît alors une factorisation, les termes en k_0 pouvant être sortis de l'intégrale

$$\xi(x,t) = \exp i \left[k_0 x - \omega(k_0) t + \phi(k_0) \right] \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \left| \hat{\xi}(k) \right| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi'(k_0) (k - k_0)} \exp i \left[(k - k_0) x - \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \right]_{k_0} (k - k_0) t$$
(1.74)

Changeons maintenant de variable, et posons $\delta k = k - k_0$ et $\hat{\xi}_{e}(\delta k) = \left|\hat{\xi}(k_0 + \delta k)\right| e^{i\phi'(k_0)\delta k}$. Alors,

$$\xi(x,t) = \exp i \left[k_0 x - \omega(k_0) t + \phi(k_0) \right] \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\delta k}{2\pi} \, \hat{\xi}_{e}(\delta k) \exp i \left[\delta k \left(x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} t \right) \right]$$
(1.75)

L'intégrale est alors la transformée de Fourier (réciproque) de la fonction $\hat{\xi}_{e}(\delta k)$, prise en $x - (d\omega/dk)|_{k_0}t$. Il vient donc

$$\xi(x,t) = \xi_{e} \left(x - \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \Big|_{k_{0}} t \right) \exp i \left[k_{0}x - \omega(k_{0}) t + \phi(k_{0}) \right]$$
(1.76)

Un paquet d'ondes est constitué du produit d'une **onde porteuse** modulée par une **enveloppe** ξ_e . L'onde porteuse se propage à la **vitesse de phase** prise au nombre d'onde central du paquet,

$$v_{\varphi} = \frac{\omega(k_0)}{k_0} \,, \tag{1.77}$$

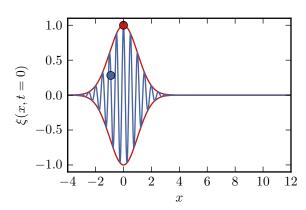
alors que l'enveloppe se propage à la vitesse de groupe prise au nombre d'onde central du paquet,

$$v_{\rm g} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \bigg|_{k_0} \,. \tag{1.78}$$

La vitesse de groupe provient du développement de la relation de dispersion au **premier ordre** autour du nombre d'onde central du paquet. C'est cette vitesse que l'on associe intuitivement au déplacement d'un paquet d'ondes. On l'obtient par exemple par des mesures de temps de vol d'impulsions. La structure d'un paquet d'onde et sa dynamique régie par l'équation de d'Alembert sont représentées figure 1.6.

Remarque 1 : Il est important de remarquer qu'en général $v_{\varphi} \neq v_{g}$. L'égalité est atteinte en particulier lorsque l'équation de propagation est l'équation de d'Alembert, $v_{\varphi} = v_{g} = c$. Dans ce cas, $\xi(x,t)$ est bien une *OPP* en tant que fonction de la seule variable x - ct.

Remarque 2: Maintenant que le résultat a été interprété, revenons sur l'introduction de l'enveloppe par $\hat{\xi}_e(\delta k) = \left|\hat{\xi}(k_0 + \delta k)\right| e^{i\phi'(k_0)\delta k}$. Cela traduit mathématiquement le fait que $\hat{\xi}$ décrit un paquet qui avance, et est donc maximal en $k = k_0 \neq 0$, alors que $\hat{\xi}_e$ décrit une enveloppe, qui est donc statique et est maximale en $\delta k = 0$.



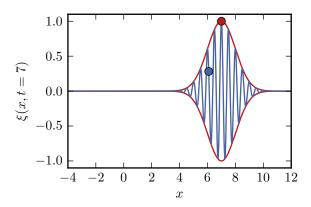


Fig. 1.6 – Propagation d'un paquet d'onde solution de l'équation de d'Alembert. Un paquet d'onde, en bleu, se compose d'une enveloppe, en rouge, modulée par une porteuse. Ici, la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont égales et valent 1 par choix d'unités. Ainsi le point bleu, lié à la porteuse, se déplace à la même vitesse que le point rouge, lié à l'enveloppe. Le paquet d'onde représenté est gaussien, d'écart type 1, et la porteuse a pour longueur d'onde 0.5.

Position du centre du paquet d'ondes

Le centre du paquet d'onde est obtenu lorsque toutes les contributions définissant ξ_e dans l'équation (1.75) interfèrent constructivement, ou en d'autres termes lorsque chaque terme de phase pour chaque δk vaut 1. À l'instant t, cette condition est obtenue en $x_c = x_c(t)$ tel que pour tout δk ,

$$\delta k \left[\phi'(k_0) + x_c - v_g t \right] = 2p\pi \,, \, p \in \mathbb{Z} \,.$$
 (1.79)

Cette condition devant être vraie pour tout δk , qui est une variable continue, la seule façon de la réaliser est d'avoir

$$\phi'(k_0) + x_c - v_g t = 0, (1.80)$$

soit

$$x_c(t) = v_g t - \phi'(k_0)$$
. (1.81)

On trouve comme attendu que le centre du paquet d'ondes se déplace à la vitesse de groupe. Attention à ne pas oublier la phase $\phi'(k_0)$, qui s'interprète comme la position du paquet d'ondes à t=0.

Remarque: On retrouve ici le résultat connu qu'une modulation $e^{i\phi'(k_0)\delta k}$ dans l'espace de Fourier se traduit par une translation dans l'espace réel [6, §11.2].

Remarquons que le « maximum » trouvé ici est celui de la fonction d'enveloppe, qui n'est pas forcément un maximum du paquet d'ondes complet. En effet, la phase commune à toutes les ondes n'est pas forcément un multiple de 2π , car il reste la phase moyenne, celle de la porteuse.

Méthode de la phase stationnaire [9, §7.11]

Ce dernier résultat peut se retrouver par une méthode équivalente mais plus directe, ne nécessitant pas la décomposition porteuse—enveloppe. Revenons à l'expression définissant le (l'écriture complexe du) paquet d'ondes, équation (1.67),

$$\xi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \left| \hat{\xi}(k) \right| e^{\mathrm{i}\phi(k)} e^{\mathrm{i}(kx - \omega(k)t)}$$
(1.82)

Si le paquet d'onde est suffisamment étroit spatialement, la bande Δk de nombres d'ondes y contribuant de façon significative est suffisamment large pour supposer raisonnablement que $\hat{\xi}(k)$ varie beaucoup plus lentement avec k que le terme de phase global exp i $[kx - \omega(k) t]$.

Remarque: Physiquement, cela signifie que le paquet d'onde est bien défini, très loin d'une onde quasiharmonique (pour laquelle parler du « centre » n'a d'ailleurs pas grand sens). L'approximation faite ici est l'opposée de l'approximation de l'enveloppe lentement variable utilisée pour décrire la cohérence en optique ondulatoire.

Le centre du paquet d'onde se trouve alors en $x_c = x_c(t)$ qui est tel que toutes les composantes de Fourier y interfèrent en phase. En d'autres termes, x_c est tel que la phase globale n'y dépende pas de k, ce qui se traduit mathématiquement au premier ordre par

$$\frac{\partial}{\partial k} \left[kx - \omega(k) t + \phi(k) \right] \Big|_{x = x_c} = 0, \qquad (1.83)$$

ce qui conduit à

$$x_{\rm c} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} t - \phi'(k) \,, \tag{1.84}$$

mais $x_{\rm c}$ y est toujours une fonction de k, ce qui n'a pas de sens.

Si le milieu est suffisamment peu dispersif à l'échelle de Δk , ce qui est évident pour l'équation de d'Alembert, il est légitime de considérer que dans cette bande de nombre d'ondes,

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \simeq \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\Big|_{k_0}$$
 (1.85)

De plus, si $\hat{\xi}(k)$ varie lentement avec k, on peut supposer que sa phase varie au pire linéairement avec δk , et prendre alors

$$\phi'(k) \simeq \phi'(k_0) \,, \tag{1.86}$$

ce qui donne de nouveau le résultat précédent.

1.5 Ondes stationnaires

1.5.1 Définition et propriétés

Une **onde stationnaire** est une onde dont les dépendances spatiale et temporelle sont découplées. Formellement, le champ d'une onde (plane) stationnaire s'écrit

$$\xi(x,t) = f(x) \times g(t). \tag{1.87}$$

Cherchons les ondes stationnaires (abrégées OS par la suite) solutions de l'équation de d'Alembert,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \tag{1.88}$$

en y injectant (1.87), ce qui donne

$$f''(x) g(t) - \frac{1}{c^2} g''(t) f(x) = 0, \qquad (1.89)$$

 soit

$$c^{2} \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)}. \tag{1.90}$$

Or dans cette égalité les variables temps et espace sont séparées, ce qui implique que chacun des termes est en fait constant. Si cette constante est positive ou nulle, on obtient une solution divergente en temps qui n'est pas physiquement possible. Par conséquent, elle est négative et on la nomme $-\omega^2$. Chaque membre donne alors lieu à une équation différentielle à une variable, du type oscillateur harmonique, d'où

$$\begin{cases} g(t) = g_0 \cos(\omega t + \phi) \\ f(x) = f_0 \cos\left(\frac{\omega}{c} x + \phi'\right) \end{cases}$$
(1.91)

et enfin

$$\xi(x,t) = \xi_0 \cos(\omega t + \phi) \cos(kx + \phi'), \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$
 (1.92)

Notons qu'ainsi défini k vérifie la relation de dispersion, ce qui n'est a priori pas évident.

 $\stackrel{\bullet}{\bullet}$ $\stackrel{\bullet}{\bullet}$ Attention! k est un « nombre d'onde », mais on ne peut pas en faire un vecteur d'onde car une onde stationnaire n'a pas de direction de propagation.

Une OS possède également une **double périodicité**, mais dans un sens différent de la double périodicité d'une OPPH. Elle donne lieu à des **nœuds** et des **ventres** de vibration, points où l'amplitude des oscillations est respectivement nulle et maximale.

Développons le produit des cosinus dans l'équation (1.92) :

$$\xi(x,t) = \frac{1}{2} \, \xi_0 \left[\cos(\omega t + \phi + kx + \phi') + \cos(\omega t + \phi - kx - \phi') \right] \tag{1.93}$$

Ainsi, une OS est la somme de deux OPPH de même amplitude, déphasées et se propageant dans des sens opposés.

Remarque: La pulsation ω et le nombre d'onde k intervenant dans l'OS sont aussi ceux qui interviennent dans l'OPPH. Il est donc logique qu'ils vérifient la relation de dispersion.

Plus intéressant, développons le cosinus de l'expression d'une OPPH :

$$\xi(x,t) = \xi_0 \cos(\omega t - kx + \phi) \tag{1.94}$$

$$= \xi_0 \left[\cos \left(\omega t + \phi \right) \cos(kx) - \sin(\omega t + \phi) \sin(-kx) \right] \tag{1.95}$$

$$= \xi_0 \left[\cos \left(\omega t + \phi \right) \cos(kx) - \sin(\omega t + \phi) \sin(-kx) \right]$$

$$\xi(x,t) = \xi_0 \left[\cos \left(\omega t + \phi \right) \cos(kx) + \cos \left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(kx - \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

$$(1.95)$$

Ainsi, une OPPH s'écrit comme la somme de deux OS. Et comme les OPPH forment une base des solutions de l'équation de d'Alembert, on en déduit le résultat suivant :

Les ondes stationnaires forment une base des solutions de l'équation de d'Alembert, i.e. toute solution de l'équation de d'Alembert peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'OS.

Dès que les conditions aux limites imposent un nœud de vibration, il est naturel de chercher une solution sous forme d'onde stationnaire, et cela assure de pouvoir reconstruire toutes les solutions par combinaison linéaire.

1.5.2 Oscillations libres d'une corde de Melde

Rappels

Une corde de Melde est une corde vibrante dont les deux extrémités sont fixes.

Rappelons qu'une corde vibrante a pour grandeurs couplées la vitesse de déplacement vertical de la corde, $\partial \xi / \partial t$, et la composante verticale de la tension, T_z [2, §13.5]. Les constantes de couplage sont la masse linéique μ de la corde et l'inverse de sa tension au repos, $1/T_0$.

L'ébranlement $\xi(x,t)$ de la corde obéit alors à l'équation de d'Alembert, de célérité $c=\sqrt{T_0/\mu}$.

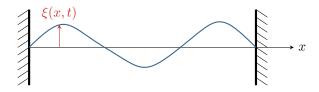


Fig. 1.7 – Corde de Melde. Une corde de Melde, fixée à ses deux extrémités, est décrite par l'ébranlement $\xi(x,t)$.

Modes propres

Les conditions aux limites imposent un ébranlement nul aux deux extrémités de la corde. Pour trouver l'ébranlement des oscillations libres d'une corde de Melde, il est donc logique de chercher des solutions parmi les ondes stationnaires, et de trouver lesquelles sont compatibles avec les conditions aux limites. Ces solutions sont les modes **propres** de la corde.

Un mode d'un système physique est une solution des équations du mouvement, compatible avec les conditions aux limites, et dont la dépendance en temps est harmonique.

La nature précise des modes dépend de la nature des conditions aux limites. Dans le cas de conditions aux limites imposées dans la direction de propagation, par exemple pour la corde de Melde, les modes sont des ondes stationnaires appelées modes propres. En revanche, lorsque les conditions aux limites sont transverses à la direction de propagation, ce qui est le cas des guides d'ondes que nous étudierons chapitre 3, les modes ont une structure mixte et conservent une partie progressive. Dans ce dernier cas, pour mettre l'accent sur cette différence, on ne parle plus de « modes propres », mais simplement de « modes », voire de modes de propagation.

> Remarque 1 : La notion de mode d'un système physique est une notion extrêmement générale, qui dépasse largement le cadre de la physique des ondes. Penser par exemples aux modes propres d'un système d'oscillateurs couplés, aux modes propres d'un puits quantique (qu'on appelle plutôt états propres), etc. Un système physique possède autant de modes qu'il a de degrés de liberté : un oscillateur masse-ressort a un mode propre, un système de deux pendules couplés en a deux, etc. Une corde de Melde, en tant que système continu, possède donc une infinité de modes propres.

Remarque 2: Les fonctions définissant les modes forment une famille de fonctions orthonormée, au sens du produit scalaire des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, d'où la dénomination de modes normaux qu'on leur donne également.

Remarque 3 : Insistons sur le fait que la notion de mode est définie en régime libre. Nul besoin que les oscillations du système soient forcées!

Le fait d'avoir des conditions aux limites implique de façon systématique une **discrétisation des modes** : le système sélectionne certaines longueurs d'onde, celles qui placent les nœuds et les ventres de vibration aux bons endroits.

Remarque: Cette discrétisation n'est « inattendue » que pour un système continu.

Cherchons donc les modes propres d'une corde de Melde, en cherchant $\xi(x,t)$ sous la forme d'une OS,

$$\xi(x,t) = \xi_0 \cos(\omega t + \phi) \cos(kx + \phi') . \tag{1.97}$$

Les conditions aux limites s'écrivent pour tout t

$$\xi(x=0,t) = \xi(x=L,t) = 0, \tag{1.98}$$

d'où

 $\triangleright \cos \phi' = 0$, et donc $\phi' = \pm \pi/2$;

 $ightharpoonup \cos(kL \pm \pi/2) = \mp \sin(kL) = 0$, donc $kL = n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Les solutions à k < 0 étant équivalentes à des solutions à k > 0,

Les modes propres de la corde de Melde sont quantifiés par

$$k_n = n \frac{\pi}{L}, n \in \mathbb{N} \qquad \Longleftrightarrow \qquad L = n \frac{\lambda_n}{2}, n \in \mathbb{N}$$
 (1.99)

La longueur de la corde contient un nombre entier de demi longueur d'onde du mode considéré.

La pulsation ω dépend également de n en raison de la relation de dispersion :

$$\omega_n = k_n c = n \frac{\pi}{L} c = n \omega_1. \tag{1.100}$$

Remarque : La condition de quantification sur les longueurs d'onde est universelle pour des systèmes physiques de ce type. En revanche, avoir $\omega_n \propto n$ est seulement une propriété de l'équation de d'Alembert des ondes planes. Penser par exemple à la condition de quantification dans un puits quantique carré infini, où

$$k_n = n \frac{\pi}{L}$$
 mais $E_n = \hbar \omega_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$. (1.101)

Ainsi, l'ébranlement de la corde dans le mode propre n vaut

$$\xi_n(x,t) = \xi_{0,n} \cos(n \omega_1 t + \phi_n) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right).$$
(1.102)

En toute généralité, l'ébranlement d'une oscillation libre de la corde s'écrit comme une combinaison linéaire des modes propres,

$$\xi(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_{0,n} \cos(n\omega_1 t + \phi_n) \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$
(1.103)

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \cos(n \omega_1 t) + B_n \sin(n \omega_1 t) \right] \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) . \tag{1.104}$$

Remarque 1 : Ceci n'est pas une onde stationnaire, puisque l'espace et le temps n'y sont pas découplés.

Remarque 2 : Ce résultat est parfaitement naturel : les OS forment une base des solutions, et les modes propres représentent par définition l'ensemble des OS qui vérifient les conditions aux limites ... qui s'imposent également à toute onde existant dans le système.

Les coefficients A_n et B_n s'obtiennent à partir des conditions initiales, qui s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} \xi(x,t=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t}(x,t=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\omega_1 B_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \end{cases}$$
(1.105)

 A_n et B_n s'identifient donc aux coefficients du développement en série de Fourier des fonctions définissant les conditions initiales. Ainsi,

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \xi(x, t = 0) dx \\ B_n = \frac{1}{n\pi c} \int_{-L}^{+L} \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t = 0) dx \end{cases}$$
(1.106)

Pour être dans le cadre mathématique exact des séries de Fourier [6, §10.4], il est nécessaire de prolonger les fonctions $\xi(x, t = 0)$ et $\partial \xi / \partial t(x, t = 0)$ comme représenté figure 1.8, à savoir

⊳ par imparité, car le développement de Fourier ne contient que des sinus ;

 \triangleright par périodicité, de période 2L.

Comme le développement se fait sur les fonctions trigonométriques et pas sur les exponentielles complexes, des facteurs 2 apparaissent : le préfacteur de l'intégrale définissant A_n est en fait 2/2L alors que celui de l'intégrale donnant B_n vaut $(2/2L) \times (L/n\pi c)$.

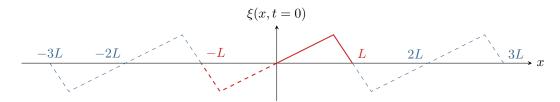


Fig. 1.8 – Forme initiale imposée à une corde. La corde réelle est située entre x=0 et x=L, représentée en traits pleins rouges. On lui a ici donnée une forme de type corde pincée, par exemple une corde de guitare ou de harpe. Elle est ensuite mathématiquement étendue par imparité, en traits pointillés rouge. Enfin, elle est périodisée, de période 2L, en traits pointillés bleus.

Analyse énergétique [2, §13.6] [10, §1.2]

Rappelons d'abord l'expression de la densité linéique d'énergie d'une corde vibrante,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2. \tag{1.107}$$

Le premier terme est une énergie cinétique, alors que le second est une énergie potentielle élastique. μ est la masse linéique de la corde et T_0 sa tension au repos. La célérité des ondes le long de la corde vaut $c = \sqrt{T_0/\mu}$.

Calculons l'énergie de la corde lorsqu'elle est dans un mode propre

$$\xi_n(x,t) = \xi_{0,n} \cos(\omega_n t + \phi_n) \sin(k_n x).$$
 (1.108)

Les deux carrés intervenant dans les densités linéiques d'énergie valent alors

$$\left(\frac{\partial \xi_n}{\partial t}\right)^2 = \xi_{0,n}^2 \,\omega_n^2 \sin^2(\omega_n \, t + \phi_n) \sin^2(k_n \, x) \tag{1.109}$$

$$\left(\frac{\partial \xi_n}{\partial x}\right)^2 = \xi_{0,n}^2 k_n^2 \cos^2(\omega_n t + \phi_n) \cos^2(k_n x)$$
(1.110)

ce qui permet d'obtenir l'énergie totale comme

$$E_n(t) = \int_0^L \varepsilon_n(x, t) \, \mathrm{d}x.$$
 (1.111)

Or $k_n = n\pi/L$, donc

$$\int_0^L \sin^2(k_n x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^L \left[1 - \cos\left(2\pi n \, \frac{x}{L}\right) \right] \, \mathrm{d}x = \frac{L}{2} \,, \tag{1.112}$$

puisque le cosinus est intégré sur un nombre entier de périodes. Ainsi,

$$E_n(t) = \xi_{0,n}^2 \left[\frac{1}{4} \mu \omega_n^2 \sin^2(\omega_n t + \phi_n) + \frac{1}{4} T_0 k_n^2 \cos^2(\omega_n t + \phi_n) \right]$$
 (1.113)

Or la célérité des ondes d'ébranlement de la corde est $c = \sqrt{T_0/\mu}$ et la relation de dispersion s'écrit $\omega^2 = k^2 c^2$, donc

$$\mu \,\omega_n^2 = T_0 \,k_n^2 \tag{1.114}$$

et ainsi

$$E_n = \frac{1}{4} \, \xi_{0,n}^2 \, T_0 \, k_n^2 \tag{1.115}$$

$$E_n = \frac{n^2 T_0 \pi^2}{4L} \xi_{0,n}^2.$$
 (1.116)

L'énergie E_n ne dépend donc pas du temps!

Sans apport d'énergie ni processus dissipatif, l'énergie d'un mode propre de la corde ne varie pas au cours du temps.

Dans le cas général où $\xi(x,t)$ est une combinaison linéaire de modes propres, on montre que l'énergie totale de la corde est la somme des énergies de chacun des modes propres. La démonstration implique le caractère orthogonal de deux modes propres différents, qui forment bien des modes normaux.

L'énergie totale des oscillations libres de la corde de Melde est la somme des énergies injectées dans chaque mode par les conditions initiales, sans qu'il n'y ait de réorganisation ultérieure de l'énergie entre les modes.

