

ElectroMagnétisme



I Electrostatique.

• Loi de Coulomb :
$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3}$$

• Champs et potentiel Electrostat :
$$\vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d^3r'$$

$$V_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d^3r'$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

• Théorème de Gauss :
$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$
 avec $\left\{ \begin{array}{l} \Sigma \text{ surface fermée} \\ \vec{n} \text{ vecteur normal sortant} \end{array} \right.$

• Développement multipolaire : Pour $r \gg d$ (dimension de D) :

$$V(\vec{r}) \approx \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots \quad \text{avec}$$

$$Q_0 = \iiint_D \rho(\vec{r}') d^3r'$$

$$\vec{P} = \iiint_D \rho(\vec{r}') \vec{r}' d^3r'$$

• Energie des champs électrostat : NE S d'interaction d'une distribution :

Case discret :
$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_i V_{q_j}(\vec{r}_i) = \frac{1}{2} \iiint_D \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d^3r$$

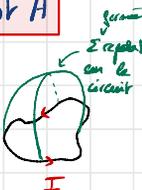
II Magnétostatique.

• Loi de Biot et Savart :
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \frac{\vec{j}(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d^3r'$$

• Potential vecteur :
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d^3r'$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

• Potentil vecteur créé par un dipôle :
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{n} \wedge \vec{r}}{r^3}$$
 avec
$$\vec{n} = \int_{\Sigma} I d\vec{s}$$



• Théorème d'Ampère : $\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \epsilon$

III Relations de passage : Δ Variables en régime variable.

On a $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{2 \rightarrow 1}$

$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \int_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$

Démonstration : on commence par utiliser $\text{div } \vec{E}$ et $\text{div } \vec{B}$ sur des cubes de part et d'autre de l'interface. Puis on utilise $\text{rot } \vec{E}$ et $\text{rot } \vec{B}$.

La composante tangentielle du champ \vec{E} et la composante normale du champ \vec{B} se conservent.

IV ARQS.

Démarche naïve : ARQS = retard $\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$ et négligeable devant l'évolution des sources.

En fait, subtilité : facteur de retard : $f = \frac{\int \vec{j}}{c \rho} = \frac{\|\vec{A}\|}{|\vec{V}|} \times c$

→ ARQS électrique : $f = \frac{\int \vec{j}}{c \rho} \ll 1$: les charges dominent les courants.

Eq. Max : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$\text{div } \vec{B} = 0$

$\text{rot } \vec{E} \approx \vec{0}$

$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

↳ $\vec{E} = -\text{grad } V$ OK en ARQS E

NAIS

Le courant de déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ joue un rôle important en ARQS E
 → \vec{B} du condensateur
 → facteur du courant
 → conservation de la charge.

→ ARQS magnétique : $f = \frac{\int \vec{j}}{c \rho} \gg 1$: les courants dominent les charges.

Eq. Max : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$\text{div } \vec{B} = 0$

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

NAIS

OK Théorème d'Ampère.

⊕ Jauges.

$$\bullet \operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} \mid \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\begin{aligned} \bullet \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow \operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \\ &\Rightarrow \exists V \mid \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} V \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\left(\operatorname{grad} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Leftrightarrow \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \left(\operatorname{grad} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) \\ &\Leftrightarrow \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \left(\operatorname{grad} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) \\ &\Leftrightarrow \boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right)} \end{aligned}$$

$$\bullet \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow -\operatorname{div} \left(\operatorname{grad} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \dots \Rightarrow \boxed{\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right)}$$

$$\bullet \text{On a } \begin{cases} \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \\ \vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \phi \\ V' = V - \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Egalement} \\ \text{solution!} \end{array}$$

\uparrow
 $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} = 0)$

\vec{A} et V sont uniques à ϕ près, c'est ce qu'on appelle une invariance de jauge.

\Rightarrow Choix de ϕ = Choix d'une relation de jauge.

• 2 jauges à connaître : \rightarrow en statique : $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ = Jauge de Coulomb.

\rightarrow jauge telle que : $\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ = Jauge de Lorentz.

VI Rayonnement dipolaire

- 3 hypothèses :
 - ① Approximation dipolaire : on regarde en $r \gg a$ ← dimension de la source
 - ② ARQS des sources : temps de propagation négligeable à l'échelle de la distribution.

$$c\tau \gg a$$

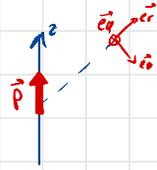
- ③ Source non relativiste.

On calcule alors le potentiel vecteur :
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{r} d^3r'$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}{r} d^3r'$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt'} \left(\underbrace{\sum_{i \in D} q_i \vec{r}_i(t')}_{=\vec{p}} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{P}(t')}{dt'}$$

- Puis on retrouve \vec{B} et \vec{E} avec $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2 \text{rot} \vec{B}$.

On trouve
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi} \left(\frac{\dot{\vec{p}}}{r^2} + \frac{\ddot{\vec{p}}}{rc} \right) \vec{e}_\varphi$$



• Champ proche $\Leftrightarrow "c\tau \gg r \gg a" \Leftrightarrow \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}}{r^2} \vec{e}_\varphi$

• Champ lointain \Leftrightarrow zone de rayonnement $\Leftrightarrow "r \gg c\tau \gg a" \Leftrightarrow \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi} \frac{\ddot{\vec{p}}}{rc} \vec{e}_\varphi$