1.5.3 Oscillations forcées d'une corde de Melde

Forçons maintenant l'extrémité de la corde située en x=0 à osciller à une pulsation ω_0 fixée de l'extérieur. Les nouvelles conditions aux limites s'écrivent à tout instant t

$$\begin{cases} \xi(x=0,t) = A\cos(\omega_0 t) \\ \xi(x=L,t) = 0 \end{cases}$$
(1.117)

Puisque les conditions aux limites imposent un nœud de vibration, cherchons une solution en onde stationnaire qui vérifie les conditions aux limites,

$$\xi(x,t) = \xi_0 \cos(\omega t + \phi) \cos(kx + \phi'). \tag{1.118}$$

Cette solution devant vérifier la relation de dispersion, qui n'est pas modifiée par les conditions aux limites, on sait d'emblée que $k = \omega/c$.

Exploitons maintenant les conditions aux limites. Commençons par x=0, où à tout instant

$$\xi_0 \cos(\omega t + \phi) \cos \phi' = A \cos(\omega_0 t), \qquad (1.119)$$

d'où

$$\omega = \omega_0, \qquad \phi = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi_0 \cos \phi' = A.$$
 (1.120)

Remarquons donc que la pulsation de l'onde stationnaire est forcément la pulsation de forçage, que celle-ci soit celle d'un mode propre ou non. Ainsi, une pulsation qui ne pourrait pas donner d'oscillation libre peut être forcée dans le système. Pour insister sur le rôle du forçage, on notera par la suite $k=k_0=\omega_0/c$. À l'autre extrémité de la corde, en x=L, on a

$$\cos(k_0 L + \phi') = 0, \tag{1.121}$$

soit

$$k_0 L + \phi' = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, n \in \mathbb{Z}, \quad \text{d'où} \quad \phi' = -k_0 L + \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, n \in \mathbb{Z},$$
 (1.122)

et donc

$$\cos(k_0 x + \phi') = \cos\left[k_0(x - L) + n\pi + \frac{\pi}{2}\right] = (-1)^n \sin\left[k_0(L - x)\right]. \tag{1.123}$$

En appliquant ce résultat en x = 0, on note que

$$\cos \phi' = (-1)^n \sin(k_0 L). \tag{1.124}$$

Ainsi, on déduit de (1.120) que

$$\xi_0 = \frac{A}{\cos \phi'} = \frac{A}{(-1)^n \sin(k_0 L)}, \qquad (1.125)$$

ce qui permet finalement d'écrire la solution

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega_0 t) \frac{\sin[k_0(L-x)]}{\sin(k_0 L)} .$$
 (1.126)

Lorsque $k_0L = n\pi, n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire lorsque la fréquence de forçage ω_0 correspond à une fréquence propre $n\omega_1$ de la corde, la corde est en **résonance**. D'après le calcul, l'amplitude des oscillations tendrait alors vers l'infini. Toutefois, des phénomènes dissipatifs et des non-linéarités dans le comportement de la corde qui n'ont pas été pris en compte ici empêchent cette incongruité physique. Ce résultat est toutefois très général :

Un système physique entre en résonance lorsqu'il est excité à une fréquence égale à l'une des ses fréquences propres.

Remarque: Il est important de bien comprendre que la résonance est une notion relative à des oscillations forcées, alors que les modes propres sont eux relatifs à des oscillations libres. On voit ici apparaître la correspondance entre ces deux types d'oscillations, qui sont au premier abord différents.

Ces résultats peuvent être interprétés en termes énergétiques. À la résonance, l'excitateur transmet de l'énergie à l'oscillateur qui est en mesure de la stocker puisque la fréquence correspond à celle d'un mode propre. L'énergie totale accumulée finit alors par diverger, ce qui donne lieu à la résonance. Hors de la résonance, le système n'est pas en mesure de conserver l'énergie. Ainsi, après un certain temps caractéristique, l'énergie est renvoyée de l'oscillateur vers l'excitateur. On retrouve alors la caractérisation énergétique de la résonance :

Il y a résonance lorsque le transfert de puissance de l'excitateur vers l'oscillateur est maximal.

Notons qu'en pratique des phénomènes dissipatifs dans l'oscillateur font qu'un transfert net d'énergie existe toujours entre excitateur et oscillateur. La condition d'équilibre citée ci-dessus ne peut jamais être réalisée. De même, en présence de dissipation, la divergence évoquée ci-dessus devient un maximum.

1.5.4 Remarques finales sur la corde de Melde

En dépit de son apparente simplicité, la physique de la corde de Melde recèle un bon nombre de pièges. Les résultats sur les oscillations libres et ceux sur les oscillations forcées ne doivent pas être mélangés, la différence provenant des conditions de bord (au sens mathématique du terme) imposées à la corde. En effet,

- \triangleright dans le cas des oscillations libres, l'onde dépend de la donnée d'une condition *initiale*, c'est-à-dire $\xi(x, t = 0)$ à un instant t unique et en tout point x;
- \triangleright dans le cas des oscillations forcées, l'onde dépend de la donné d'une condition aux limites, c'est-à-dire $\xi(x=0,t)$ en un point x unique et à tout instant t.

Il est donc logique que les résultats ne soient pas directement transposables d'un cas à l'autre, mais qu'il y ait une symétrie dans le rôle joué respectivement par l'espace et le temps.

En particulier, lorsque les oscillations sont forcées sinusoïdalement, l'onde est stationnaire puisqu'elle découple espace et temps. Au contraire, lorsque les oscillations sont libres, elle ne l'est pas, mais est une combinaison linéaire d'ondes stationnaires.

Remarque: Attention toutefois, si jamais le forçage n'est pas harmonique, alors l'onde n'est pas stationnaire mais combinaison linéaire d'ondes stationnaires aux différentes fréquences du forçage; et si jamais la condition initiale a la forme d'un mode propre (c'est-à-dire un sinus), alors l'onde est stationnaire. On voit ici apparaître la symétrie mentionnée précédemment, mais ce ne sont pas les cas auxquels on s'intéresse le plus souvent.

Par ailleurs, il n'y a pas de « décomposition sur la base des modes propres » ou « d'excitation de plusieurs modes » dans le cas des oscillations forcées, cela ne vaut que pour les oscillations libres. Ce résultat devient « évident » en remarquant qu'un mode propre est caractérisé par la donnée de sa pulsation, alors que dans le cas des oscillations forcées la pulsation est donnée par le forçage : la pulsation des oscillations de la corde ne peut donc pas correspondre à celle de plusieurs modes propres à la fois.

Néanmoins, il ne faut pas croire pour autant que les deux cas n'ont « rien à voir ». En particulier, l'autre condition aux limites qui impose une extrémité fixe à la corde et qui permet l'existence d'ondes stationnaires est la même dans les deux situations.

tienne Thibierge. 6 février 2015

Chapitre 2

Propagation dans un milieu dispersif; atténuation

Nous allons maintenant nous intéresser à la propagation dans un milieu dispersif et à ses conséquences, en particulier relatives à l'atténuation. Commençons par bien insister sur le titre du chapitre.

Ce chapitre traite de propagation dans un milieu dispersif, et non pas de propagation dispersive. La dispersion peut en effet être due

- ▷ ou bien aux propriétés du milieu, dont la réponse dépend de la fréquence d'excitation, ce qui fait l'objet de ce chapitre;
- ⊳ ou bien aux conditions aux limites transverses à la propagation, ce qui sera traité dans le chapitre 3 sur le guidage.

Par ailleurs, insistons d'emblée sur la différence entre atténuation et absorption.

Une onde est **atténuée** lorsque son amplitude, et donc sa densité locale d'énergie, décroissent au cours de la propagation.

Une onde est absorbée lorsqu'elle cède de l'énergie au milieu dans lequel elle se propage.

Bien évidemment, l'absorption entraı̂ne l'atténuation, mais il peut y avoir atténuation sans absorption. Le premier exemple est celui d'une onde sphérique : son amplitude décroı̂t en 1/r au cours de la propagation, elle est donc atténuée, mais sans pour autant être absorbée. La cause de l'atténuation est un simple étalement dans l'espace. Nous verrons dans ce chapitre une autre cause d'atténuation, sans étalement ni absorption.

2.1 De nouvelles équations de propagation

2.1.1 Équation de Klein-Gordon

L'équation de Klein-Gordon apparaît dans divers problèmes ondulatoires, par exemple la propagation d'onde dans une chaîne de pendules pesants couplés par torsion [11, §24.I]. Nous allons ici l'établir sur un exemple différent, celui des ondes électromagnétiques dans le plasma ionosphérique [1, §7.2] [2, §16.4].

Rappelons qu'un plasma est un gaz ionisé mais globalement neutre, constitué de cations et d'électrons libres. L'ionosphère est la couche la plus extérieure de l'atmosphère terrestre, située à une altitude supérieure à $60 \, \mathrm{km}$. La densité volumique d'électrons n_0 y varie de 10^{10} à 10^{12} m⁻³ au cours de la journée en raison de processus d'ionisation induits par le rayonnement UV le jour et de recombinaison électron-ion la nuit.

Pour établir l'équation de propagation, nous allons partir comme toujours des équations de Maxwell. Il est donc nécessaire de connaître les densités volumiques de charge et de courant, ρ et \overrightarrow{j} , qui y interviennent. Une modélisation du plasma permet de les relier aux champs \overrightarrow{E} et \overrightarrow{B} , via une relation appelée **relation constitutive** du plasma.

Modélisation, relation constitutive

Remarque: Deux approches sont possibles pour modéliser un plasma. La première, heuristique, consiste à étudier un électron individuellement. La seconde, plus physique, adopte une approche continue de type mécanique des fluides. L'approche continue étant moins habituelle au niveau CPGE, mais pourtant plus rigoureuse, c'est celle qui est adoptée ici.

Les ions étant beaucoup plus massifs que les électrons $(m_{\rm ion}/m_{\rm e} \sim 10^3)$, on les néglige dans l'étude dynamique. Ils jouent pourtant un rôle essentiel, puisqu'ils assurent un « arrière-plan » chargé positivement qui garantit la neutralité globale du plasma et qui permet d'écranter efficacement les interactions coulombiennes répulsives entre électrons.

Par ailleurs, le plasma étant un milieu dilué, on néglige les processus de relaxation, comme par exemple les collisions électron-atome ou électron-ion.

Remarque: On se place donc dans un modèle de type jellium.

Considérons les électrons d'un volume mésoscopique δV de plasma, animé de la vitesse d'ensemble, eulérienne, $\vec{v}(\vec{r},t)$. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à ce système, sous la forme dite du théorème de la résultante cinétique ou loi de la quantité de mouvement.

$$n_0 m_e \delta V \frac{D \vec{v}}{Dt} = -n_0 e \delta V \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right). \tag{2.1}$$

Dans cette équation,

- $\triangleright n_0 m_e \delta V$ et $-n_0 e \delta V$ correspondent respectivement à la masse totale et la charge totale des électrons contenus dans le volume mésoscopique δV ;
- $\triangleright D\overrightarrow{v}/Dt$ est la dérivée totale du champ des vitesses, qui n'est autre que la dérivée particulaire de la mécanique des fluides;
- $ightharpoonup \vec{E}$ et \vec{B} sont des champs lissés (« coarse-grained fields »), définis à l'échelle mésoscopique de δV en sommant chaque champ dû à chaque charge individuelle, incluant donc les cations, et les champs imposés de l'extérieur.

En développant la dérivée particulaire et en simplifiant par $n_0 \delta V$, l'équation de la dynamique s'écrit

$$\boxed{m_{\rm e} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} \right] = -e \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) .}$$
(2.2)

Raisonnons en ordre de grandeur pour montrer que certains termes de cette équation sont négligeables. Pour ce faire, supposons que le plasma n'est soumis à aucun champ statique. Puisque l'objectif est d'étudier la propagation d'ondes électromagnétiques dans le plasma, considérons plutôt que les champs sont ceux d'une OPPH. La relation de structure d'une OPPH s'écrit

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \,, \tag{2.3}$$

ce qui permet de comparer l'importance relative des forces électrique et magnétique,

$$\frac{\left|\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B}\right|}{\left|\overrightarrow{E}\right|}\sim\frac{v\,k}{\omega}=\frac{v}{v_{\varphi}}\sim\frac{v}{c}\,.\tag{2.4}$$

Si les électrons du plasma ne sont pas relativistes, ce dont on pourra s'assurer à la fin de l'étude, alors $v/c \ll 1$, et la force magnétique est négligeable devant la force électrique.

Remarque: Imposer $v_{\varphi} \sim c$ n'est pas si bien justifié à ce stade de l'étude. La validité de cette hypothèse devra donc être vérifiée une fois l'expression de la vitesse de phase obtenue.

Par ailleurs,

$$\frac{\left| \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \overrightarrow{v} \right|}{\left| \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} \right|} \sim \frac{v^2 / \lambda}{v / T} = \frac{v \, k}{\omega} = \frac{v}{v_{\varphi}} \ll 1, \qquad (2.5)$$

toujours dans la limite d'électrons non relativistes. L'accélération convective est donc négligeable devant l'accélération locale. L'équation de la dynamique s'écrit finalement

$$m_{\rm e} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E} \,. \tag{2.6}$$

Sachant que le vecteur densité volumique de courant \vec{j} est relié à la vitesse d'ensemble des porteurs de charge par $\vec{j} = -n_0 e \vec{v}$, on obtient la **relation constitutive** du plasma :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{n_0 \, e^2}{m_e} \, \vec{E} \,.}$$
 (2.7)

Cette approche mésoscopique est bien plus rigoureuse qu'une approche microscopique heuristique. En effet,

considérer que les champs sont ceux d'une OPPH n'est plus légitime dans l'approche microscopique, puisqu'au niveau microscopique on ne peut pas s'affranchir des interactions électromagnétiques électron-électron et électronion;

 \triangleright le vecteur densité volumique de courant est relié à la vitesse d'ensemble des porteurs de charge, et pas à la vitesse d'un unique porteur : le passage de l'équation de la dynamique à la relation constitutive exige alors un processus de moyennage sur un volume mésoscopique.

Remarque : La problématique est exactement la même pour établir l'expression de la conductivité dans le modèle de Drude.

Équation de propagation

Une fois cette relation constitutive établie, on peut revenir aux équations de Maxwell et obtenir l'équation de propagation avec la méthode habituelle. Considérons par exemple le champ électrique, et calculons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{B}, \qquad (2.8)$$

donc

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\operatorname{div}\overrightarrow{E}\right) - \Delta \overrightarrow{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{B}. \tag{2.9}$$

Le plasma est globalement neutre, mais rien ne dit qu'il l'est aussi à l'échelle mésoscopique, et par conséquent div \vec{E} est a priori inconnu. Pour s'en affranchir, nous allons nous restreindre à l'étude d'ondes transverses, c'est-à-dire telles que le champ électrique est orthogonal à la direction (locale) de propagation. De telles ondes vérifient géométriquement div $\vec{E}=0$, ce qui permet de poursuivre le calcul.

Remarque : Cela se démontre par décomposition sur une base d'OPPH. Pour de telles ondes,

$$\operatorname{div} \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E} = ik\vec{n} \cdot \vec{E} = 0. \tag{2.10}$$

Physiquement, ce résultat signifie que les ondes transverses préservent la neutralité du plasma à l'échelle locale.

D'après l'équation de Maxwell-Ampère,

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \qquad (2.11)$$

soit finalement, en utilisant $\varepsilon_0 \, \mu_0 = 1/c^2$,

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}, \qquad (2.12)$$

ce qui devient, d'après la relation constitutive (2.7),

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 \, n_0 \, e^2}{m_e} \, \vec{E} \,. \tag{2.13}$$

On introduit enfin la **pulsation plasma** ω_p , qui permet d'écrire l'équation de propagation sous la forme

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E} \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \, \varepsilon_0}}.$$
 (2.14)

Remarque: Conformément aux résultats du chapitre 1, il est possible d'obtenir exactement la même équation de propagation pour le champ magnétique, qu'il s'agisse de \overrightarrow{H} ou \overrightarrow{B} . Cela exige de retravailler la relation constitutive pour l'écrire sous la forme

$$\overrightarrow{rot} \overrightarrow{j} = -\frac{n_0 e^2}{m_e} \overrightarrow{B}. \tag{2.15}$$

Il faut en prendre le rotationnel, utiliser l'équation de Maxwell-Faraday, et intégrer par rapport au temps en prenant la constante d'intégration égale à $\overrightarrow{0}$.

L'équation de Klein-Gordon est une équation de propagation de la forme

$$\Delta \xi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\omega_c^2}{c^2} \xi, \qquad (2.16)$$

où ω_c est une pulsation caractéristique, appelée pulsation de coupure.

C'est une équation de propagation, mais certains auteurs considèrent qu'il ne s'agit pas une équation « d'onde » à strictement parler, puisque les solutions de l'équation de d'Alembert ne sont pas solution de l'équation de Klein-Gordon.

Remarque: L'équation de Klein-Gordon joue un rôle très important en physique des hautes énergie, puisqu'elle est l'extension relativiste de l'équation de Schrödinger pour des particules massives de spin nul.

2.1.2 Équation des télégraphistes

L'équation des télégraphistes modélise la propagation du mode fondamental d'un câble coaxial dissipatif. Au modèle des constantes réparties présenté §1.1.1, on adjoint deux sources de dissipation, comme représenté figure 2.1:

- \triangleright La première est l'effet Joule dans les conducteurs. Il se modélise par l'ajout dans l'élément de câble d'une résistance $r \, \delta x$ montée en série avec la bobine.
- \triangleright La seconde est la perte de charge due au caractère imparfait de l'isolant séparant l'âme et la gaine. Elle se modélise par l'ajout dans l'élément de câble d'une conductance $g \, \delta x$ montée en parallèle avec le condensateur.

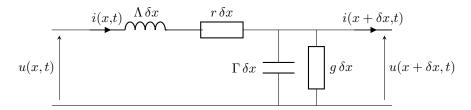


Fig. 2.1 – Modélisation mésoscopique d'un câble coaxial dissipatif. Une portion mésoscopique de câble de longueur δx est modélisée par un circuit LC, d'inductance $\Lambda \delta x$ et de capacité $\Gamma \delta x$, comme dans le modèle des constantes réparties. On lui ajoint une résistance linéique $r \delta x$ et une conductance linéique $g \delta x$.

Remarque: Une résistance et une conductance décrivent physiquement le même effet. Pourtant, on choisit volontairement deux descriptions différentes. Un premier aspect est que l'on souhaite avoir des équations linéaires en δx , ce qui exige de traiter différemment les résistances mises « en série » ou « en parallèle ». Le deuxième intérêt de cette modélisation est qu'elle permet de retrouver le modèle du câble idéal dans la limite r et g petits, ce qui permet de les comprendre comme des perturbations.

L'application des lois de Kirchoff à un élément mésoscopique de câble permet d'aboutir à l'équation des télégraphistes, qui s'écrit par exemple pour la tension

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\Lambda g + \Gamma r) \frac{\partial u}{\partial t} + r g u,}$$
(2.17)

où la célérité c vaut toujours

$$c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} \,. \tag{2.18}$$

2.1.3 Synthèse : propagation linéaire

De nombreuses équations aux dérivées partielles peuvent être qualifiées d'équations de propagation : on en revient à la difficulté de définir précisément ce qu'est une onde. Malgré tout, certains aspects sont très généraux et méritent d'être mentionnés.

Une **équation de propagation linéaire** est souvent une équation de d'Alembert avec un second membre linéaire par rapport au champ ondulatoire.

De façon semblable aux deux exemples que nous venons de présenter, de nombreux phénomènes de propagation peuvent être décrits par une équation de ce type. En particulier, de nombreuses corrections aux modèles simplifiés donnant lieu à l'équation de d'Alembert sont linéaires. C'est par exemple le cas lors de la prise en compte de la raideur d'une corde vibrante [1, exercice 7.1], de l'amortissement des ondes acoustiques par conduction thermique ou relaxation moléculaire [2, exercices 16.A.4 et 16.B.4] ou des effets de la viscosité pour les ondes acoustiques dans les fluides [7, §V.C]. Néanmoins, certaines équations décrivant des phénomènes propagatifs n'entrent pas dans la définition donnée ci-dessus. Deux exemples me semblent particulièrement importants.

Le premier est celui des ondes électromagnétiques dans un diélectrique, où le terme de dérivée temporelle fait intervenir une convolution avec la fonction réponse du diélectrique. On s'affranchit en général de la difficulté en considérant directement des ondes harmoniques sans écrire l'équation de propagation dans l'espace des temps ...

mais il serait grossièrement faux d'écrire l'équation de propagation en faisant intervenir simultanément une dérivée temporelle et un indice $n(\omega)$ dépendant de la fréquence.

Le deuxième exemple emblématique est celui des ondes gravito-capillaires à la surface d'un liquide [12, 13]. L'équation de propagation s'écrit alors en un point de la surface du fluide

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial z} = 0, \qquad (2.19)$$

où φ est le potentiel dont dérive le champ des vitesses ($\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$), g l'intensité de la pesanteur, ρ la masse volumique du liquide et γ sa tension de surface. Une telle équation ne présente pas le terme en $\partial^2 \varphi / \partial x^2$ qu'on trouve dans l'équation de d'Alembert, mais il s'agit malgré tout d'une équation de propagation linéaire. Cet exemple fait l'objet d'un traitement plus approfondi dans le cours de Pierre Lidon sur la capillarité.

La linéarité va permettre d'exploiter toute la puissance de l'analyse de Fourier, puisque toutes les solutions s'exprimeront comme combinaison linéaire d'OPPH, qui forment la base de Fourier.

Remarque: Le formalisme de Fourier est utilisable même avec des équations non-linéaires, mais son usage ne simplifie pas (ou pas autant) le problème, puisqu'il ne permet plus de passer d'une équation aux dérivées partielles à une équation algébrique.

Dans la suite du chapitre, nous commencerons par étudier ce qu'il advient d'une OPPH dans un milieu régi par une équation de propagation linéaire. Nous nous intéresserons ensuite aux effets résultants sur la propagation de paquets d'ondes.

2.2 Propagation d'une onde plane pseudo-progressive harmonique

Étudions les (éventuelles) solutions à l'équation de propagation de la forme

$$\xi(x,t) = \xi_0 e^{i(kx - \omega t)} . \tag{2.20}$$

On suppose pour ce faire que le milieu de propagation est excité depuis l'extérieur à la fréquence ω , qui est donc fixée et imposée, alors que le nombre d'onde k « s'ajuste » en conséquence. Ainsi, le point de vue est différent de celui adopté §1.4.2, puisque c'est ω qui est désormais privilégié.

2.2.1 Relation de dispersion complexe

Rappelons que la relation de dispersion est la relation entre k et ω nécessaire pour que l'OPPH soit solution de l'équation de propagation. Elle s'obtient en injectant l'expression de l'OPPH dans l'équation de propagation.

Cas de l'équation des télégraphistes

Cherchons

$$u(x,t) = U_0 e^{i(kx - \omega t)}$$
(2.21)

C'est une solution de l'équation des télégraphistes si

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = -i\omega \left(\Lambda g + \Gamma r\right) + rg \tag{2.22}$$

c'est-à-dire si

$$k^{2} = \frac{\omega^{2}}{c^{2}} + i\omega \left(\Lambda g + \Gamma r\right) - r g, \qquad (2.23)$$

ce qui est la relation de dispersion de l'équation des télégraphistes. Ainsi, k est un nombre complexe à partie imaginaire non-nulle! L'onde cherchée n'est donc **pas** une onde plane progressive harmonique, puisqu'elle n'est pas progressive. Toutefois, pour insister sur l'analogie formelle avec une OPPH on parle d'onde plane pseudo-progressive harmonique.

Une **onde plane pseudo-progressive harmonique** est une onde plane harmonique dont le nombre d'onde est complexe.

Quitte à énoncer des évidences, mentionnons que la notion de nombre d'onde complexe n'est bien définie que pour les champs complexes! L'étendre aux champs réels nécessite les précautions qui suivent.

Notons k' et k'' les parties réelle et imaginaire de k, qui dépendent de ω via la relation de dispersion. Dans le cas présent,

$$u(x,t) = |U_0| e^{i\phi} e^{-k''x} e^{i(k'x - \omega t)}$$
(2.24)

ce qui s'écrit en revenant aux grandeurs réelles

$$u(x,t) = |U_0| e^{-k''x} \cos(k'x - \omega t + \phi)$$
(2.25)

Le terme $e^{-k''x}$ est un terme d'atténuation, alors que $\cos(k'x - \omega t + \phi)$ est un terme de propagation d'OPPH, auquel on peut associer la vitesse de phase ω/k' .

La partie réelle du nombre d'onde complexe caractérise la vitesse de propagation d'une OPPH.

La vitesse de phase vaut

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k'}, \qquad (2.26)$$

alors que la définition de la vitesse de groupe est étendue par

$$v_{\rm g} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'} \,. \tag{2.27}$$

La partie imaginaire du vecteur d'onde complexe caractérise quant à elle l'atténuation de l'onde, qui a lieu sur une longueur caractéristique

$$\delta = \frac{1}{k''}. (2.28)$$

Remarque: La propagation peut en principe s'accompagner d'atténuation ou d'amplification, si le milieu est actif (penser par exemple aux lasers). Cela se voit à partir du signe relatif de k', k'' et du sens de propagation de l'onde, mais la relation spécifique **dépend des conventions choisies**. Dans le cas présent, si k' > 0 alors l'onde se propage dans le sens des x croissants. Elle sera amortie si k'' > 0 et amplifiée si k'' < 0. On peut montrer ici que l'onde est nécessairement amortie, ce qui est conforme à l'intuition

Remarque bis : Dans la série « attention, conventions », remarquons que certains auteurs notent k = k' + ik'' (c'est ce choix qui est fait dans ce cours), alors que d'autres préfèrent noter k = k' - ik''.

Cas de l'équation de Klein-Gordon

La relation de dispersion de l'équation de Klein-Gordon s'écrit

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega_c^2}{c^2}$$
 (2.29)

soit

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \,. \tag{2.30}$$

- \triangleright Si $\omega > \omega_c$, k est réel positif : il y a propagation $(k' \neq 0)$ sans aucune atténuation (k'' = 0).
- ▷ Si au contraire $\omega < \omega_c$, k^2 est réel mais négatif, et donc k est imaginaire pur : il n'y a pas de propagation, seulement de l'atténuation.

On comprend l'origine de la dénomination pulsation de coupure de ω_c .

Remarque : La même forme de relation de dispersion se rencontre également dans les guides d'ondes, nous le montrerons §3.2.4.

Plaçons-nous dans le domaine de pulsation adéquat, et calculons la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Par définition,

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k'} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{\rm p}^2}}, \qquad (2.31)$$

soit

$$v_{\varphi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\rm p}}{\omega}\right)^2}} \,. \tag{2.32}$$

On trouve donc $v_{\varphi} > c$, alors que c est la vitesse de la lumière dans le vide! Pour inattendu qu'il soit, ce résultat ne viole pas pour autant la théorie de la relativité. En effet, cette dernière stipule que l'on ne peut pas transmettre d'information ni d'énergie à une vitesse supérieure à c. Or une OPPH ne peut de toutes façons pas contenir d'information, elle n'est au plus qu'une porteuse, dont l'enveloppe code l'information . . . mais nous avons montré §1.4.3 que l'enveloppe ne se propage pas à la vitesse de phase mais à la vitesse de groupe. L'aspect énergétique est moins

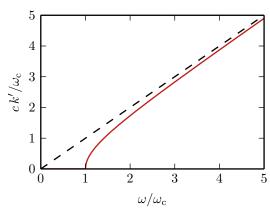


Fig. 2.2 – Relation de dispersion de Klein-Gordon. On représente la partie réelle k' du nombre d'onde complexe en fonction de la pulsation ω . Les grandeurs représentées ont été normalisées respectivement par la vitesse de la lumière c et la pulsation de coupure ω_c . La relation de dispersion du vide, $kc = \omega$, est représentée en traits pointillés noirs pour comparaison.

intuitif, puisqu'une OPPH peut bel et bien transporter de l'énergie [2, §15.2]. Malgré tout, un bilan énergétique [2, §16.4] permet de montrer que la vitesse de l'énergie n'est pas la vitesse de phase mais la vitesse de groupe. En effet, dans un plasma, l'énergie de l'onde n'existe pas seulement sous forme électromagnétique mais est aussi partiellement stockée par les électrons sous forme d'énergie cinétique.

Pour terminer de se rassurer, calculons donc la vitesse de groupe. Elle pourrait s'obtenir en calculant directement la dérivée de la relation de dispersion, mais cette méthode est en général très maladroite. Il est préférable de différentier la relation de dispersion. Ici,

$$d(k^2) = d\left(\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}\right), \qquad (2.33)$$

soit

$$2k' dk' = \frac{2\omega}{c^2} d\omega, \qquad (2.34)$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'} = c^2 \frac{k'}{\omega} = \frac{c^2}{v_{\omega}} \tag{2.35}$$

et finalement

$$v_{\rm g} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\rm p}}{\omega}\right)^2}.$$
 (2.36)

La vitesse de groupe est donc bien inférieure à c, ce qui est rassurant quant à la validité du modèle de plasma développé §2.1.1.

Remarque: On trouve ici la relation remarquable

$$v_{\varphi} v_{g} = c^{2}. \tag{2.37}$$

Attention, cette relation n'est absolument pas générale, mais propre à une relation de dispersion de la forme $\omega^2 = k^2 c^2 + cte$

2.2.2 Dispersion, atténuation, ou les deux?

Rappelons que la propagation est dite **dispersive** si elle est telle que la vitesse de phase dépend de la pulsation ω , ce qui est équivalent à une dépendance non linéaire de k' en ω . Une idée commune est que la dispersion s'accompagne nécessairement d'atténuation. Bien qu'étant très fréquent, ce cas n'est pas général pour autant. Les deux équations de propagation établies précédemment donnent lieu à toutes les situations possibles.

La propagation se fait sans dispersion ni atténuation

C'est bien sûr le cas lorsqu'elle est décrite par l'équation de d'Alembert.

La propagation est accompagnée de dispersion et d'atténuation

C'est le cas général, que l'on rencontre par exemple dans le cas du câble coaxial dissipatif pris quelconque.

La propagation est dispersive mais sans atténuation

Ce cas se rencontre par exemple pour un plasma excité à une fréquence supérieure à la fréquence plasma. Dans ce cas,

$$k = k' = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{\rm p}^2}$$
 (2.38)

mais k' n'est pas linéaire en ω .

La propagation est atténuée mais pas dispersive

Il est possible d'atteindre ce régime, assez inattendu, avec un câble coaxial judicieusement choisi. En effet, en se rappelant que $c = 1/\sqrt{\Lambda \Gamma}$, la relation de dispersion (2.23) se factorise sous la forme

$$k^{2} = \frac{\omega^{2}}{c^{2}} \left[1 + i \frac{c^{2}}{\omega} \left(\Lambda g + \Gamma r \right) - r g \frac{c^{2}}{\omega^{2}} \right]$$
 (2.39)

$$= \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + i \left(\frac{r}{\Lambda \omega} + \frac{g}{\omega \Gamma} \right) - \frac{r g}{\Lambda \Gamma \omega^2} \right]$$
 (2.40)

$$k^{2} = \frac{\omega^{2}}{c^{2}} \left(1 + i \frac{g}{\omega \Gamma} \right) \left(1 + i \frac{r}{\Lambda \omega} \right). \tag{2.41}$$

Si le câble est fabriqué en vérifiant la condition de Heaviside, à savoir

$$\frac{g}{\Gamma} = \frac{r}{\Lambda} \,, \tag{2.42}$$

alors une nouvelle factorisation apparaît, puisque

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{r}{\Lambda \omega} \right)^2 \,, \tag{2.43}$$

et donc

$$k = \pm \frac{\omega}{c} \left(1 + i \frac{r}{\Lambda \omega} \right)$$
 (2.44)

Un tel câble permet donc d'atteindre $k' = \omega/c$, soit $v_{\varphi} = c$, ne dépendant pas de ω . Le câble est alors non dispersif, ce qui ne l'empêche pas par ailleurs d'être « très » atténuatif. Remarquons qu'en plus la longueur d'atténuation

$$\delta = \frac{c}{\omega} \frac{\Lambda \omega}{r} = \frac{\Lambda c}{r} \tag{2.45}$$

ne dépend pas non plus de ω . Ainsi, si le signal à transmettre contient plusieurs composantes harmoniques de fréquences différentes, elles sont absorbées de la même façon. Le signal n'est donc pas déformé, mais seulement atténué.

Application numérique : Les câbles coaxiaux réels sont souvent loin de vérifier la condition de Heaviside. Pour un câble servant à une ligne téléphonique souterraine, des valeurs typiques seraient

$$\begin{split} r &= 4 \times 10^{-2} \, \Omega \cdot \mathrm{m}^{-1} \quad ; \quad g = 2 \times 10^{-9} \, \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1} \, ; \\ \Lambda &= 3 \times 10^{-7} \, \mathrm{H} \cdot \mathrm{m}^{-1} \quad ; \quad \Gamma = 4 \times 10^{-11} \, \mathrm{F} \cdot \mathrm{m}^{-1} \, . \end{split}$$

d'où

$$\frac{r}{\Lambda} = 1 \times 10^5 \,\mathrm{s}^{-1}$$
 et $\frac{g}{\Gamma} = 50 \,\mathrm{s}^{-1}$ (2.46)

2.2.3 Onde évanescente vs. onde absorbée

Parmi les différents cas énumérés §2.2.1, un n'a pas encore été abordé. Il s'agit du cas $\omega \leq \omega_c$ de l'équation de Klein-Gordon, qui donne un nombre d'onde k imaginaire pur, interdisant la propagation.

Une « onde » forcée dans un milieu où elle ne peut pas se propager est appelée **onde évanescente**. Formellement, une onde évanescente est caractérisée par un nombre d'onde imaginaire pur.

Exemple du plasma excité à basse fréquence : onde évanescente

Considérons une interface (un peu artificielle) entre du vide et un plasma, représentée figure 2.3. Les deux milieux sont considérés semi-infinis. Depuis le vide, une onde électromagnétique plane progressive harmonique est envoyée sur le plasma. On suppose sa pulsation ω inférieure à la pulsation plasma. Pour simplifier les calculs, supposons-la polarisée rectilignement.

> Remarque: Une façon d'écrire les mêmes équations dans un cadre moins artificiel est de considérer un métal dans la limite des très hautes fréquences, ou de supposer que le plasma est placé dans un champ magnétique statique de confinement, comme ceux utilisés dans un tokamak.

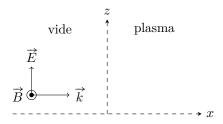


Fig. 2.3 – Onde évanescente dans un plasma. Une interface entre du vide et un plasma est située en x=0. Une OPPH polarisée rectilignement est envoyée depuis le vide vers le plasma. Sa pulsation est inférieure à la pulsation

Dans le vide, le champ complexe de l'onde s'écrit sans surprise

$$\vec{E} = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \vec{e}_z, \qquad (2.47)$$

avec $k = \omega/c$ réel, vérifiant la relation de dispersion de l'équation de d'Alembert. Le champ électrique étant tangentiel donc continu à l'interface, l'onde s'écrit dans le plasma

$$\vec{E} = E_0 e^{i(k_p x - \omega t)} \vec{e}_z, \qquad (2.48)$$

où cette fois $k_{\rm p}={\rm i}k''$ est imaginaire pur. Ainsi, le champ complexe de la pseudo-OPPH s'écrit dans le plasma

$$\overrightarrow{E} = E_0 e^{-k''x} e^{-i\omega t} \overrightarrow{e}_z.$$
 (2.49)

Déduisons-en le champ magnétique (complexe) à l'aide de la relation de structure

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \,. \tag{2.50}$$

En effet, cette relation se généralise aux écritures complexes des pseudo-OPPH: les hypothèses qui jouent pour l'établir sont que l'onde est plane et harmonique, mais pas progressive.

🥉 🕉 Attention! Lorsque k est complexe comme ici, l'équation tient seulement pour les champs complexes, mais pas pour les champs réels.

Ainsi,

$$\vec{B} = i \frac{k''}{\omega} E_0 e^{-k''x} e^{-i\omega t} (\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z)$$
(2.51)

$$\vec{B} = i \frac{k''}{\omega} E_0 e^{-k''x} e^{-i\omega t} (\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z)$$

$$\vec{B} = -i \frac{k''}{\omega} E_0 e^{-k''x} e^{-i\omega t} \vec{e}_y.$$
(2.51)

Pour bien faire apparaître la structure de l'onde, revenons aux grandeurs réelles :

$$\begin{cases}
\vec{E}_{\mathbb{R}} = E_0 e^{-k''x} \cos(\omega t) \vec{e}_z \\
\vec{B}_{\mathbb{R}} = -\frac{k''}{\omega} E_0 e^{-k''x} \sin(\omega t) \vec{e}_y
\end{cases}$$
(2.53)

Les dépendances spatiale et temporelle sont alors découplées :

Une onde évanescente est une onde stationnaire.

Calculons enfin le vecteur de Poynting moyen,

$$\left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle = \int_0^T \frac{\mathrm{d}t}{T} \left(\overrightarrow{E}_{\mathbb{R}} \wedge \frac{\overrightarrow{B}_{\mathbb{R}}}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\overrightarrow{E} \wedge \frac{\overrightarrow{B}^*}{\mu_0} \right) .$$
 (2.54)

à à Attention! La première égalité concerne les champs *réels* seulement, alors que la seconde concerne les champs complexes.

Les champs étant en quadrature de phase,

$$\left| \left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle = \overrightarrow{0} \right|.$$
(2.55)

Une onde évanescente ne transporte en moyenne pas d'énergie. Toute l'énergie incidente est réfléchie vers le milieu d'où vient l'excitation, et aucune énergie n'est cédée par l'onde évanescente au milieu de « propagation ».

Remarque 1 : Le vecteur de Poynting n'est pas nul à tout instant, mais seulement en moyenne. Cela traduit le fait que toute l'énergie « entrant » dans le milieu pendant une demi-période « ressort » pendant la demi-période suivante.

Remarque 2 : Puisque l'onde est stationnaire, il était clair dès le début qu'elle ne transportait pas d'énergie. On aurait donc pu se passer du calcul du vecteur de Poynting, seulement rappelé à des fins de rafraîchissement mémoriel.

Remarque 3: L'hypothèse de milieux semi-infinis joue un rôle plus important qu'il n'y paraît. Si la longueur du milieu dans lequel l'onde est évanescente devient de l'ordre de la longueur d'atténuation, l'évanescence est frustrée, et de l'énergie peut malgré tout passer au travers du milieu. C'est un effet complètement analogue à l'effet tunnel. Mathématiquement, le champ (2.49) ne peut plus s'écrire sous cette forme, et il faut prendre en compte une combinaison linéaire d'un champ en $e^{-k''x}$ et d'un autre en $e^{+k''x}$. On est donc en présence non plus d'une onde évanescente, mais d'une superposition d'ondes évanescentes, qui n'est elle-même plus vraiment évanescente. Ces aspects sont étudiés sous l'angle de la réflexion totale frustrée dans le Cap Prépa PSI [11, problème 24.2].

Comparaison à une onde absorbée

Pour lever toute ambiguïté sur la nature très particulière de l'onde évanescente, comparons-la à une onde absorbée. Considérons par exemple le cas d'une onde électromagnétique dans un diélectrique absorbant. La relation de dispersion (complexe) de ce dernier s'écrit

$$k^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \,, (2.56)$$

où n est l'indice complexe du diélectrique, relié à susceptibilité χ du diélectrique par

$$n(\omega)^2 = 1 + \chi(\omega). \tag{2.57}$$

Le nombre d'onde k = k' + ik'' est alors complexe. Une situation analogue se rencontre lors de l'étude de l'effet de peau dans un conducteur, et alors

$$k' = k'' = \sqrt{\frac{\mu_0 \, \gamma \, \omega}{2}} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\delta} \,, \tag{2.58}$$

où γ est la conductivité du conducteur et δ est son épaisseur de peau.

En reprenant la même configuration que précédemment,

$$\begin{cases}
\vec{E} = E_0 e^{-k''x} e^{i(k'x - \omega t)} \vec{e}_z \\
\vec{B} = -\frac{k' + ik''}{\omega} E_0 e^{-k''x} e^{i(k'x - \omega t)} \vec{e}_y
\end{cases}$$
(2.59)

Une fois encore, pour bien analyser la structure de l'onde, revenons aux champs réels.

$$\vec{E}_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re} \vec{E} = E_0 e^{-k''x} \cos(k'x - \omega t) \vec{e}_z$$
(2.60)

et

$$\vec{B}_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re} \vec{B} = -\frac{k'}{\omega} E_0 e^{-k''x} \cos(k'x - \omega t) \vec{e}_y + \frac{k''}{\omega} E_0 e^{-k''x} \sin(k'x - \omega t) \vec{e}_y$$
(2.61)

$$= \frac{E_0}{\omega} e^{-k''x} \left[k'' \sin(k'x - \omega t) - k' \cos(k'x - \omega t) \right] \vec{e}_y.$$
 (2.62)

Une onde absorbée n'est pas stationnaire : ses dépendances en espace et en temps sont toujours couplées.

Remarque: En revanche, il s'agit toujours d'une pseudo-OPPH, puisque le terme entre crochets pourrait se factoriser en $\cos(k'x - \omega t + \phi)$.

De plus, les champs sont déphasés mais pas en quadrature. La moyenne du vecteur de Poynting n'est donc pas nulle.

$$\left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\overrightarrow{E} \wedge \frac{\overrightarrow{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \,\omega} \,\mathrm{e}^{-2k''x} \operatorname{Re}(k' - \mathrm{i}k'') \overrightarrow{e}_x$$
 (2.63)

$$\left| \left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle = \frac{E_0^2 \, k'}{2\mu_0 \, \omega} \, e^{-2k''x} \, \overrightarrow{e}_x \right| \tag{2.64}$$

Une onde absorbée transporte de l'énergie.

Cette dernière est absorbée et dissipée dans le milieu de propagation et n'est pas réfléchie.

Attention, cela ne veut dire pour autant qu'aucune fraction de l'énergie entrant dans le diélectrique n'en ressort. En effet, sur une fraction de période dépendant du déphasage entre les champs \overrightarrow{E} et \overrightarrow{B} , le vecteur de Poynting instantané est orienté selon $-\overrightarrow{e}_x$, signe que de l'énergie passe du diélectrique au vide. En revanche, en moyenne, l'énergie entre globalement dans le diélectrique où elle est dissipée sous forme d'énergie thermique.

Remarque: Cela ne signifie pas non plus qu'il n'y a pas de réflexion à l'interface.

Onde évanescente et réflexion totale [14, §3.2]

Des ondes évanescentes se rencontrent également dans un contexte un peu différent, celui de la réflexion totale. La propagation est alors « interdite » non pas à cause de la réponse du second milieu, mais en raison de la configuration relative de l'onde incidente et de l'interface.

Considérons le cas représenté figure 2.4 d'une OPPH se propageant dans un milieu diélectrique d'indice n réel et arrivant sur une interface avec du vide en formant un angle d'incidence θ . Notons \vec{k}_i , \vec{k}_r et \vec{k}_t les vecteurs d'onde incident, réfléchi et transmis.

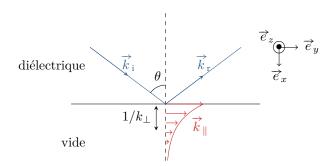


Fig. 2.4 – Réflexion totale. Une OPPH arrive sur une interface entre le vide et un diélectrique en formant un angle d'incidence $\theta > \theta_c$, donnant lieu à une réflexion totale, accompagnée d'une onde évanescente.

Pour simplifier, supposons de nouveau que l'onde est polarisée rectilignement selon \overrightarrow{e}_z ,

$$\vec{E}_{i} = E_{0} e^{i(\vec{k}_{i} \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{e}_{z}. \tag{2.65}$$

Supposons que l'angle d'incidence est supérieur à l'angle critique donnant lieu à un phénomène de réflexion totale,

$$\theta_{\rm c} = \arcsin\frac{1}{n} \,. \tag{2.66}$$

Il existe pourtant une onde transmise dans le vide, dont le champ électrique vaut

$$\vec{E}_{t} = E_{0t} e^{-k_{\perp} x} e^{i(k_{\parallel} y - \omega t)} \vec{e}_{z} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_{\parallel} = n \frac{\omega}{c} \sin \theta = n k_{i}^{y} \\ k_{\perp} = \frac{\omega}{c} \sqrt{n^{2} \sin^{2} \theta - 1} \end{cases}$$
 (2.67)

L'onde transmise lors d'une réflexion totale a une structure mixte, elle est évanescente dans la direction orthogonale à l'interface et progressive dans la direction de l'interface.

Dans ce cas, les plans équiamplitude (x = cte) sont orthogonaux aux plans équiphase (y = cte), ce qui diffère du cas d'une onde amortie.

2.3 Propagation d'un paquet d'onde en présence de dispersion

Considérons maintenant que l'atténuation étudiée à la section précédente est suffisamment faible pour être négligée. Le nombre d'onde k est donc réel, dépendant de la fréquence d'excitation ω par le biais de la relation de dispersion. Pour faciliter les interprétations et contourner les difficultés mentionnées à la fin du §1.4.2, considérons plutôt le nombre d'onde k connu, et déduisons-en la fréquence de forçage ω grâce à la relation de dispersion $\omega(k)$.

Remarque: Cela revient à prendre un point de vue « d'observateur » qui mesure k, par exemple via une mesure de longueur d'onde, plutôt qu'un point de vue « d'opérateur », qui envoie un forçage sur le milieu depuis l'extérieur.

Enfin, comme §1.4.3, considérons un paquet d'onde se propageant dans une direction bien définie, c'est-à-dire tel que $\hat{\xi}(k)$ ne prenne des valeurs non-nulles que dans l'intervalle $[k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k]$ avec $k_0 > 0$ et $\Delta k \ll k_0$. Écrivons donc la relation de dispersion sous forme d'un développement limité autour de $k = k_0$:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \frac{d\omega}{dk} \bigg|_{k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k_0} (k - k_0)^2 + \mathcal{O}\left((k - k_0)^3\right). \tag{2.68}$$

2.3.1 Dispersion au premier ordre, glissement de phase

Commençons par étudier le premier ordre du développement limité, en supposant que le terme d'ordre 2 est négligeable pour le paquet d'onde considéré. Quitte à enfoncer des portes ouvertes, notons que deux origines sont possibles pour cela, puisqu'il s'agit de comparer

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\Big|_{k_0}$$
 à $\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\Big|_{k_0} \Delta k$. (2.69)

La petitesse du terme d'ordre 2 peut donc venir ou bien des propriétés intrinsèques du milieu, ou bien de l'étroitesse du paquet d'onde lui-même. Ainsi, un milieu n'est « peu » ou « très » dispersif **que** vis-à-vis d'un paquet d'onde donné.

Ce cas est alors formellement identique à celui présenté §1.4.3. En particulier, la décomposition en porteuse et enveloppe est toujours valable, et on peut écrire le paquet d'ondes sous la forme

$$\xi(x,t) = \xi_{\rm e} (x - v_{\rm g} t) \exp i \left[k_0 x - \omega(k_0) t + \phi(k_0) \right]. \tag{2.70}$$

Néanmoins, la relation de dispersion n'est plus linéaire comme pour l'équation de d'Alembert, et par conséquent

$$v_{\varphi} = \frac{\omega(k_0)}{k_0} \neq v_{\rm g} = \left. \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \right|_{k_0}. \tag{2.71}$$

La porteuse et l'enveloppe ne se propagent donc pas à la même vitesse : la porteuse glisse à l'intérieur de l'enveloppe. En règle générale, dans le régime dit de dispersion normale, $v_{\varphi} > v_{\rm g}$, la porteuse se déplace donc plus vite que l'enveloppe. Notons que cette dernière n'est pas déformée au cours de la propagation, elle conserve donc son caractère d'onde plane progressive.

Remarque: Attention, l'onde n'est pas une onde plane progressive pour autant, puisque sa forme change au cours de la propagation en raison du glissement de la porteuse dans l'enveloppe.

La dispersion au premier ordre se traduit par un glissement de la porteuse dans l'enveloppe, appelé **glissement de phase**. La forme de l'enveloppe est conservée au cours de la propagation, le paquet d'ondes se propage sans étalement ni déformation.

L'évolution d'un paquet d'ondes en présence de dispersion à l'ordre 1 est représentée figure 2.5^{1} .

2.3.2 Dispersion au deuxième ordre, équation d'enveloppe

Position du problème

Supposons maintenant que la dispersion est « un peu plus forte mais pas trop non plus ». Le terme d'ordre 2 du développement limité de la relation de dispersion n'est alors plus négligeable, mais demeure suffisant pour décrire la physique de façon satisfaisante.

La porteuse est issue des termes d'ordre 0 du développement limité de la relation de dispersion. Ces derniers étant toujours présents, la décomposition en porteuse et enveloppe est toujours valable. Cependant, l'enveloppe n'est plus

^{1.} Pour une représentation dynamique, voir l'article « vitesse d'une onde » sur Wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Vitesse_d'une onde

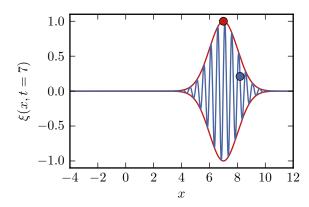


Fig. 2.5 – Propagation d'un paquet d'onde en présence de dispersion au premier ordre. Ici, la vitesse de phase et la vitesse de groupe (égale à 1 par choix d'unité) diffèrent : le point bleu, lié à la porteuse, se déplace plus vite que le point rouge, lié à l'enveloppe. Il y a glissement de la phase de la porteuse dans l'enveloppe, mais sans déformation de celle-ci. Le paquet d'onde représenté est gaussien, d'écart type 1, et la porteuse a pour longueur d'onde 0.5, alors qu'on a choisi $v_{\varphi}/v_{\rm g}=1.3$.

fonction de la seule variable $x-v_{\rm g}t$: ses dépendances en espace et temps sont couplées de façon plus complexe, et elle va se déformer au cours de la propagation. Ainsi, le paquet d'ondes s'écrit désormais

$$\xi(x,t) = \xi_{e}(x,t) \exp i \left[k_0 x - \omega(k_0)t + \phi(k_0) \right]. \tag{2.72}$$

L'objectif de cette section est d'étudier la déformation de l'enveloppe.

Équation d'enveloppe

Établissons l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction d'enveloppe $\xi_{\rm e}(x,t)$. Une démonstration rigoureuse dans l'espace de Fourier est possible [3, §21.III], mais le décalage des pulsations et des nombres d'ondes par $\omega(k_0)$ et k_0 la rend un peu opaque. Privilégions plutôt une approche moins technique et plus qualitative [15, §14.7].

Cette approche repose sur l'observation que l'onde harmonique

$$\xi^{h}(x,t) = \exp i \left[kx - \omega(k)t \right] \tag{2.73}$$

est solution de l'équation de propagation pour toute valeur de k, par définition même de la relation de dispersion $\omega(k)$. Par conséquent, l'équation d'enveloppe admet pour solution évidente ce qui serait « l'enveloppe » de l'onde harmonique, à savoir

$$\xi_{\rm e}^{\rm h} = \exp i \left[(k - k_0) x - (\omega(k) - \omega_0) t - \phi_0 \right],$$
 (2.74)

où l'on introduit

$$\omega_0 \stackrel{\text{def.}}{=} \omega(k_0) \quad \text{et} \quad \phi_0 \stackrel{\text{def.}}{=} \phi(k_0).$$
 (2.75)

Les dérivées partielles de $\xi_{\rm e}^{\rm h}$ valent alors

$$\frac{\partial \xi_{\rm e}^{\rm h}}{\partial x} = i (k - k_0) \xi_{\rm e}^{\rm h} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \xi_{\rm e}^{\rm h}}{\partial t} = -i (\omega(k) - \omega_0) \xi_{\rm e}^{\rm h} \tag{2.76}$$

Utilisons alors la relation de dispersion tronquée à l'ordre 2, écrite sous la forme

$$\omega(k) - \omega_0 = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \omega}{dk^2} \right|_{k_0} (k - k_0)^2.$$
 (2.77)

En la multipliant par $\xi_{\rm e}^{\rm h}$ et en identifiant les dérivées, on aboutit à

$$i\frac{\partial \xi_{e}^{h}}{\partial t} = -i\frac{d\omega}{dk}\bigg|_{k_{0}} \frac{\partial \xi_{e}^{h}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{d^{2}\omega}{dk^{2}}\bigg|_{k_{0}} \frac{\partial^{2}\xi_{e}^{h}}{\partial x^{2}}$$
(2.78)

Remarquons que cette équation est indépendante de k: quel que soit le nombre d'onde considéré, la fonction d'enveloppe associée vérifiera la même équation. Comme elle est en plus linéaire, elle est valable sans restriction sur la forme du paquet d'ondes $\xi(x,t)$. Cette équation est donc l'équation cherchée, appelée **équation d'enveloppe**. Elle s'écrit au deuxième ordre

$$i\left(\frac{\partial \xi_{e}}{\partial t} + v_{g}\frac{\partial \xi_{e}}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2} \left.\frac{d^{2}\omega}{dk^{2}}\right|_{k_{0}} \frac{\partial^{2}\xi_{e}}{\partial x^{2}}.$$
(2.79)

Remarque 1 : Le raisonnement mené ici se généralise à tout ordre du développement de la relation de dispersion. L'équation d'enveloppe est toujours linéaire, mais fait intervenir des dérivées d'ordre plus élevé.

Remarque 2 : L'équation de propagation étant linéaire, on s'attendait à trouver l'équation d'enveloppe linéaire également.

Nature de l'équation d'enveloppe [3, §21.III]

Plaçons-nous maintenant dans le référentiel lié au paquet d'onde, qui se déplace à la vitesse de groupe $v_{\rm g}$ par rapport au référentiel de départ. Cela n'est valable que si la position du paquet d'onde peut être définie sans ambiguïté, c'est-à-dire seulement lorsque la dispersion est faible. C'est en particulier le cas lorsqu'un développement à l'ordre 2 de la relation de dispersion est légitime. Encore une fois, la validité de cette approximation prend sa source dans l'étroitesse du spectre du paquet d'onde relativement aux propriétés dispersives du milieu, ou inversement à la faible dispersion du milieu relativement à la largeur du spectre du paquet d'ondes.

Définissons alors les coordonnées dans ce nouveau référentiel,

$$X = x - v_{\rm g}t \qquad \text{et} \qquad T = t. \tag{2.80}$$

Alors,

$$\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial X} \\
\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T} = -v_{g} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial T}
\end{cases} (2.81)$$

Remarque : Contrairement à ce qu'on aurait pu croire, c'est la dérivée par rapport à t qui est non-triviale. Attention à ne pas se faire piéger!

Dans le référentiel lié au paquet d'ondes, l'équation d'enveloppe s'écrit alors

$$i\frac{\partial \xi_{e}}{\partial T} + P\frac{\partial^{2} \xi_{e}}{\partial X^{2}} = 0, \qquad (2.82)$$

où pour simplifier les notations on note

$$P \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} \left. \frac{\mathrm{d}^2 \omega}{\mathrm{d}k^2} \right|_{k_0} . \tag{2.83}$$

On reconnaît alors dans (2.82) l'équation de Schrödinger d'une particule libre,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i \,\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \,. \tag{2.84}$$

L'équation d'enveloppe à l'ordre 2 exprimée dans le référentiel du paquet d'ondes est une équation de Schrödinger.

Ces deux équations ont donc des propriétés communes. Notons en particulier que

L'équation de Schrödinger et l'équation d'enveloppe **ne sont pas** des équations de diffusion. Contrairement à l'équation de diffusion, elles sont invariantes par renversement du sens du temps.

Cela résultat a priori contre-intuitif est dû à la fois à la présence du i complexe dans l'équation et au sens physique de la fonction d'onde ou de la fonction d'enveloppe [6, §16.5]. En effet, faisons le changement de variable $t\mapsto -t$ dans l'équation de Schrödinger, et prenons-en le complexe conjugué :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} = i \hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t}$$
 (2.85)

Cette équation n'est autre que l'équation de Schrödinger mais pour la fonction d'onde complexe conjuguée ψ^* . Néanmoins, ψ et ψ^* décrivent exactement la $m\hat{e}me$ physique, puisque seul $|\psi|^2 = |\psi^*|^2$ a une signification physique. Ainsi, l'équation de Schrödinger est invariante par renversement du temps.

Remarque: Cette discussion ne prétend pas être une démonstration rigoureuse, mais plutôt un argument ad hoc permettant de mettre en évidence le résultat. Une démonstration plus précise se base sur les relations de commutation canonique entre opérateurs position et impulsion, mais est hors du spectre de ce cours.

L'argument est un peu plus subtil concernant l'enveloppe. Il faut remarquer que l'enveloppe n'est définie que relativement à la porteuse, ce qui se voit à partir de la construction proposée §1.4.3. Pour que la décomposition en porteuse et enveloppe garde un sens, prendre le conjugué complexe ξ_e^* de l'enveloppe demande donc de considérer également le conjugué complexe Π^* de la porteuse. Cela donne alors le conjugué complexe ξ^* du paquet d'ondes total, qui décrit bien la même physique que le paquet d'onde ξ puisque seule sa partie réelle compte. En notant $\xi_e = \xi_e' + i\xi_e''$ et $\Pi = \Pi' + i\Pi''$, on a alors

$$\operatorname{Re} \xi = \operatorname{Re} \left(\xi_{e} \Pi \right) = \xi_{o}' \Pi' - \xi_{o}'' \Pi'' \tag{2.86}$$

et
$$\operatorname{Re} \xi^* = \operatorname{Re} (\xi_e^* \Pi^*) = \xi_e' \Pi' - (-\xi_e'') (-\Pi'')$$
 (2.87)

Ainsi, considérer l'enveloppe ou son complexe conjugué décrit bien la même physique ... mais parce que cela demande de considérer également le complexe conjugué de la porteuse. Par conséquent, l'équation d'enveloppe est elle aussi invariante par renversement du temps.

Résolution formelle de l'équation d'enveloppe

L'équation d'enveloppe étant une équation aux dérivées partielles linéaire, elle se résout aisément (au moins formellement) à l'aide d'une transformation de Fourier. Considérons par exemple la transformation de Fourier spatiale,

$$\xi_{\mathbf{e}}(X,T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}K}{2\pi} \,\widetilde{\xi}_{\mathbf{e}}(K,T) \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}KX} \,. \tag{2.88}$$

L'équation d'enveloppe s'écrit en termes de $\widetilde{\xi}_{\mathrm{e}}$ sous la forme

$$i\frac{\partial \widetilde{\xi}_{e}}{\partial T} = P K^{2} \widetilde{\xi}_{e}, \qquad (2.89)$$

ce qui s'intègre en

$$\widetilde{\xi}_{\mathbf{e}}(K,T) = \widetilde{\xi}_{\mathbf{e}}(K,T=0) \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}PK^2T} \,, \tag{2.90}$$

faisant intervenir (la transformée de Fourier de) l'expression de l'enveloppe à l'instant initial $\widetilde{\xi}_{\rm e}(K,T=0)$. Ainsi, en inversant la transformation de Fourier,

$$\xi_{\rm e}(X,T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK}{2\pi} \, \tilde{\xi}_{\rm e}(K,T=0) \, e^{i(KX - PK^2T)} \ . \tag{2.91}$$

Nous avons donc résolu l'équation d'enveloppe, formellement mais en toute généralité. Notons qu'en l'absence de dispersion du deuxième ordre, c'est-à-dire si P=0, la fonction d'enveloppe ne dépend pas de T, mais seulement de $X=x-v_{\rm g}t$: ce sont bien les résultats de la section précédente.

Exemple d'un paquet gaussien

Supposons qu'à t = 0 le paquet ait la forme d'une gaussienne,

$$\xi_{\rm e}(X,0) = \frac{A}{\sigma_0} \exp\left[-\frac{X^2}{2\sigma_0^2}\right].$$
 (2.92)

Le calcul de l'intégrale générale (2.91) peut se faire explicitement, et conduit à

$$\xi_{\rm e}(X,T) = \frac{A}{\sqrt{{\sigma_0}^2 + 2{\rm i}PT}} \exp\left[-\frac{X}{2\left({\sigma_0}^2 + 2{\rm i}PT\right)}\right].$$
 (2.93)

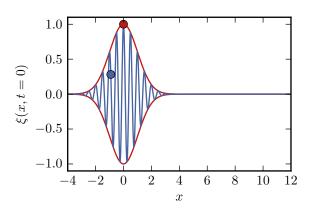
Calculons son module carré, qui donne accès à l'amplitude locale du paquet d'ondes, ou encore à sa densité locale d'énergie. Le calcul donne, en revenant dans le référentiel de départ,

$$|\xi_{e}(x,t)|^{2} = \frac{A^{2}}{\sigma(t)^{2}} \exp\left[-\frac{(x-v_{g}t)^{2}}{\sigma^{2}(t)}\right] \quad \text{avec} \quad \sigma(t)^{2} = \sigma_{0}^{2} \left[1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^{2}\right]$$
 (2.94)

où τ est le temps caractéristique sur lequel le phénomène d'étalement du paquet d'ondes a lieu. Comme attendu et maintes fois annoncé, il dépend à la fois de la largeur du paquet et des propriétés du milieu via la relation

$$\tau = \frac{\sigma_0^2}{2P} \,. \tag{2.95}$$

Ainsi, la dispersion se manifeste d'autant plus vite que σ_0 est petit, c'est-à-dire dire que le paquet est étroit dans l'espace réel (donc large spectralement) à l'instant initial, et d'autant plus vite que P est grand, c'est-à-dire que le milieu est dispersif. Les résultats obtenus sur cet exemple se généralisent à toute forme de paquet d'ondes.



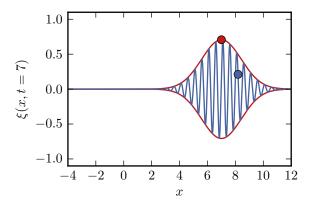


Fig. 2.6 – Propagation d'un paquet d'onde en présence de dispersion au second ordre. La vitesse de phase et la vitesse de groupe (égale à 1 par choix d'unité) diffèrent toujours : le point bleu, lié à la porteuse, se déplace plus vite que le point rouge, lié à l'enveloppe, il y a donc toujours glissement de la phase de la porteuse dans l'enveloppe. De plus, le second ordre de dispersion entraı̂ne un étalement de l'enveloppe. Le paquet d'onde représenté est gaussien, d'écart type 1 à t=0, et la porteuse a pour longueur d'onde 0.5, alors qu'on a choisi $v_{\varphi}/v_{\rm g}=1.3$. Le temps typique de dispersion a été pris égal à 6.

La dispersion au deuxième ordre se traduit par un étalement de l'enveloppe du paquet d'onde. Le temps caractéristique de cet étalement dépend à la fois des propriétés du milieu et de la largeur initiale du paquet d'ondes. Plus le paquet est spatialement étroit, plus l'étalement est rapide.

L'évolution d'un paquet d'ondes en présence de dispersion à l'ordre 2 est représentée figure 2.6.

L'obtention systématique d'un étalement peut au premier abord sembler contradictoire avec l'invariance par renversement du temps de l'équation d'enveloppe. En effet, on pourrait s'attendre à ce qu'en inversant le sens du temps, le paquet d'onde se refocalise, alors qu'ici il s'étale toujours. La contradiction n'est qu'apparente, et vient d'une compréhension trop naïve de la signification de l'invariance par renversement du temps. Cette dernière concerne l'équation qui régit la dynamique de l'enveloppe. En d'autres termes, cela signifie que, partant d'une condition initiale donnée, l'enveloppe évolue de la même façon que le temps augmente ou diminue : $\sigma(t)$ étant bien invariant sous le changement $t \mapsto -t$, c'est exactement le résultat obtenu ici.

L'expérience de pensée du « film à l'envers » peut aussi s'interpréter dans ce cadre, en imposant non plus une mais deux conditions initiales. En effet, considérons pour le paquet gaussien précédemment étudié que le temps augmente pendant une première phase, entre t = 0 et $t = t_1$. À la fin de cette phase, l'écart-type vaudra

$$\sigma(t_1)^2 = \sigma_0^2 \left[1 + \left(\frac{t_1}{\tau} \right)^2 \right]. \tag{2.96}$$

Commence ensuite une seconde phase, où le sens du temps est inversé : le film passe à l'envers. Il faut néanmoins prendre en compte comme deuxième condition initiale que l'on rembobine à partir de $t=t_1$. L'écart type du paquet d'ondes vaut alors

$$\sigma(t)^2 = \sigma_0^2 \left[1 + \left(\frac{t_1 - t}{\tau} \right)^2 \right]$$
 (2.97)

Lorsque la propagation en sens inverse a duré un temps t_1 , le paquet d'onde revient à l'état de départ, comme on peut le voir sur l'expression ci-dessus.

Comparons ce résultat avec l'équation de diffusion, qui n'est pas invariante par renversement du temps. Pour fixer les idées, prenons l'exemple de la diffusion de particules de densité (linéique) $\rho(x,t)$, qui diffusent avec une diffusivité D,

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \qquad (2.98)$$

avec les mêmes conditions initiales (« tâche » gaussienne). La solution à ce problème se déduit par translation temporelle dans la fonction de Green de l'équation de diffusion (le « noyau de la chaleur » [6, §16.4]), celle-ci étant gaussienne. On aboutit à

$$\rho(x,t) = \frac{A}{\sqrt{\sigma(t)^2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}\right] \quad \text{avec} \quad \sigma(t)^2 = {\sigma_0}^2 + 2Dt.$$
 (2.99)

L'écart-type de la gaussienne $\sigma(t)$ croît alors linéairement et non plus quadratiquement avec le temps, et comme attendu n'est pas invariant sous le changement $t \mapsto -t$.

2.3.3 Limites du concept de vitesse de groupe

En étudiant la relation de dispersion des OPPH se propageant dans un plasma, nous avons trouvé que leur vitesse de phase dépassait la célérité de la lumière sans que cela n'entre en contradiction avec la théorie de la relativité. L'argument est en effet que l'information et l'énergie, sur lesquelles portent les contraintes relativistes, se propagent à la vitesse de groupe. Dans cette partie, nous allons toucher du doigt les limites de cette affirmation.

La formule de Rayleigh permet de relier les variations des vitesses de phase et de groupe avec le nombre d'onde. Pour l'établir, commençons par rappeler que par définition,

$$v_{\varphi}(k) = \frac{\omega(k)}{k}$$
 soit $\omega(k) = k v_{\varphi}(k)$. (2.100)

La formule de Rayleigh s'obtient alors directement en dérivant cette équation par rapport au nombre d'onde,

$$v_{\rm g} = v_{\varphi} + k \frac{\mathrm{d}v_{\varphi}}{\mathrm{d}k} \,. \tag{2.101}$$

Pour des raisons historiques, la formule de Rayleigh évoque plutôt la même relation mais écrite en termes de longueur d'onde,

$$v_{\rm g} = v_{\varphi} - \lambda \frac{\mathrm{d}v_{\varphi}}{\mathrm{d}\lambda} \,. \tag{2.102}$$

Deux régimes différents apparaissent alors naturellement.

La dispersion est dite **normale** si
$$v_{\rm g} < v_{\varphi}, \ i.e.$$
 si ${\rm d}v_{\varphi}/{\rm d}\lambda > 0.$ Au contraire, elle est dite **anormale** si $v_{\rm g} > v_{\varphi}, \ i.e.$ si ${\rm d}v_{\varphi}/{\rm d}\lambda < 0.$

Le nombre d'onde k pouvant être algébrique, il n'est pas évident de voir clair dans ces définitions. Prenons donc l'exemple de l'électromagnétisme des milieux diélectriques. La vitesse de phase y est reliée à la partie réelle de l'indice optique, positif par définition, par

$$v_{\varphi} = \frac{c}{n'(\omega)} \,. \tag{2.103}$$

En termes de pulsation et d'indice optique, la formule de Rayleigh s'écrit

$$v_{\rm g} = \frac{v_{\varphi}}{1 + \frac{\omega}{n'(\omega)} \frac{\mathrm{d}n'}{\mathrm{d}\omega}} = \frac{c}{n'(\omega) + \omega \frac{\mathrm{d}n'}{\mathrm{d}\omega}}.$$
 (2.104)

Le régime de dispersion normale est atteint lorsque $dn'/d\omega \geq 0$, celui de dispersion anormale lorsque $dn'/d\omega \leq 0$.

On remarque alors que dans le cas de la dispersion anormale, la vitesse de groupe peut non seulement devenir supérieure à c, mais aussi prendre des valeurs négatives, et ce alors même que la vitesse de phase reste positive! Au voisinage de ces zones de forte dispersion, les développements limités ne sont plus valables, et les seules notions de vitesse de phase et de groupe sont très insuffisantes pour décrire convenablement la propagation. Pour ce faire, il est nécessaire de revenir vers les seules notions physiques, la vitesse du signal (repéré par l'avant du paquet d'ondes) et la vitesse de l'énergie. Il faut les calculer explicitement. On retiendra donc que

La vitesse de groupe ne décrit de façon satisfaisante la propagation du signal et de l'énergie que lorsque la dispersion est suffisamment faible.

Lorsqu'elle est trop forte, il faut revenir aux notions de vitesse du signal et de l'énergie.

Remarque: Les zones de forte dispersion s'accompagnent fréquemment d'une forte absorption, dont il faut tenir compte pour décrire correctement la propagation du paquet d'ondes. C'est le cas au voisinage des résonances des diélectriques.

2.3.4 Complément : Compensation de la dispersion par des non-linéarités

La dernière section de ce chapitre a pour but de donner une intuition très qualitative de la façon dont des non-linéarités du milieu de propagation peuvent permettre, sous certaines conditions, de compenser les effets de la dispersion.

Considérons un diélectrique en régime d'effet Kerr optique, tel que l'indice optique dépende non seulement de la pulsation ω mais aussi de l'intensité $I=|\xi_{\rm e}|^2$ du faisceau. Dans ce cas, la relation de dispersion fait intervenir ω , k et I. Au lieu de s'écrire $\omega=\omega(k)$, elle s'écrit

$$\omega = \omega(k, I). \tag{2.105}$$

En supposant la dispersion et la non-linéarité faibles, on peut l'écrire sous forme d'un développement limité, au second ordre en $(k - k_0)$ afin de pouvoir décrire la déformation du paquet, et au premier ordre en I:

$$\omega = \omega(k_0) + \frac{\partial \omega}{\partial k} \Big|_{\substack{k=k_0\\I=0}} (k-k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{\substack{k=k_0\\I=0}} (k-k_0)^2 + \left. \frac{\partial \omega}{\partial I} \right|_{\substack{k=k_0\\I=0}} I.$$
 (2.106)

Pour simplifier les notations, posons

$$P = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{\substack{k=k_0 \\ I=0}} \quad \text{et} \quad Q = -\left. \frac{\partial \omega}{\partial I} \right|_{\substack{k=k_0 \\ I=0}}. \tag{2.107}$$

Par la même procédure qu'au paragraphe précédent, on obtient alors une équation d'enveloppe modifiée par les non-linéarités, qui s'écrit dans le référentiel lié au paquet d'ondes

$$i\frac{\partial \xi_{e}}{\partial T} + P\frac{\partial^{2} \xi_{e}}{\partial X^{2}} + QI\xi_{e} = 0$$
(2.108)

soit

$$i\frac{\partial \xi_{e}}{\partial T} + P\frac{\partial^{2} \xi_{e}}{\partial X^{2}} + Q|\xi_{e}|^{2} \xi_{e} = 0.$$
(2.109)

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Schrödinger non-linéaire. Elle se rencontre dans des situations très variées, allant de l'optique non-linéaire (cas envisagé ici) aux condensats de Bose-Einstein en passant par l'étude d'ondes de gravité à la surface d'un liquide.

Remarquons alors que si $\xi_{\mathrm{e}}(X,T)$ a une forme particulière, telle que pour tout X et tout T

$$P\frac{\partial^{2} \xi_{e}}{\partial X^{2}} + Q |\xi_{e}|^{2} \xi_{e} = 0, \qquad (2.110)$$

l'équation d'enveloppe se simplifie en

$$\frac{\partial \xi_{\rm e}}{\partial T} = 0. \tag{2.111}$$

Une telle solution se propage donc sans déformation, l'effet de la dispersion étant compensé par celui de la non-linéarité : c'est un soliton.

Un **soliton** est une onde progressive se propageant sans déformation dans un milieu dispersif, des effets non-linéaires permettant de compenser l'effet de la dispersion du milieu.

Chapitre 3

Guidage

Les ondes se propageant dans l'espace libre ont une amplitude et une énergie qui décroissent à grande distance par simple étalement dans l'espace, en l'absence de toute absorption. Par exemple, l'amplitude des ondes sphériques décroît comme 1/r et leur densité locale d'énergie comme $1/r^2$. Cela rend leur usage pour transporter de l'information à grande distance assez peu pratique ¹. Des dispositifs matériels ont donc été développés pour permettre de **guider** ces ondes, par exemple les fibres optiques, permettant leur propagation avec une amplitude suffisante sur des distances beaucoup plus grandes.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les conséquences de ces dispositifs de guidage sur la propagation. Nous commencerons par mettre en évidence la phénoménologie associée à la propagation guidée sur un modèle rudimentaire de fibre optique. Nous passerons ensuite à une approche quantitative, mais toujours sur un système très simple, en étudiant le guidage d'une onde électromagnétique par deux plans conducteurs. Puis nous appliquerons les principales idées ainsi dégagées à un autre type d'onde, les ondes acoustiques, pour décrire leur guidage par un tuyau sonore. Pour terminer, deux compléments sont proposés. Nous nous intéresserons dans un premier temps au câble coaxial, où nous retrouverons le modèle des constantes réparties par une approche électromagnétique, avant de présenter des démonstrations générales sur la structure des modes d'un guide d'ondes électromagnétiques.

3.1 Phénoménologie

Commençons par présenter la phénoménologie associée au guidage des ondes sur l'exemple du guidage d'une onde lumineuse par une fibre optique à saut d'indice.

3.1.1 Approche géométrique, confinement et guidage

Commençons par un modèle rudimentaire de fibre optique, où la géométrie est simplifiée au maximum. On considère la propagation dans un milieu d'indice n_1 d'épaisseur a, limité par deux interfaces planes parallèles avec un milieu d'indice n_2 . Supposons en première approche que la lumière se propage comme un rayon lumineux, de longueur d'onde donnée. Ce rayon peut se réfracter et se réfléchir aux interfaces, en suivant les lois de Snell-Descartes.

Pour que le guidage dans le cœur soit efficace, il ne faut pas que l'amplitude de l'onde soit diminuée par la partie réfractée : on doit être dans les conditions de la **réflexion totale**. Les matériaux sont donc choisis tels que

$$\boxed{n_2 < n_1,} \tag{3.1}$$

et l'angle θ est tel que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) > \frac{n_2}{n_1} \quad \text{soit} \quad \left[\cos\theta > \frac{n_2}{n_1}\right].$$
 (3.2)

Par réflexions successives, l'onde va être maintenue dans le cœur et guidée le long de la direction x.

L'utilisation d'interfaces (de conditions aux limites) judicieusement choisies permet le **guidage** d'une onde, c'est-à-dire son confinement dans une région restreinte de l'espace et sa propagation dans une direction donnée.

^{1.} On sait quand même faire des choses très efficaces : la sonde Rosetta qui étudie la comète 67P/Churyumov-Gerasimenko envoie des informations sur Terre alors que nous en sommes à plus de 400 millions de kilomètres ...

Fig. 3.1 – Modèle simplifié de fibre optique. Une fibre optique à saut d'indice est constituée d'un cœur, fait en matériau diélectrique d'indice n_1 , entouré d'une gaine, fabriquée dans un matériau diélectrique différent, d'indice $n_2 < n_1$. Pour simplifier l'étude, on se restreint au guidage dans un plan. Une source émet en entrée de la fibre un rayon lumineux, incliné d'un angle θ par rapport à l'axe de la fibre, qui se propage le long de celle-ci par réflexions successives.

3.1.2 Approche interférentielle, modes de propagation

Associons une onde plane à chaque rayon lumineux. Elle est supposée monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ , et sa direction est celle du rayon. Lorsque la condition de guidage est satisfaite, la fibre contient une superposition de toutes les ondes réfléchies, qui interfèrent entre elles, comme représenté figure 3.2. Exactement comme dans un interféromètre de Fabry-Pérot, les ondes qui se propagent sans atténuation sont celles pour lesquelles toutes les interférences sont constructives, ce qui signifie que leurs plans d'onde sont confondus.

Remarque: Ce raisonnement peut étonner, puisque les interférences qu'on étudie ici ont lieu entre des plans d'ondes « qui ne se voient pas ». Sa pertinence sera justifiée ultérieurement, §3.2, lors de l'étude analytique de ce modèle de guide. D'ici là, admettons que la condition d'interférences constructives permet bien de trouver la bonne condition de propagation ... mais pas plus. Cette approche interférentielle ne dit rien en effet sur ce qu'il advient d'une onde qui serait forcée en entrée et qui ne pourrait pas se propager dans le guide.

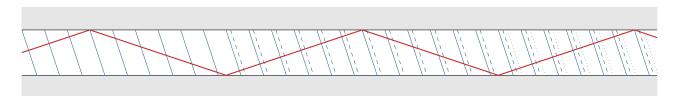


Fig. 3.2 – Interférences entre ondes réfléchies dans une fibre optique. Une onde plane est associée à chaque rayon lumineux, les plans d'onde étant orthogonaux à la direction du rayon. Les plans d'ondes de l'onde entrant dans la fibre sont représentés en traits plein, ceux de l'onde réfléchie deux fois en traits tiretés, ceux de l'onde réfléchie quatre fois en traits pointillés. Ils ne sont pas nécessairement confondus.

Pour trouver la condition d'interférences constructives, il faut calculer le déphasage entre deux ondes réfléchies successives, et imposer à celui-ci d'être un multiple de 2π . Pour ce faire, calculons une différence de marche géométrique puis un déphasage, à l'aide de la figure 3.3.

Les ondes étant planes, il faut définir une référence arbitraire de phase : prenons-là nulle pour le plan d'onde passant par S_0 . Par stigmatisme du dioptre supérieur du guide, après la première réflexion, la phase de l'onde réfléchie est identique à celle qu'elle aurait si la référence était S_1 , symétrique de S_0 par rapport à l'interface entre l'âme et la gaine, et donc telle que $S_0S_1=a$. Après deux réflexions, le même argument de stigmatisme indique que la bonne référence des phases est S_2 , symétrique de S_1 par rapport à la deuxième interface, et donc telle que $S_1S_2=3a$, soit $S_0S_2=2a$.

Remarque: Interpréter S_0 comme une source ponctuelle conduirait au même résultat. Cependant, comme on s'intéresse à des ondes planes, un tel argument serait faux: une onde plane ne peut pas provenir d'une source ponctuelle sans dispositif spécifique.

Fig. 3.3 – Calcul de la différence de marche entre deux ondes réfléchies successives. S_0 et H appartiennent au même plan d'onde, H étant le projeté orthogonal de S_0 sur le rayon réfléchi deux fois.

En vertu du principe de retour inverse de la lumière et du théorème de Malus, le déphasage entre l'onde issue de S_0 et celle issue de S_2 vaut

$$\Delta \phi = 2\pi \frac{S_2 H}{\lambda}$$
 soit $\Delta \phi = \frac{4\pi a \sin \theta}{\lambda}$. (3.3)

Remarque: Il n'y a pas besoin de prendre en compte l'indice optique n_1 ici. En effet, λ est défini comme étant la longueur d'onde dans le vide. Dans la gaine, $\lambda' = n_1 \lambda$, et le chemin optique $(S_2H) = n_1 S_2H$. Les indices se simplifient donc.

Pour tenir compte du nombre infini de réflexions dans la fibre, c'est un réseau infini de sources espacées de 2a qu'il faut considérer. Toutes les ondes réfléchies interfèrent en phase si

$$\Delta \phi = \frac{4\pi \, a \sin \theta}{\lambda} = 2p\pi \,, \, p \in \mathbb{N} \,. \tag{3.4}$$

On choisit d'écrire $p \in \mathbb{N}$ et non pas $p \in \mathbb{Z}$ en prenant l'angle θ positif par convention, le cas $\theta < 0$ s'en déduisant immédiatement. Cette condition sur le déphasage se traduit par une condition sur les angles θ permis, à savoir

$$\left| \sin \theta_p = \frac{p\lambda}{2a} \,, \, p \in \mathbb{N} \,. \right| \tag{3.5}$$

Remarque: Ce n'est ni plus ni moins que la condition donnant la position des pics d'intensité pour un réseau, ce qui n'a rien d'étonnant.

Les angles d'incidence permettant la propagation dans la fibre prennent des valeurs discrètes. Chaque valeur de l'indice p définit un **mode de propagation** de la fibre optique.

Remarque: Cette définition est cohérente avec la définition générale d'un mode donnée §1.5.2, page 23. Un mode de propagation de la fibre est bien une solution propagative, harmonique (l'onde est monochromatique à λ fixée), et compatible avec les conditions aux limites, ici prises en compte par le biais des interférences.

Remarque complémentaire: Néanmoins, on fait systématiquement l'abus de langage de caractériser un mode de propagation par la seule donnée de p, oubliant le caractère harmonique. C'est ce que l'on fera par la suite en parlant « du mode p de la fibre » pour désigner l'ensemble des ondes harmoniques dont la propagation dans la fibre est caractérisée par l'indice p.

Remarquons que toutes les longueurs d'ondes ne peuvent pas se propager dans tous les modes, puisque

$$\sin \theta_p \le 1. \tag{3.6}$$

Ainsi, une onde de longueur d'onde λ dans l'espace libre ne peut se propager dans le mode p que si

$$\lambda \le \frac{2a}{p} \,, \tag{3.7}$$

ce qui s'écrit en termes de pulsation

$$\omega \ge p \frac{\pi c}{a} \stackrel{\text{def.}}{=} \omega_{c,p} \,.$$
 (3.8)

Une pulsation de coupure basse est associée à chaque mode.

Remarque: Le seul mode qui n'a pas une telle pulsation de coupure est le mode p = 0. Il est cependant possible d'en étendre la définition en posant $\omega_{c,0} = 0$.

3.1.3 Dispersion dans la fibre optique

Calculons le temps τ_p mis par un plan d'onde du mode p pour parcourir la distance L le long de l'axe de la fibre, sachant qu'il s'y propage à la vitesse (de phase) $v = c/n_1$. Un raisonnement géométrique simple montre qu'au lieu de parcourir la distance L, il parcourt

$$L_p = \frac{L}{\cos \theta_n} \,, \tag{3.9}$$

d'où

$$\tau_p = \frac{L_p}{v} = \frac{L \, n_1}{c \cos \theta_p} \,. \tag{3.10}$$

Ainsi, la vitesse effective de propagation du mode p vaut

$$v_p = \frac{c}{n_1} \cos \theta_p \,. \tag{3.11}$$

Or θ_p dépend évidemment de p! Ainsi, à pulsation ω fixée, une onde se propage avec une célérité (effective) différente selon le mode qui la propage, donnant lieu à de la dispersion.

La dispersion intermodale ou dispersion de mode caractérise la différence de vitesse effective de propagation de deux ondes harmoniques de même pulsation (ω fixée) mais portées par des modes différents. Elle est due aux conditions aux limites imposées à l'onde.

Cette dispersion n'est donc pas due au milieu de propagation, et diffère en cela de celle étudiée au chapitre 2.

Par ailleurs, l'indice optique du cœur n_1 dépend de la longueur d'onde par l'intermédiaire de la loi de Cauchy,

$$n_1 = A_1 + \frac{B_1}{\lambda^2} \,. {3.12}$$

Par conséquent, si on considère un même mode, c'est-à-dire un même p, deux ondes de fréquences différentes dans ce même mode vont se propager à des vitesses différentes. On retrouve alors de la dispersion, qui a cette fois une double origine : une partie est due aux propriétés intrinsèques du milieu, l'autre à la dépendance en fréquence de θ_p , liée aux conditions aux limites.

La dispersion intramodale caractérise la différence de vitesse effective de propagation de deux ondes harmoniques portées par un même mode (p fixé) mais de pulsations différentes. Elle est due à la fois aux propriétés intrinsèques du milieu de propagation et aux conditions aux limites.

Pour le résumer qualitativement,

- \triangleright dans le cadre de la dispersion intermodale, toutes les ondes se propagent à la même vitesse réelle (car ω est fixée) mais parcourent des distances différentes (car p donc θ varie), donnant lieu à des vitesses effectives différentes.
- \triangleright dans le cadre de la dispersion intramodale, non seulement les ondes parcourent des distances différentes (p est fixé mais θ_p dépend de la fréquence) et en plus elles le font à des vitesses différentes (car ω varie et le milieu est dispersif), donnant lieu à des vitesses effectives différentes.

L'existence de la dispersion de mode, et donc le contrôle du nombre de modes de propagation, est de grande importance technologique, car elle limite le débit d'information possible dans une fibre optique [4, §8.1].

3.1.4 Synthèse : caractéristiques de la propagation guidée

Au cours de cette première section, nous avons montré qualitativement les principales spécificités de la propagation guidée par rapport à la propagation libre. Récapitulons ces idées clés avant de passer à une étude ondulatoire complète.

Nous avons d'abord vu que l'utilisation de conditions aux limites bien choisies permet le **confinement** d'une onde dans une région restreinte de l'espace et le **guidage** de sa propagation dans une direction choisie. Cela n'est cependant possible que sous certaines conditions, donnant naissance à des **modes discrets** de propagation. À chaque mode est associée une **fréquence de coupure** en dessous de laquelle une onde ne peut pas être guidée. Enfin, l'existence de modes entraîne l'apparition d'une nouvelle cause de **dispersion**, due aux conditions aux limites, qui s'ajoute à la dispersion intrinsèque au milieu de propagation.

3.2 Guidage d'une onde électromagnétique entre deux plans parfaitement conducteurs

L'objectif de cette section est de passer de l'approche qualitative de la section précédente à une formulation quantitative précise, en menant une étude électromagnétique complète. Nous commencerons par modéliser le guide d'ondes de façon encore plus simple pour pouvoir mener les calculs aisément, puis nous étudierons une famille de modes de propagation, appelés modes Transverse Électrique. Nous terminerons par l'étude de la dispersion dans le guide d'ondes.

3.2.1 Modélisation et conséquences

Idéalisation du modèle

Une étude électromagnétique exhaustive du modèle de la section précédente est possible [4, §8.2], mais laborieuse sur le plan des calculs. Commençons donc par le simplifier à l'extrême. Deux aspects posent des complications particulières.

- La réflexion totale s'accompagne d'une onde évanescente dans la gaine, voir §2.2.3, page 36, qui transporte de l'énergie hors du guide. Pour ne pas avoir à en tenir compte, disons que le milieu (2) est tel qu'aucun champ ne puisse y pénétrer. C'est par exemple le cas s'il s'agit d'un conducteur parfait.
- \triangleright La dispersion due au milieu de propagation complique l'étude, et n'est pas propre aux phénomènes de guidage. Disons donc que le milieu (1) est non dispersif, et à la limite posons $n_1 = 1$: le milieu est donc le vide.

Finalement, l'étude va être celle de la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide limité par deux plans conducteurs parfaits, comme représenté figure 3.4.



Fig. 3.4 – Guide d'ondes électromagnétiques simplifié. Le guide est constitué de vide, limité par deux plans conducteurs parfaits parallèles distants de a.

Équation de propagation et conditions aux limites

Étudions donc les ondes électromagnétiques dans un tel guide. Le milieu de propagation étant du vide, l'équation d'onde à laquelle elles obéissent est celle du vide, c'est-à-dire l'équation de d'Alembert

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} . \tag{3.13}$$

Les conditions aux limites ne jouent pas sur l'équation de propagation, qui est la même que si le milieu de propagation était infini.

Ces ondes doivent être compatibles avec les conditions aux limites, qui sont les relations de passage entre deux milieux de l'électromagnétisme. Le conducteur est parfait, par conséquent les champs sont nuls à l'intérieur mais des courants et des charges peuvent être présents en surface. Les conditions aux limites se traduisent donc par la continuité de la composante normale de \overrightarrow{B} et de la composante tangentielle de \overrightarrow{E} en z=0 et a, soit

$$\begin{cases}
\vec{B}(z=a^{-}) \cdot (-\vec{e}_{z}) = \vec{B}(z=0^{+}) \cdot (+\vec{e}_{z}) = 0 \\
\vec{E}(z=a^{-}) \wedge (-\vec{e}_{z}) = \vec{E}(z=0^{+}) \wedge (+\vec{e}_{z}) = \vec{0}
\end{cases}$$
(3.14)

Groupes TE et TM

Écrivons explicitement les équations de Maxwell en termes des composantes des champs, en remarquant que dans le cas du guide plan envisagé ici, la propagation a lieu selon \vec{e}_x , mais le système demeure invariant par translation parallèle à \vec{e}_y . Par conséquent les champs ne dépendent pas de y.

Ainsi, les équations en divergence, celles de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Thomson s'écrivent

$$\operatorname{div} \overrightarrow{E} = \partial_x \underline{E_x} + \partial_z \underline{E_z} = 0 \tag{3.15}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \partial_x B_x + \partial_z B_z = 0 \tag{3.16}$$

Les équations en rotationnel, de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère, deviennent quant à elles

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{E} = \begin{bmatrix} -\partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial_t B_x \\ \partial_t B_y \\ \partial_t B_z \end{bmatrix}$$
(3.17)

$$\overrightarrow{rot} \overrightarrow{E} = \begin{bmatrix} -\partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial_t B_x \\ \partial_t B_y \\ \partial_t B_z \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot} \overrightarrow{B} = \begin{bmatrix} -\partial_z B_y \\ \partial_z B_x - \partial_x B_z \\ \partial_x B_y \end{bmatrix} = \frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} \partial_t E_x \\ \partial_t E_y \\ \partial_t E_z \end{bmatrix}$$
(3.17)

Il apparaît donc un découplage des équations de Maxwell en deux groupes, impliquant chacun différentes composantes

- \triangleright le groupe Transverse Électrique, ou groupe TE concerne les composantes E_u , B_x et B_z ;
- \triangleright le groupe Transverse Magnétique, ou groupe TM concerne les composantes B_y , E_x et E_z ;

Le champ électrique d'une onde du groupe TE est transverse à la direction de propagation, et réciproquement pour le groupe TM, d'où la dénomination.

Pour chacun des groupes, la connaissance de la composante du champ transverse, E_u ou B_u , permet de déterminer sans ambiguïté celles du champ non-transverse. Notons qu'a priori une onde du groupe TE n'est pas TM, et réciproquement. En revanche, la linéarité du problème (l'équation de d'Alembert et les conditions aux limites) permet d'étudier séparément les ondes TE et TM, et d'obtenir ensuite l'ensemble des solutions par combinaison linéaire. En outre, la linéarité en temps permet de rechercher des modes, c'est-à-dire des ondes harmoniques.

Le découplage complet des composantes des champs n'est pas général, mais en revanche l'importance des modes TE et TM l'est. On retiendra que

Les modes TE et TM forment toujours une base des modes de propagation d'un guide d'onde uniaxe.

La démonstration est essentiellement technique, et est donnée en annexe §3.5.

Remarque 1: Un mode qui n'est ni TE, ni TM, mais une combinaison linéaire TE+TM est appelé mode hybride.

Remarque 2: Une fois tous les modes trouvés, la décomposition d'une onde quelconque entrant dans le guide sur la base des modes propres se mène de façon tout à fait analogue à la décomposition d'une condition initiale quelconque sur les modes propres de la corde de Melde, voir §1.5.2. La différence est qu'il s'agit ici d'une condition aux limites et pas d'une condition initiale. Le calcul est discuté par exemple par R. Taillet [4, §8.2].

3.2.2 Étude d'un mode transverse électrique

Étudions maintenant un mode TE, c'est-à-dire une onde harmonique du groupe TE.

Forme du champ

L'approche phénoménologique conduit à chercher le champ électrique sous la forme d'une onde progressive dans la direction de propagation x, mais pas d'une onde plane au sens strict. Ainsi, on va chercher

$$\vec{E} = \vec{E}(x, z, t) = E(z)\cos(\beta x - \omega t)\vec{e}_{y}. \tag{3.19}$$

Remarque: Une telle onde est parfois appelée malgré tout onde plane inhomogène ... mais méfiezvous de cette dénomination qui peut induire en erreur, car l'onde n'est PAS plane.

La partie progressive de l'onde est caractérisée par la constante de propagation β , qui joue un rôle analogue à celui d'un vecteur d'onde dans la direction de propagation.

Par analogie, la période spatiale de l'onde dans la direction de propagation est appelée longueur d'onde guidée,

$$\lambda_{\rm g} = \frac{2\pi}{\beta} \,. \tag{3.20}$$

👗 👗 Attention! Bien que l'onde soit harmonique, β n'est pas un vecteur d'onde car l'onde n'est pas plane. Par conséquent, il n'est pas possible d'utiliser la relation de structure de l'onde plane en faisant jouer à β le rôle du vecteur d'onde.

> Remarque 1 : Les variables x et z jouent un rôle dissymétrique vis-à-vis de l'onde guidée. Cette dernière est en effet progressive dans la direction x et stationnaire dans la direction z. La décomposition est similaire à celle d'une onde évanescente, voir §2.2.3, bien que les deux ondes n'aient rien à voir.

Remarque 2: Certains auteurs [1, 2] notent k la constante de propagation, ce qui rend l'utilisation des relations d'onde plane encore plus tentante. C'est pourtant une erreur, malheureusement aussi courante qu'embêtante.

Calcul du champ électrique

Trouvons maintenant E(z). Le champ complexe associé,

$$\vec{E}(x,z,t) = E(z) e^{i(\beta x - \omega t)} \vec{e}_y, \qquad (3.21)$$

doit vérifier l'équation de d'Alembert et les conditions aux limites, qui lui imposent de s'annuler en z=0 et z=a. Pour ce champ, l'équation de d'Alembert s'écrit

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} , \qquad (3.22)$$

soit en écrivant explicitement les dérivées

$$-\beta^2 E(z) e^{i(\beta x - \omega t)} + \frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}z^2} e^{i(\beta x - \omega t)} + \frac{\omega^2}{c^2} E(z) e^{i(\beta x - \omega t)} = 0, \qquad (3.23)$$

d'où l'équation différentielle ordinaire sur E,

$$\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2\right) E(z) = 0. \tag{3.24}$$

La nature des solutions de cette équation dépend du signe de $\omega^2/c^2 - \beta^2$.

- \triangleright Si $\omega^2/c^2 \beta^2 < 0$, la solution est une somme d'exponentielles réelles, qui ne peut pas s'annuler deux fois à moins d'être identiquement nulle.
- ightharpoonup Si $\omega^2/c^2 \beta^2 = 0$, la solution est une fonction affine, qui ne peut pas non plus s'annuler deux fois à moins d'être identiquement nulle.
- ightharpoonup Si $\omega^2/c^2 \beta^2 > 0$, la solution est une somme de sinus et cosinus, qui peut cette fois s'annuler deux fois de façon non triviale.

Plaçons-nous donc dans le dernier cas, et introduisons un réel K tel que

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \stackrel{\text{def.}}{=} K^2. \tag{3.25}$$

La solution de l'équation différentielle (3.24) est alors

$$E(z) = A\cos(Kz) + B\sin(Kz), \qquad (3.26)$$

où A et B sont à déterminer à partir des conditions aux limites. Celles-ci imposent

$$\begin{cases} E(z=0) = 0 \\ E(z=a) = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} A = 0 \\ Ka = p\pi, \ p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
 (3.27)

ce qui conduit à

$$\overrightarrow{E}_p = E_{0,p} \sin\left(\frac{p\pi z}{a}\right) e^{i(\beta x - \omega t)} \overrightarrow{e}_y, p \in \mathbb{N}^*.$$
(3.28)

Les modes de propagation TE sont entièrement caractérisés par un unique entier p non nul. Un mode particulier est noté TE_p .

Remarque: Le cas p = 0 conduit à un champ nul partout et est donc sans intérêt, le cas p négatif est quant à lui équivalent au cas p > 0 au prix d'un changement de signe de $E_{0,p}$.

L'onde est donc loin d'être une onde plane au sens strict, puisque son amplitude varie sinusoïdalement dans les plans x = cte qui seraient les plans d'onde naturels. Remarquons en particulier l'existence de nœuds et de ventres dans les plans équiphase.

Par ailleurs, on trouve comme prévu par le modèle géométrique l'existence de plusieurs modes de propagation à ω fixé, caractérisés par un entier naturel p. Enfin, la relation entre β et ω s'écrit

$$\boxed{\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 = \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2} \,. \tag{3.29}$$

La constante de propagation β jouant un rôle voisin de celui d'un vecteur d'onde, nous venons de trouver la relation de dispersion du guide, qui dépend comme attendu de p. Nous l'étudierons en détail §3.2.4, page 56.

Remarquons que chacun des termes de (3.29) est positif, ce qui contraint les valeurs permises de p à ω fixée.

Une onde de fréquence donnée ne peut se propager que dans un nombre fini de modes.

Calcul du champ magnétique

Calculons maintenant le champ magnétique associé au mode TE_p pour déterminer complètement la structure de l'onde. Pour ce faire, il faut revenir aux équations de Maxwell. En effet, il est impossible d'utiliser la relation de structure des OPPH,

$$\vec{B} \neq \frac{\beta \vec{e}_x \wedge \vec{E}}{\omega} \,, \tag{3.30}$$

car nous venons de montrer que l'onde n'est pas plane!

Utilisons l'équation de Maxwell-Faraday. En principe, il serait aussi possible d'utiliser l'équation de Maxwell-Ampère, mais cela nécessiterait d'intégrer un rotationnel ce qui est beaucoup plus compliqué que d'intégrer une dérivée temporelle. Calculons donc en grandeurs réelles

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \vec{E} \tag{3.31}$$

$$= \frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{e}_x - \frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{e}_z \tag{3.32}$$

$$= E_{0,p} \frac{p\pi}{a} \cos\left(\frac{p\pi z}{a}\right) \cos(\beta x - \omega t) \overrightarrow{e}_x + \beta E_{0,p} \sin\left(\frac{p\pi z}{a}\right) \sin(\beta x - \omega t) \overrightarrow{e}_z$$
(3.33)

d'où en intégrant par rapport au temps

$$\vec{B} = -E_{0,p} \frac{p\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{p\pi z}{a}\right) \sin(\beta x - \omega t) \vec{e}_x + \frac{\beta}{\omega} E_{0,p} \sin\left(\frac{p\pi z}{a}\right) \cos(\beta x - \omega t) \vec{e}_z$$
(3.34)

L'onde se propage dans le vide, et pourtant elle n'est pas transverse! En effet la composante B_x sur la direction de propagation n'est jamais identiquement nulle dès lors que p est non-nul.

Les conditions aux limites modifient considérablement la structure de l'onde. Autrement dit, la structure d'une onde ne dépend pas que du milieu de propagation.

Pour terminer, examinons les conditions aux limites sur le champ magnétique. Les relations de passage s'écrivent

$$\begin{cases}
\vec{B}(x,z=0^+,t) = \mu_0 \overrightarrow{j}_s(0) \wedge \overrightarrow{e}_z \\
\vec{B}(x,z=a^-,t) = \mu_0 \overrightarrow{j}_s(a) \wedge (-\overrightarrow{e}_z)
\end{cases}$$
(3.35)

où \vec{j}_s désigne la densité surfacique de courant sur chacun des plans conducteurs. Ceux-ci étant parfaits, elle peut être non nulle. Avec le champ (3.34), on trouve

$$B_z(z=0^+) = B_z(z=a^-) = 0,$$
 (3.36)

ce qui assure la continuité de la composante normale. Par ailleurs, en projetant les relations de passage sur \overrightarrow{e}_x et \overrightarrow{e}_y on trouve que le guidage de l'onde par les plans conducteurs est associé à l'apparition de courants surfaciques sur ces derniers. Des phénomènes inhabituels car impossibles dans l'ARQS ont alors lieu, entre autres une accumulation de charge en certains points du guide [1, §8.3].

Interprétation en termes de superposition d'ondes planes ... ou le secret du modèle géométrique

Nous avons obtenu équation (3.28) l'expression du champ électrique du mode TE_p sous la forme

$$\vec{E}_p = E_{0,p} \sin\left(\frac{p\pi z}{a}\right) \cos\left(\beta x - \omega t\right) \vec{e}_y. \tag{3.37}$$

À l'aide d'une sympathique formule de trigonométrie, il s'écrit

$$\vec{E}_p = \frac{1}{2} E_{0,p} \left[\sin \left(\beta x + \frac{p\pi z}{a} - \omega t \right) - \sin \left(\beta x - \frac{p\pi z}{a} - \omega t \right) \right] \vec{e}_y. \tag{3.38}$$

On y reconnaît alors la somme de deux OPPH (insistons : de deux vraies OPPH). En effet, poser

$$\begin{cases}
\vec{k}_{1,p} = \beta \vec{e}_x + \frac{p\pi}{a} \vec{e}_z \\
\vec{k}_{2,p} = \beta \vec{e}_x - \frac{p\pi}{a} \vec{e}_z
\end{cases}$$
(3.39)

permet d'écrire

$$\vec{E}_p = E_{0,p} \left[\sin \left(\vec{k}_{1,p} \cdot \vec{r} - \omega t \right) - \sin \left(\vec{k}_{2,p} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right] \vec{e}_y \stackrel{\text{def.}}{=} \vec{E}_{1,p} + \vec{E}_{2,p} . \tag{3.40}$$

Le champ électrique dans le guide apparaît donc comme la superposition de deux OPPH de vecteurs d'onde $\vec{k}_{1,p}$ et $\vec{k}_{2,p}$. Ces vecteurs d'onde ont la même composante selon \vec{e}_x , mais composante opposée selon \vec{e}_z . Ainsi, ils s'obtiennent l'un l'autre par réflexion sur les parois du guide. On retrouve donc les ingrédients du modèle géométrique.

Attention à ne pas se méprendre : il est normal que l'onde dans le guide s'écrive comme une somme d'OPPH, puisque celles-ci constituent une base des solutions de l'équation de d'Alembert, dont fait partie l'onde guidée. Ce qui n'est a priori pas évident est que seules deux OPPH suffisent à la décrire. Ainsi, le modèle géométrique développé précédemment permet de bien décrire la propagation dans le guide plan car « par chance » il ne considère que les deux OPPH dont la somme redonne l'onde guidée.

Calculons l'inclinaison θ_p de $\overrightarrow{k}_{1,p}$ par rapport à l'axe du guide,

$$\tan \theta_p = \frac{k_{1,p,z}}{k_{1,p,x}} = \frac{p\pi/a}{\beta} \,. \tag{3.41}$$

D'après la relation de dispersion,

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 = \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2,\tag{3.42}$$

d'où

$$\tan \theta_p = \frac{p\pi/a}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2}} = \frac{\frac{cp\pi}{a\omega}}{\sqrt{1 - \left(\frac{cp\pi}{a\omega}\right)^2}}.$$
(3.43)

On identifie donc

$$\sin \theta_p = \frac{cp\pi}{a\omega} = \frac{2\pi c}{\omega} \frac{p}{2a} = \frac{p\lambda}{2a}, \qquad (3.44)$$

et on retrouve exactement la condition d'inclinaison donnée dans le cadre du modèle géométrique.

Remarquons pour finir que, $\vec{E}_{1,p}$ et $\vec{E}_{2,p}$ définissant des OPPH, le champ magnétique peut se calculer en utilisant la relation de structure des OPPH pour chacun de ces champs,

$$\vec{B} = \vec{B}_{1,p} + \vec{B}_{2,p} = \frac{\vec{k}_{1,p} \wedge \vec{E}_{1,p}}{\omega} + \frac{\vec{k}_{2,p} \wedge \vec{E}_{2,p}}{\omega}.$$
 (3.45)

Enfin, comme ce sont des OPPH dans le vide, elles obéissent à la relation de dispersion

$$\left|\vec{k}_{1,p}\right|^2 = \left|\vec{k}_{2,p}\right|^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$
 (3.46)

ce qui donne exactement la relation de dispersion (3.29).

3.2.3 Modes TM et TEM

L'étude d'un mode TM conduit à des résultats tout à fait analogues, et en particulier à la même relation de dispersion.

Un point important est l'existence d'une onde Transverse Électro-Magnétique (TEM), pour laquelle \vec{E} et \vec{B} sont tous les deux orthogonaux à la direction de propagation. Le groupe TE ne contient aucun mode TEM, puisque $p \in \mathbb{N}^*$ et B_x est non nul dès que p est non nul. C'est différent pour le groupe TM, puisque

$$\begin{cases}
\vec{B} = B_0 e^{i(\beta x - \omega t)} \vec{e}_y \\
\vec{E} = c B_0 e^{i(\beta x - \omega t)} \vec{e}_z
\end{cases}$$
(3.47)

définit une onde TEM du groupe TM qui est compatible avec les conditions aux limites. En effet, elles impliquent la nullité de B_z , E_x et E_y mais rien pour les autres composantes en raison de l'existence de charges et de courants surfaciques. En un sens, les ondes TM sont donc moins contraintes que les ondes TE.

Remarque: Attention, le champ électrique de cette onde TEM est bien transverse, mais elle ne fait pas pour autant partie du groupe TE tel que défini par les équations (3.15) à (3.18).

Remarquons en particulier que cette onde est plane, et vérifie la relation de dispersion

$$\omega = \beta c. \tag{3.48}$$

On retiendra les trois résultats suivants, très généraux, à propos des modes TEM. Les démonstrations sont essentiellement techniques, et sont données en complément §3.5.

Pour qu'un guide d'ondes électromagnétiques puisse propager un mode TEM, il faut qu'il soit constitué d'au moins deux conducteurs différents.

Un mode TEM vérifie toujours la relation de dispersion des ondes planes dans le milieu illimité,

$$\omega = \beta \, v_{\omega}^{\infty}(\omega) \,. \tag{3.49}$$

En revanche, une onde TEM n'est pas forcément plane au sens strict.

L'exposant ∞ rappelle que la vitesse de phase qui apparaît ici est celle du milieu illimité, sans tenir compte d'aucun effet de conditions aux limites, et en particulier de dispersion de mode. Seule la dispersion intrinsèque au milieu est considérée.

Par opposition aux modes TE et TM, lorsqu'il existe, le mode TEM est unique.

Remarque: Ne pas confondre avec par exemple les modes TEM d'un faisceau laser, qui sont caractérisés par deux indices et ne sont donc pas uniques. La situation physique est très différente, puisqu'un faisceau laser est une onde libre, contrairement au cas qui nous intéresse ici. Il en est de même pour les modes d'une cavité, où les conditions aux limites sont différentes de celles envisagées dans ce paragraphe.

3.2.4 Dispersion

Pour le mode TE_p comme pour le mode TM_p , nous avons obtenu la relation de dispersion (3.29),

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 \,. \tag{3.50}$$

On reconnaît une relation de dispersion de type Klein-Gordon, équation (2.30) page 34, qui dépend de l'indice p du mode. On est donc amené à identifier

$$\omega_{c,p} = \frac{p\pi c}{a} \tag{3.51}$$

comme étant la **pulsation de coupure basse** du mode p. Cette relation de dispersion est représentée figure 3.5.

Remarque : Cette relation de dispersion contient les deux aspects évoqués §3.1.3 : si on s'y intéresse à ω fixée, on trouve la dispersion intermodale, alors que si on s'y intéresse à p fixé, on étudie la dispersion intramodale.

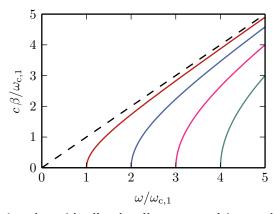


Fig. 3.5 – Relation(s) de dispersion du guide d'ondes électromagnétiques plan-plan. On représente la constante de propagation β en fonction de la pulsation ω . Les grandeurs représentées ont été normalisées respectivement par la vitesse de la lumière c et la pulsation de coupure $\omega_{c,1} = \pi c/a$ du premier mode. La relation de dispersion du vide, $\beta c = \omega$, est représentée en traits pointillés noirs pour comparaison. Le mode p = 1 est représenté en rouge, p = 2 en bleu, p = 3 en violet, et p = 4 en vert.

Finalement, en considérant l'ensemble des modes TE, la dispersion dans le guide implique la physique de l'équation de Klein-Gordon, dupliquée autant de fois qu'il y a de modes. Considérons par exemple qu'une OPPH du groupe TE de pulsation ω est forcée à l'entrée du guide. La propagation de cette onde par le guide dépend de sa fréquence.

- \triangleright Si $\omega < \omega_{c,1}$, tous les modes sont évanescents et l'onde ne peut pas se propager dans le guide.
- \triangleright Si $\omega_{c,1} < \omega < \omega_{c,2}$, l'onde n'est propagée que par le mode fondamental, avec dispersion (intramodale) mais sans atténuation, les autres modes étant encore évanescents. Le guide est alors dit **monomode** pour l'onde considérée.
- \triangleright Si $\omega_{c,p} < \omega < \omega_{c,p+1}$, l'onde est propagée par p modes, sans atténuation mais avec une double dispersion, à la fois intramodale et intermodale. Le guide est alors **multimode** pour l'onde en question.

Remarquons que la condition pour qu'une OPPH TE puisse être propagée dans le guide,

$$\omega > \omega_{\text{c},1} = \frac{\pi c}{a} \,, \tag{3.52}$$

peut s'écrire en termes de longueur d'onde,

$$\frac{2\pi c}{\lambda} > \frac{\pi c}{a}$$
 soit $\lambda < 2a$. (3.53)

On trouve donc un critère géométrique sur la longueur d'onde de l'OPPH, qui est très général. Le préfacteur dépend de la forme précise du guide, mais l'ordre de grandeur $\lambda \lesssim a$ reste le bon.

> Remarque : Attention à ne pas sur-interpréter ce critère, λ est la période spatiale de l'OPPH dans la direction de propagation alors que a est la dimension du guide transverse à la direction de propagation. Éviter donc de conclure en termes d'une longueur d'onde qui « rentrerait » ou pas dans le guide.

Comme attendu, la vitesse de phase et la vitesse de groupe,

$$v_{\varphi,p} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,p}}{\omega}\right)^2}}$$
 et $v_{g,p} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,p}}{\omega}\right)^2}$, (3.54)

dépendent de l'indice du mode, ce qui pose des problèmes technologiques importants. En effet, pour un paquet d'onde à spectre fréquentiel étroit, la bande de constantes de propagation β (et donc de vitesses de phase et de groupe) accessibles est très fortement élargie par la dispersion de mode. Celle-ci a donc des conséquences beaucoup plus fortes sur la propagation que la dispersion intramodale. Cela conduit à une forte déformation, voire même un dédoublement des paquets d'ondes². On cherche donc à adapter la dimension du guide à la fréquence de la porteuse du paquet d'onde pour que celle-ci soit telle que le guide y soit monomode.

Pour une utilisation pratique, les dimensions du guide doivent être adaptées à l'onde que l'on souhaite guider.

Remarque: Comme dans le cas du plasma,

$$v_{\varphi,p} > c$$
 ; $v_{g,p} < c$ et $v_{\varphi,p} v_{g,p} = c^2$. (3.55)

 $v_{\varphi,p} > c$; $v_{g,p} < c$ et $v_{\varphi,p} v_{g,p} = c^2$. (3.55)

Il n'y a toujours pas de contradiction à avoir $v_{\varphi,p} > c$, puisqu'on peut encore montrer que la vitesse de l'énergie est $v_{g,p}$. L'origine physique n'est plus un stockage d'énergie par le milieu, mais un retard à la propagation dû aux conditions aux limites [2, §15.5]. L'énergie se trouve en fait stockée sous forme de charges et de courants surfaciques.

3.2.5 Extension au guide rectangulaire

Le traitement d'un guide rectangulaire, comme celui représenté figure 3.6, se mène de la même façon que celui d'un guide plan.

$$z = a$$

$$z = 0$$

$$y = 0$$

$$y = b$$

$$z = 0$$

$$y = b$$

Fig. 3.6 – Guide d'ondes électromagnétiques rectangulaire. Le guide est constitué de vide, limité par quatre plans conducteurs parfaits parallèles distants de a dans la direction z et b dans le direction y. La propagation a lieu dans la direction x.

La décomposition en modes TE et TM est plus difficile à montrer mais existe toujours. Chaque mode est désormais caractérisé par deux indices et plus un seul : on le note donc TE_{pq} (resp. TM_{pq}), où p et q ne sont pas nuls simultanément. Notons qu'il n'existe pas de mode TEM dans le guide rectangulaire. Le mode étudié en détail à la section précédente est toujours un mode du guide, le mode TE_{p0} . La relation de dispersion dépend aussi de p et q, et s'écrit pour le mode TE_{pq} ou TM_{pq}

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{q\pi}{b}\right)^2. \tag{3.56}$$

^{2.} Des illustrations sont données dans le H-Prépa [1, §8.3]

Application au banc hyperfréquences : Le banc hyperfréquences disponible en TP est un guide métallique rectangulaire de dimensions respectives $a\simeq 1\,\mathrm{cm}$ et $b\simeq 2\,\mathrm{cm}$. Il est monomode pour des pulsations telles que

$$\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \le \frac{\omega^2}{c^2} \le \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2,\tag{3.57}$$

ce qui correspond à des fréquences telles que

$$7.5 \, \text{GHz} \le f \le 16.8 \, \text{GHz} \,.$$
 (3.58)

Ainsi, dans le domaine de fréquence accessible à la diode Günn (de 8.5 à 11 GHz), le banc hyperfréquences est un guide monomode. On peut aussi retourner l'interprétation, en disant qu'un guide rectangulaire de ce type est adapté au guidage des ondes hyperfréquences.

3.3 Guidage d'une onde acoustique dans un tuyau sonore

Cette section propose d'étudier de façon qualitative la propagation guidée d'un autre type d'ondes, les ondes acoustiques. L'approche choisie est celle proposée par R. Moreau dans le BUP 742 [16], clarifiée grâce à un travail commun avec Michel Fruchart et Pierre Lidon. Le contenu de cette section est donc proche de la partie théorique de la fiche expérimentale sur la propagation des ondes acoustiques. Pour les lecteurs intéressés, une démonstration analytique des résultats présentés ici est proposée par A. Chaigne [17].

Une façon habituelle d'établir l'équation de d'Alembert pour des ondes acoustiques planes dans un fluide est de réaliser des bilans de matière et de quantité de mouvement dans un tuyau sonore [2, §14.1], dont on peut ensuite analyser par exemple les résonances. Pourtant, un tuyau sonore est manifestement un guide d'ondes, et au vu des deux dernières sections on s'attendrait à observer des effets de type mode ou dispersion. Comment ces effets se manifestent-ils?

Pour simplifier, on suppose que le fluide en l'absence d'onde est au repos et que le champ de pression y est uniforme. On considère en outre le tuyau parfaitement rigide.

3.3.1 Conditions aux limites, mode fondamental

Rappelons que les grandeurs couplées des ondes acoustiques sont la surpression p_1 et la vitesse acoustique \vec{v}_1 . Les conditions aux limites doivent donc être exprimées en termes de ces grandeurs.

Au niveau d'une paroi solide, de normale \vec{n}_{\perp} , il faut traduire le fait que le fluide ne peut pas pénétrer la paroi. En un point P de la paroi, le vecteur vitesse \vec{v}_1 est donc tangent à celle-ci, voir figure 3.7, ce qui s'écrit mathématiquement

$$\vec{v}_1(P \in \text{paroi}) \cdot \vec{n}_{\perp} = 0. \tag{3.59}$$

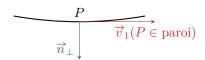


Fig. 3.7 – Conditions aux limites entre un fluide et une paroi solide. En un point P de la paroi, la vitesse acoustique \vec{v}_1 est tangente à cette dernière.

Remarque : Comme l'écoulement associé aux ondes acoustiques est supposé parfait, l'écriture de la condition aux limites nécessite de faire intervenir le produit scalaire avec \vec{n}_{\perp} . Elle est donc moins forte que pour un fluide visqueux qui exigerait $\vec{v}_1(P \in \text{paroi}) = \vec{0}$.

En ce qui concerne la surpression, la condition aux limites doit traduire l'équilibre mécanique de la paroi. Celui-ci implique des efforts internes au tuyau, inconnus, et qui s'adaptent spontanément à l'onde. Formellement, cela consiste à introduire autant d'équations que d'inconnues supplémentaires, et n'apporte ni contrainte ni aide à la résolution.

Considérons maintenant un tuyau sonore rigide d'axe \vec{n} , cylindrique ou rectangulaire \vec{n} . Dans un tel tuyau, les conditions aux limites impliquent qu'en n'importe quel point des parois \vec{v}_1 est parallèle à \vec{n} . Or une onde acoustique plane est une onde longitudinale, et si sa direction de propagation est \vec{n} , alors elle vérifie nécessairement les conditions aux limites. La présence du tuyau n'implique aucune contrainte pour l'onde, qui se propage donc de façon identique à sa propagation libre : elle n'a aucun moyen de se rendre compte de la présence du tuyau.

^{3.} Ou de façon plus générale un tuyau uniaxe dont la normale à la paroi en tout point est orthogonale à un axe \vec{n} , $\vec{n}_{\perp} \cdot \vec{n} = 0$: le tuyau est invariant par translation de long de son axe, mais sa section transverse a une forme absolument quelconque.

Une onde acoustique plane peut se propager sans déformation dans un tuyau sonore si sa direction de propagation est confondue avec l'axe du tuyau.

Si l'onde plane est en plus progressive et harmonique, elle constitue un **mode de propagation** du tuyau, appelé **mode fondamental**. C'est celui qui est décrit par l'approche des ondes sonores en termes de bilans.

3.3.2 Analyse qualitative des autres modes de propagation

Les sections 3.1 et 3.2 ont montré que les modes propagatifs d'un guide plan pouvaient s'étudier de façon simple en considérant la superposition de deux OPPH images l'une de l'autre par réflexion sur les parois du guide. Techniquement, cela se traduit par le fait que les deux OPPH forment un angle $\pm \theta$ avec l'axe du guide. Adoptons à nouveau cette approche pour comprendre la propagation dans un tuyau sonore.

En pratique, nous allons procéder selon la démarche suivante :

- ▷ dans un premier temps, nous allons déterminer le champ des vitesses acoustiques issu de la superposition des deux OPPH mentionnées ci-dessus;
- ⊳ puis nous chercherons s'il existe des plans particuliers pour lesquels ce champ des vitesses total serait compatible
 avec les conditions aux limites (3.59);
- ⊳ et enfin nous déterminerons la relation de dispersion par une étude géométrique des plans d'onde.

Superposition de deux ondes planes progressives harmoniques

Considérons une OPPH acoustique, de longueur d'onde λ et de direction de propagation \vec{u} formant un angle θ avec l'axe \vec{e}_x . Représentons figure 3.8 les plans d'ondes de cette onde à un instant donné, pour lesquels la norme du vecteur vitesse acoustique \vec{v}_1 est maximale. Ces plans sont distants de $\lambda/2$, et \vec{v}_1 y est égal à $\pm v\vec{u}$.

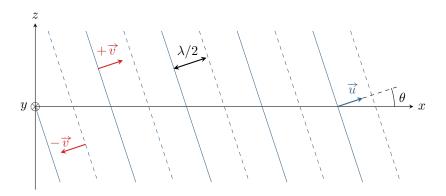


Fig. 3.8 – Onde acoustique plane progressive harmonique. On représente les plans d'ondes d'une OPPH acoustique pour lesquels la vitesse acoustique a la norme maximale. L'onde se propage dans la direction \vec{u} formant un angle θ avec l'axe \vec{e}_x .

Considérons maintenant qu'une autre OPPH acoustique, de même longueur d'onde et même amplitude que la première se superpose à celle-ci. La direction de propagation de cette deuxième onde forme un angle $-\theta$ avec \overrightarrow{e}_x . Rappelons que cette direction est choisie car c'est celle d'une onde issue de la première OPPH par réflexion sur une paroi parallèle au plan (xOy). Comme précédemment, représentons figure 3.9 les deux séries de plans d'ondes pour lesquels la vitesse acoustique a la norme maximale.

La propagation des ondes acoustiques étant linéaire, le vecteur vitesse acoustique total est simplement la somme des vecteurs vitesse acoustique de chacune des ondes. On obtient alors par la construction graphique représentée figure 3.10 les vecteurs \vec{v}_1 aux différents points d'intersection des différents plans d'onde. En raison de la propagation, à un instant légèrement ultérieur à celui auquel on a représenté la figure, tous les plans d'onde sont légèrement décalés vers la droite, mais sans modifier la cote z de leurs intersections. On comprend donc qu'en tout point des plans où des vecteurs vitesse ont été représentés le vecteur vitesse a même direction que celui qui a été représenté.

Il apparaît donc des familles de plans parallèles à (yOz), régulièrement espacés, dans lesquels le vecteur vitesse est porté alternativement par \overrightarrow{e}_x et \overrightarrow{e}_z . Pour simplifier la suite de la discussion, on parlera de plans Π_x et Π_z . À l'aide de la figure 3.11, on remarque que deux plans Π_x et Π_z adjacents sont distants de

$$d = \frac{\lambda}{4\sin\theta} \,. \tag{3.60}$$

De plus, l'onde totale est spatialement périodique dans la direction x, de période spatiale

$$\lambda_{\rm g} = \frac{\lambda}{\cos \theta} \,. \tag{3.61}$$

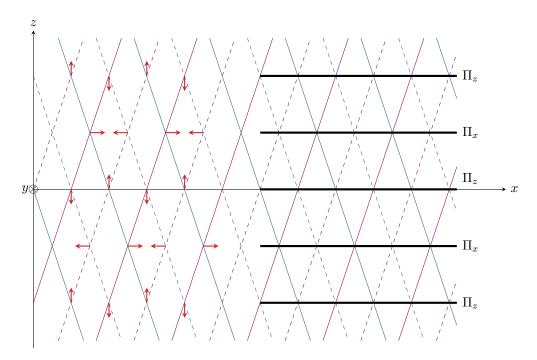


Fig. 3.9 – Superposition de deux ondes acoustiques planes progressives harmoniques. Les plans d'ondes de deux OPPH pour lesquels la vitesse acoustique a la norme maximale sont représentés en bleu et violet. On en déduit alors la direction du vecteur vitesse acoustique résultant de la superposition des deux ondes, voir figure 3.10, représenté en rouge. Dans les plans Π_x , la vitesse acoustique résultante est portée par \overrightarrow{e}_x . Comme cela correspond à la condition aux limites (3.59), les parois d'un guide peuvent être placées dans ces plans.

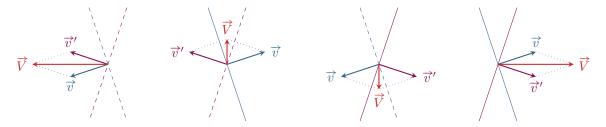


Fig. 3.10 – Obtention des vecteurs vitesse par superposition. Le vecteur vitesse acoustique total \vec{V} , en rouge, est la somme vectorielle des vecteurs vitesse acoustique de chacune des ondes \vec{v} et \vec{v}' , en bleu et violet.

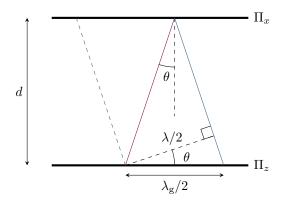


Fig. 3.11 – Détail de la superposition de deux OPPH acoustiques. On représente un agrandissement de la figure 3.9.

Compatibiltié avec les conditions aux limites

Étudions maintenant la possibilité pour une telle onde d'être guidée par un « tuyau » composé de deux plans distants de a. Cette étude se généralise aisément au guidage par un guide plus réaliste qui serait de section rectangulaire.

Les conditions aux limites, rappelées équation (3.59), sont telles que la vitesse du fluide doit être tangente aux parois. Ceci impose donc que la distance a corresponde à un multiple de la distance 2d entre deux plans Π_x , c'est-à-dire

$$a = 2pd, p \in \mathbb{N}. \tag{3.62}$$

Le cas p=0 est possible à condition que $\theta=0$: cela correspond à une onde plane se propageant parallèlement à l'axe du guide, c'est-à-dire au mode fondamental décrit section 3.3.1.

Il apparaît donc des modes propagatifs quantifiés du fait des conditions aux limites imposées par le guide. À longueur d'onde λ hors guide donnée, le mode p correspond à la superposition de deux ondes planes se propageant « en zig-zag » avec un angle θ_p avec l'axe du guide tel que $\sin\theta_p = p\lambda/(2a)$. Ces modes se propagent sans déformation à l'intérieur du guide. Au contraire, si l'on envoie une onde plane à une incidence différente de celle des modes du guide, la superposition donne lieu à une onde évanescente. En moyenne dans le temps, toute l'énergie est réfléchie hors du guide.

Remarque: Plus précisément, ce modèle montre que si l'on envoie dans le guide une onde acoustique plane à la pulsation ω , on ne pourra obtenir de structure propagative harmonique que pour certaines incidences quantifiées, celles des modes. Si l'on se place à une autre incidence, il n'existe pas de telle structure: l'image géométrique proposée n'a alors plus de sens. L'étude géométrique ne permet donc pas de prédire la structure de l'onde évanescente, puisque celle-ci n'est pas périodique le long du guide.

Relation de dispersion

Combinons les résultats obtenus équations (3.60), (3.61) et (3.62) pour le mode p sous la forme

$$\begin{cases}
\cos \theta_p = \frac{\lambda}{\lambda_g} \\
\sin \theta_p = \frac{p\lambda}{2a}
\end{cases}$$
(3.63)

Remarque : On met ici clairement en évidence la signification de la longueur d'onde guidée, et en particulier que $\lambda \neq \lambda_g$.

Cela conduit à

$$\frac{\lambda^2}{\lambda_g^2} + \frac{p^2 \lambda^2}{4a^2} = 1, (3.64)$$

soit

$$\frac{1}{\lambda_{\sigma}^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{p^2}{4a^2} \,. \tag{3.65}$$

On voit donc apparaître la **relation de dispersion** du mode construit précédemment. En effet, λ est la longueur de l'onde plane hors du guide, et vérifie donc $\lambda = 2\pi c/\omega$, alors que par définition $\lambda_{\rm g} \stackrel{\rm déf.}{=} 2\pi/\beta$. Par conséquent, (3.65) s'écrit

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2. \tag{3.66}$$

Remarquons l'apparition d'une longueur d'onde de coupure haute,

$$\lambda_{\rm c} = \frac{2a}{p} \,. \tag{3.67}$$

Ainsi, si la longueur d'onde libre est plus grande que cette longueur d'onde de coupure, l'onde ne pourra être guidée par le guide étudié que si elle n'est pas inclinée. Remarquons qu'on retrouve exactement le critère (3.53), établi pour les ondes électromagnétiques. Cela n'a rien de surprenant, puisque le raisonnement consiste dans les deux cas à étudier les plans d'onde, sans s'intéresser vraiment à la nature des grandeurs ondulatoires.

Le raisonnement mené ici peut s'étendre sans difficulté à la superposition de plusieurs modes de propagation, à une onde quelconque dans un tuyau rectangulaire *etc*. On retrouve une parfaite analogie avec le guidage des ondes électromagnétiques.

3.3.3 Extension aux tuyaux cylindriques

La généralisation des calculs aux tuyaux cylindriques se fait sans difficulté conceptuelle, mais au prix de lourdeurs dans les calculs : comme fréquemment dans les problèmes à géométrie cylindrique, ils font apparaître des fonctions de Bessel.

Les conclusions importantes demeurent inchangées. Il existe un mode d'onde plane, qui vérifie la relation de dispersion du vide illimité, et tant que la fréquence est suffisamment faible ce mode est le seul à être propagé. Les fréquences de coupure des modes supérieurs font intervenir la position des extrema des fonctions de Bessel, qui peuvent être calculés numériquement.

Application au tube de Kundt : Le tube de Kundt disponible en TP est un tuyau cylindrique de diamètre $d \simeq 5\,\mathrm{cm}$. La longueur d'onde de coupure du premier mode excité vaut [16]

$$\lambda_c = \pi \frac{d}{\mu_{11}} \,, \tag{3.68}$$

où $\mu_{11} \simeq 1.84$ est le premier zéro de la dérivée première de la fonction de Bessel d'ordre 1. Numériquement.

$$\lambda_c = 8 \, \text{cm} \,. \tag{3.69}$$

La fréquence de coupure associée est alors

$$\nu_c = \frac{c}{\lambda_c} = 4 \,\text{kHz} \,. \tag{3.70}$$

Cette fréquence est dans le domaine audible, et largement accessible au haut-parleur utilisé habituellement. Lors d'une expérience avec le tube de Kundt, il faut donc être vigilant à choisir la fréquence suffisamment basse, sans quoi le tube propage non seulement le mode fondamental, mais aussi des modes excités. Néanmoins, le tube n'est pas assez long pour séparer clairement les modes, et la seule conséquence visible d'un mauvais choix de fréquence serait un élargissement des signaux expérimentaux.

3.4 Complément : Câble coaxial, de l'électromagnétisme aux constantes réparties

3.4.1 Modes de propagation

Rappelons comme représenté figure 3.12 qu'un câble coaxial est constitué de deux conducteurs cylindriques coaxiaux, de rayons a et b > a, séparés par un isolant. Pour s'affranchir des propriétés diélectriques de l'isolant, on l'assimile au vide.

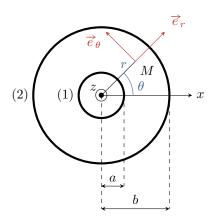


Fig. 3.12 – Câble coaxial vu en coupe. Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs cylindriques coaxiaux, de rayons respectifs a < b, et d'axe \overrightarrow{e}_z , séparés par un isolant. L'espace au centre du câble est également isolant.

Par analogie avec le guide plan présenté $\S 3.2$, on cherche des ondes progressives dans la direction z mais nonplanes. Par ailleurs, la linéarité du problème (l'équation de propagation et les conditions aux limites) permet de chercher directement des **modes de propagation** sous la forme

$$\begin{cases}
\vec{E}(M) = \vec{e}(r,\theta) e^{i(\beta z - \omega t)} \\
\vec{B}(M) = \vec{b}(r,\theta) e^{i(\beta z - \omega t)}
\end{cases}$$
(3.71)

L'étude exhaustive du problème est assez lourde techniquement [5, §3.6], faisant intervenir des fonctions de Bessel ⁴ et de Neumann généralisées.

La première conclusion de l'étude est la grande variété des modes pouvant être propagés par un câble coaxial. Le découplage des composantes des champs obtenu équations (3.15) à (3.18) pour le guide plan n'est bien entendu plus valable, mais comme annoncé les modes TE et TM forment une base des modes de propagation.

Par ailleurs, un câble coaxial étant constitué de deux conducteurs, il propage un mode TEM vérifiant comme attendu la relation du vide illimité. Les fréquences de coupure des premiers modes valent

$$f_{\rm c} = \frac{c}{2(b-a)}$$
 (premier mode TM) (3.72)

$$f_{\rm c} = \frac{c}{\pi (b+a)}$$
 (premier mode TE) (3.73)

Pour un câble de télévision de rayons $a=2.4\,\mathrm{mm}$ et $b=8.8\,\mathrm{mm}$, la fréquence de coupure la plus basse est de l'ordre de $8.5\,\mathrm{GHz}$. Pour l'utilisation habituelle avec des fréquences au plus de l'ordre du MHz, seul le mode fondamental contribue à la propagation.

3.4.2 Étude du mode TEM

Étudions donc seulement le mode TEM, pour lequel

$$e_z = 0 \qquad \text{et} \qquad b_z = 0. \tag{3.74}$$

Équations de Maxwell

Combinons l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \,, \tag{3.75}$$

avec la formule d'analyse vectorielle

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{e}\,\operatorname{e}^{\mathrm{i}\beta z}\right) = \operatorname{e}^{\mathrm{i}\beta z}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{e} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\operatorname{e}^{\mathrm{i}\beta z}\right) \wedge \overrightarrow{e}\,,\tag{3.76}$$

qui conduisent à

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \overrightarrow{e} + i \, \beta \, \overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{e} = i \, \omega \, \overrightarrow{b} \tag{3.77}$$

Comme \overrightarrow{e} ne dépend pas de z (les pertes qui pourraient entraîner une telle dépendance sont négligées) et que $e_z = 0$, alors \overrightarrow{rot} \overrightarrow{e} est nécessairement porté par \overrightarrow{u}_z . Au contraire, $\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{e}$ est évidemment orthogonal à \overrightarrow{u}_z , et \overrightarrow{b} également puisqu'on s'intéresse au mode TEM. On en déduit donc par projection

$$\overrightarrow{rot} \overrightarrow{e} = \overrightarrow{0} \tag{3.78}$$

$$\beta \vec{u}_z \wedge \vec{e} = \omega \vec{b} \tag{3.79}$$

La même procédure appliquée à l'équation de Maxwell-Ampère permet d'aboutir à

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \tag{3.80}$$

$$\beta \vec{u}_z \wedge \vec{b} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{e} \tag{3.81}$$

Relation de dispersion

Injectons (3.79) dans (3.81):

$$\frac{\beta^2}{\omega} \vec{u}_z \wedge (\vec{u}_z \wedge \vec{e}) = -\frac{\omega}{c^2} \vec{e} \tag{3.82}$$

Comme

$$\vec{u}_z \wedge (\vec{u}_z \wedge \vec{e}) = -\vec{e} \,, \tag{3.83}$$

on en déduit la relation de dispersion du mode TEM

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \,. \tag{3.84}$$

Comme attendu, cette relation est identique à celle d'une onde se propageant dans l'espace libre. Le mode TEM du câble coaxial n'est donc pas dispersif.

^{4.} Ce n'est absolument pas surprenant, le problème étant à symétrie cylindrique.

Calcul des champs, structure de l'onde

Remarquons d'emblée qu'en injectant la relation de dispersion (3.84) dans (3.79), il vient

$$\vec{b} = \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{e}}{c}$$
 d'où $\vec{B} = \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}}{c}$ (3.85)

Cette relation de structure est la même que celle d'une onde électromagnétique plane progressive se propageant dans le vide illimité!

Remarque: La seule hypothèse nécessaire pour aboutir à ce résultat est la forme de la dépendance en z (seulement en $e^{i\beta z}$, mais pas dans \overrightarrow{e} ni \overrightarrow{b}). Ainsi, cette relation de structure est celle du mode TEM (s'il existe) de n'importe quel guide d'onde uniaxe.

Cependant, attention à ne pas conclure trop vite : les deux ondes ont la même relation de dispersion, la même relation de structure, mais diffèrent malgré tout. Calculons explicitement les champs pour le mettre en évidence.

En vertu de (3.78), $\overrightarrow{rot} \overrightarrow{e} = \overrightarrow{0}$, et donc \overrightarrow{e} dérive d'un potentiel Ψ , indépendant de z, tel que

$$\overrightarrow{e} = -\overrightarrow{\text{grad}}\Psi. \tag{3.86}$$

Calculons la divergence de \overrightarrow{E} à l'aide d'une formule d'analyse vectorielle

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \left(\vec{e} e^{i(\beta z - \omega t)} \right) = e^{i(\beta z - \omega t)} \operatorname{div} \left(\vec{e} \right) + i \beta e^{i(\beta z - \omega t)} \vec{u}_z \cdot \vec{e} , \tag{3.87}$$

ce qui permet de conclure d'après l'équation de Maxwell-Gauss que

$$\operatorname{div} \overrightarrow{e} = 0 \qquad \operatorname{donc} \qquad \boxed{\Delta \Psi = 0.} \tag{3.88}$$

Ainsi, le potentiel Ψ vérifie les mêmes équations qu'un potentiel électrostatique. Attention à ne pas se méprendre, il ne donne accès qu'au champ \overrightarrow{e} , et pas au champ électrique total \overrightarrow{E} , qui s'écrit à l'aide du potentiel scalaire et du potentiel dépendants tous deux du temps,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$
(3.89)

Explicitons maintenant les conditions aux limites, et notons Ψ_1 et Ψ_2 les potentiels sur une section droite du guide, ne dépendant pas de θ . L'équation de Laplace (3.88) s'intègre en

$$\Psi(r) = \Psi_1 - \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\ln b/a} \ln \frac{r}{a}. \tag{3.90}$$

Il est alors facile d'en déduire \overrightarrow{e} , puis \overrightarrow{E} et \overrightarrow{B} .

$$\vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\ln b/a} e^{i(\beta z - \omega t)} \vec{u}_r \tag{3.91}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{c \ln b/a} e^{i(\beta z - \omega t)} \vec{u}_{\theta}$$
(3.92)

On voit donc qu'en dépit des similitudes entre elles, l'onde du mode TEM n'est pas identique à une OPPH se propageant dans le vide illimité, puisque

- \triangleright l'amplitude des champs décroît avec la distance à l'axe r;
- \triangleright leur direction direction est selon \vec{u}_r et \vec{u}_θ , et dépend donc du point d'observation.

Remarque: On rencontre parfois la dénomination « onde plane inhomogène », due aux analogies dans la relation de dispersion et la relation de structure, et au fait que les surfaces équiphase sont les plans z=cte. Cependant, caractériser les ondes planes dans leur ensemble par des surfaces équiphase revient à restreindre la définition aux ondes possédant une « phase », c'est-à-dire les OPPH.

3.4.3 Onde électrocinétique

Maintenant que le champ électromagnétique a été étudié, déduisons-en l'onde « électrocinétique » se propageant le long du câble coaxial.

Onde de courant

Calculons le courant parcourant le conducteur (1), intérieur, à partir des conditions aux limites. Le conducteur étant parfait, il s'agit d'un courant surfacique que l'on note $\overrightarrow{j}_{s,1}$. La relation de passage à l'interface vide-conducteur en r=a s'écrit

$$\vec{B}(r=a^{+}) - \vec{0} = \mu_0 \vec{j}_{s,1} \wedge (+\vec{u}_r). \tag{3.93}$$

En multipliant vectoriellement par \vec{u}_r , et puisque $\vec{j}_{s,1} \cdot \vec{u}_r = 0$, on trouve

$$\vec{u}_r \wedge \vec{B}(r=a) = \mu_0 \overrightarrow{j}_{s,1}, \qquad (3.94)$$

d'où

$$\overrightarrow{j}_{s,1} = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\mu_0 c a \ln \frac{b}{a}} e^{i(\beta z - \omega t)} \overrightarrow{u}_z.$$

$$(3.95)$$

Calculons alors le courant total dans le conducteur (1). Comme $\vec{j}_{s,1}$ est une densité *surfacique* de courant, on en déduit le courant non pas en calculant le flux au sens strict, mais en multipliant scalairement par un élément de longueur $a d\theta$ orthogonal à \vec{u}_z :

$$i_1 = \oint_{(1)} \overrightarrow{j}_{s,1} \cdot a \, d\theta \, \overrightarrow{u}_z \tag{3.96}$$

$$= \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\mu_0 \, c \, a \ln \frac{b}{a}} e^{i(\beta z - \omega t)} \times 2\pi a \tag{3.97}$$

On pose alors

$$i_1(z,t) = I_0 e^{i(\beta z - \omega t)}$$
 avec $I_0 = \frac{2\pi}{\mu_0 c} \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\ln b/a}$ (3.98)

Ainsi,

Le conducteur intérieur du câble coaxial est parcouru par une onde plane progressive harmonique de courant.

Le même calcul se mène pour le conducteur (2), et conduit à

$$i_2(z,t) = -I_0 e^{i(\beta z - \omega t)}$$
 (3.99)

Ainsi, chaque conducteur est parcouru par une onde courant, les deux ondes étant en opposition de phase.

Onde de tension

De façon naturelle, on pose

$$u(z,t) = (\Psi_1 - \Psi_2) e^{i(\beta z - \omega t)},$$
 (3.100)

soit

$$u(z,t) = U_0 e^{i(\beta z - \omega t)}$$
 avec $U_0 = \Psi_1 - \Psi_2$. (3.101)

Il n'y a pas de contradiction à imposer « à la main » la dépendance en z et t de la sorte, puisque Ψ est le potentiel dont dérive \overrightarrow{e} , qui par construction ne dépend ni de z ni de t.

Une onde plane progressive harmonique de tension entre l'âme et la gaine se propage le long du câble.

Inductance linéique

En utilisant les grandeurs réelles, l'énergie magnétique stockée dans une portion mésoscopique de câble de longueur δz vaut

$$\delta U_{\rm m} = \int_{r=a}^{r=b} \frac{b^2}{2\mu_0} \cos^2(\beta z - \omega t) 2\pi r dr \, \delta z \,, \tag{3.102}$$

puisque $b^2 \cos^2(\beta z - \omega t)/2\mu_0$ est la densité volumique d'énergie magnétique, et $2\pi r dr \delta z$ l'élément de volume. Le calcul de l'intégrale donne, en remplaçant b par son expression (3.92),

$$\delta U_{\rm m} = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) I_0^2 \cos^2(\beta z - \omega t) \,\delta z \,. \tag{3.103}$$

On peut alors identifier ce résultat à l'énergie magnétique stockée dans une bobine d'inductance $\Lambda \delta z$ et parcourue par le courant i_1 ,

$$\delta U_{\rm m} = \frac{1}{2} (\Lambda \, \delta z) i_1^{\ 2}(z, t) \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}}.$$
 (3.104)

Bien que non justifiée à l'échelle du câble entier, l'utilisation de l'ARQS est raisonnable à l'échelle mésoscopique, puisque par définition de cette échelle, la longueur considérée δz est très petite devant la longueur $\lambda = 2\pi/\beta$.

Capacité linéique

Appliquons le même raisonnement à l'énergie électrique. Dans la portion mésoscopique étudiée, celle-ci vaut

$$\delta U_{\rm e} = \int_{r=a}^{r=b} \frac{1}{2} \varepsilon_0 e^2 \cos^2(\beta z - \omega t) 2\pi r dr \, \delta z, \qquad (3.105)$$

ce qui s'identifie à l'énergie stockée dans un condensateur de capacité $\Gamma \, \delta z$

$$\delta U_{\rm e} = \frac{1}{2} (\Gamma \, \delta z) \, u^2(z, t) \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\Gamma = \frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln b/a}} \,.$$
 (3.106)

Remarque: La capacité linéique trouvée est exactement celle qu'on obtient lors de l'étude électrostatique d'un condensateur cylindrique coaxial [9], ce qui rend l'image d'autant plus convaincante.

Conclusion : modèle des constantes réparties

Nous venons donc de montrer que la propagation du mode TEM d'un câble coaxial peut être décrite à l'aide d'un modèle électrocinétique, où chaque portion mésoscopique de câble est traitée dans l'ARQS.

Les deux grandeurs couplées de l'onde sont le courant i dans le conducteur interne, l'âme, et la tension u entre les deux conducteurs. Chaque portion du câble est alors modélisée par une inductance linéique Λ , située sur l'un ou l'autre des conducteurs, et une capacité linéique Γ située entre les deux conducteurs.

3.5 Complément : Résultats généraux sur les guides d'ondes électromagnétiques

Cette annexe a pour objectif de donner des démonstrations générales de certains résultats annoncés dans les paragraphes précédents. Ces démonstrations sont toutes équivalentes à celle données par J.D. Jackson [9, §8.2], et sont plus pédestres mais sans doute plus facilement compréhensibles. Certaines d'entre elles ont été faites sans le dire au travers des exemples, d'autres demandent une généralisation. On étudie ici les modes d'un guide d'onde électromagnétique uniaxe, en les cherchant sous la forme

$$\begin{cases}
\vec{E} = \vec{e}(y, z) e^{i(\beta x - \omega t)} \\
\vec{B} = \vec{b}(y, z) e^{i(\beta x - \omega t)}
\end{cases}$$
(3.107)

La seule hypothèse est le caractère uniaxe du guide, imposant la forme de la dépendance en x. En revanche, aucune hypothèse n'est nécessaire sur la géométrie du guide ni sur les dépendances en y et z.

3.5.1 Les modes TE, TM et TEM forment une base des modes du guide d'ondes

Écrivons les équations de Maxwell pour les champs (3.107). Les trois projections de l'équation de Maxwell-Faraday s'écrivent

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i \omega B_x \tag{3.108}$$

$$-i\beta E_z + \frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega B_y \tag{3.109}$$

$$i\beta E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z \tag{3.110}$$

Les trois projections de l'équation de Maxwell-Ampère s'écrivent quant à elles

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = -i \frac{\omega}{c^2} E_x \tag{3.111}$$

$$-i\beta B_z + \frac{\partial B_x}{\partial z} = -i\frac{\omega}{c^2} E_y \tag{3.112}$$

$$i\beta B_y - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -i\frac{\omega}{c^2} E_z \tag{3.113}$$

Pour simplifier les notations, introduisons

$$\gamma^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \,. \tag{3.114}$$

Combinons maintenant de façon judicieuse les six équations précédentes.

$$\frac{\mathrm{i}\,\beta}{\gamma^2} \times (3.113) - \frac{\mathrm{i}\,\omega}{c^2\,\gamma^2} \times (3.109) \qquad \rightsquigarrow \qquad B_y = \frac{\mathrm{i}\,\beta}{\gamma^2} \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\mathrm{i}\,\omega}{c^2\,\gamma^2} \frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{3.115}$$

$$\frac{i\beta}{\gamma^2} \times (3.113) - \frac{i\omega}{c^2 \gamma^2} \times (3.109) \qquad \Rightarrow \qquad B_y = \frac{i\beta}{\gamma^2} \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{i\omega}{c^2 \gamma^2} \frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{3.115}$$

$$\frac{i\beta}{\gamma^2} \times (3.110) + \frac{i\omega}{\gamma^2} \times (3.112) \qquad \Rightarrow \qquad E_y = \frac{i\beta}{\gamma^2} \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{i\omega}{\gamma^2} \frac{\partial B_x}{\partial z} \tag{3.116}$$

$$\frac{i\beta}{\gamma^2} \times (3.112) - \frac{i\omega}{c^2 \gamma^2} \times (3.110) \qquad \Rightarrow \qquad B_z = \frac{i\beta}{\gamma^2} \frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{i\omega}{c^2 \gamma^2} \frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{3.117}$$

$$\frac{i\beta}{\gamma^2} \times (3.109) + \frac{i\omega}{\gamma^2} \times (3.113) \qquad \Rightarrow \qquad E_z = \frac{i\beta}{\gamma^2} \frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{i\omega}{\gamma^2} \frac{\partial B_x}{\partial y} \tag{3.118}$$

$$\frac{\mathrm{i}\,\beta}{\gamma^2} \times (3.112) - \frac{\mathrm{i}\,\omega}{c^2\,\gamma^2} \times (3.110) \qquad \rightsquigarrow \qquad B_z = \frac{\mathrm{i}\,\beta}{\gamma^2} \frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{\mathrm{i}\,\omega}{c^2\,\gamma^2} \frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{3.117}$$

$$\frac{\mathrm{i}\,\beta}{\gamma^2} \times (3.109) + \frac{\mathrm{i}\,\omega}{\gamma^2} \times (3.113) \qquad \rightsquigarrow \qquad E_z = \frac{\mathrm{i}\,\beta}{\gamma^2} \frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\mathrm{i}\,\omega}{\gamma^2} \frac{\partial B_x}{\partial y} \tag{3.118}$$

On remarque alors que les composantes transverses E_y, E_z, B_y et B_z sont données par simple combinaison linéaire des (dérivées des) composantes longitudinales B_x et E_x . Par conséquent, la seule connaissance des composantes longitudinales donne accès au champ électromagnétique complet.

Les modes d'un guide d'onde uniaxe se décomposent sur une base constituée

- \triangleright des modes Transverse Électrique, pour lesquels $E_x = 0$ mais $B_x \neq 0$;
- \triangleright des modes Transverse Magnétique, pour lesquels au contraire $B_x = 0$ mais $E_x \neq 0$;
- \triangleright d'un mode Transverse Électro-Magnétique, pour lequel $E_x = 0$ et $B_x = 0$.

N'importe quel mode du guide d'onde s'écrit comme une combinaison linéaire de modes de ces trois familles.

Remarque: L'unicité du mode TEM est montrée juste après.

3.5.2 Le mode TEM vérifie toujours la relation de dispersion du vide illimité

Dans le cas du mode TEM, les équations (3.115) à (3.118) imposent la nullité totale des champs, sauf si

$$\gamma^2 = 0, \tag{3.119}$$

ce qui s'écrit simplement

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \,, \tag{3.120}$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

3.5.3 Le mode TEM est unique et ne peut exister que dans un guide composé d'au moins deux conducteurs différents

Il s'agit ici de généraliser la démonstration menée dans le cadre de l'étude du câble coaxial, §3.4.2. Le calcul aboutissant à l'équation de Laplace pour le potentiel Ψ ,

$$\Delta\Psi = 0\,, (3.121)$$

ne fait pas appel à la géométrie du câble, et peut être repris tel quel en géométrie quelconque.

L'étape suivante consiste à préciser les conditions aux limites. Mathématiquement, on définit ainsi un problème de Dirichlet [6, §7.2] : on cherche une solution à l'équation de Laplace dans un domaine sur le bord du lequel les conditions aux limites sont données. On peut montrer que dans ce cadre le problème admet une unique solution, ainsi

Lorsqu'il existe, le mode TEM d'un guide est unique.

Par ailleurs, rappelons que le potentiel électrique, et donc Ψ , doit être uniforme dans un conducteur parfait, sous peine d'engendrer des densités de courants infinies.

Si le guide est constitué d'un seul conducteur, alors la surface de ce conducteur est une surface iso-potentiel. Dans ce cas, la solution Ψ = cte convient, conduisant à $\vec{e} = \vec{0}$ et $\vec{b} = \vec{0}$, et donc à l'absence de mode TEM dans un guide constitué d'un unique conducteur.

Deux conducteurs au moins sont nécessaires pour qu'un guide d'ondes puisse propager un mode TEM.

Bibliographie complète

- [1] Jean-Marie Brébec, Thierry Desmarais, Alain Favier, Marc Ménétrier, Bruno Noël, Régine Noël, Claude Orsini et Jean-Marc Vanhaecke. *Ondes 2e année MP-PSI-PC-PT*. H-Prépa. Hachette, 2004.
- [2] Marie-Noëlle Sanz et Bernard Salamito. Tout-en-un Physique PC-PC*. Dunod, 2010.
- [3] Baptiste Portelli et Julien Barthes. La physique par la pratique. H&K, 2005.
- [4] Richard Taillet. Optique physique. de Boeck, 2006.
- [5] Christian Garing. Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs. Ellipses, 1998.
- [6] Walter Appel. Mathématiques pour la physique et les physiciens. 4e éd. H&K, 2008. ISBN: 978-2-35141-039-4.
- [7] Michel Soutif. Vibration, propagation, diffusion. Dunod, 1970.
- [8] Angel Alastuey, Marc Magro et Pierre Pujol. Physique et outils mathématiques Méthodes et exemples. EDP Sciences, 2008. ISBN: 978-2-7598-0043-8.
- [9] John David Jackson. Classical electrodynamics. 3e éd. John Wiley & Sons, 1999. ISBN: 0-471-30932-X.
- [10] Christian Garing. Ondes mécaniques et diffusion. Ellipses, 1998.
- [11] Vincent Renvoizé, Éric Bellanger, Raphaël Girardi, Sébastien Paulin, Baptiste Portelli et Eddie Saudrais. *Physique PSI-PSI**. Cap Prépa. Pearson, 2010.
- [12] Étienne Guyon, Jean-Pierre Hulin et Luc Petit. Hydrodynamique physique. 2e éd. EDP Sciences, 2001.
- [13] Bertrand Lahaye. Propagation des ondes : vitesse de phase, vitesse de groupe. BUP 649, déc. 1982.
- [14] Christian Garing. Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques. Ellipses, 1998.
- [15] Richard Haberman. Applied Partial Differential Equations. 5e éd. Pearson Prentice Hall, 2012. ISBN: 978-0321797063.
- [16] René Moreau. Propagation guidée des ondes acoustiques dans l'air. BUP 742, mar. 1992.
- [17] Antoine Chaigne. Ondes acoustiques. Ecole Polytechnique, 2001. ISBN: 9782730208406.