

Méca Fle



* Particule fluide : système fermé de vaille microscopiques.

* Lignes de courant : tangentes au champ de vitesse en tout point.

* Filet de fluide : ensemble de points par lesquels passent les particules provenant d'un même point.

écoulement stationnaire $\Rightarrow$ trajectoires des particules
 = lignes de courant
 = filets de fluide.

• Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \vec{u}) &= \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div}(\vec{u}) \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div}(\vec{u}) &= 0 \\ &= \frac{D\rho}{Dt} \end{aligned}$$

• Fluide incompressible :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{div}(\vec{u}) = 0$$

• Tenseur des contraintes : Tenseur d'ordre 2 qui représente les actions de contact exercées sur la particule fluide d'étude : $\overline{\sigma}_{xy} \equiv$ contrainte exercée dans la direction $\vec{e}_x$ sur la face de normale $\vec{e}_y$.

La force surfacique s'exerçant sur une face de normale $\vec{n}$ est :

$$d\vec{F}_n = \overline{\overline{\sigma}} \otimes \vec{n} dS$$

produit tensoriel.

Le tenseur des contraintes est symétrique.

• Equation de la dynamique :

$$\frac{D}{Dt}(\rho \vec{u}) = \operatorname{div}(\overline{\overline{\sigma}}) + \vec{f}$$

$$\text{avec } \operatorname{div}(\overline{\overline{\sigma}}) = \begin{pmatrix} \operatorname{div}(\overline{\overline{\sigma}}_x) \\ \operatorname{div}(\overline{\overline{\sigma}}_y) \\ \operatorname{div}(\overline{\overline{\sigma}}_z) \end{pmatrix}$$

colonnes de $\overline{\overline{\sigma}}$

• Fluide newtonien : on suppose que la relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations est linéaire et indépendante du temps.

• Formes de viscosité pour un fluide newtonien :

$$\operatorname{div} \overline{\overline{\sigma}} = -\operatorname{grad} P + \eta \Delta \vec{u} + (\zeta + \eta) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{u})$$

viscosité dynamique

seconde viscosité

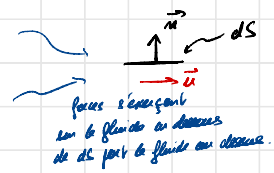
force de viscosité

- Actions de contact :
Version CPGE

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Forces surfaciques de pression : } d\vec{F}_p^s = -P \cdot \vec{n} \, dS \\ \text{Forces surfaciques de viscosité : } d\vec{F}_v^s = \eta \frac{\partial u_x}{\partial z} \, dS \vec{e}_z \end{array} \right.$

Δ Fluide newtonien
et incompressible.

cas particulier
écoulement $\vec{u} = u_x(z) \vec{e}_x$



- Forces volumiques équivalentes :

$\left\{ \begin{array}{l} d\vec{F}_p = -\text{grad } P \, d\tau \\ d\vec{F}_v = \eta \Delta \vec{u} \, d\tau \end{array} \right.$

- Equations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien, incompressible

$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\text{grad } P + \eta \Delta \vec{u} + \vec{f}_v \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \\ \text{div } \vec{u} = 0 \end{array} \right.$

- Viscosité cinématique :

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$

c'est un coeff de diffusion

viscosité $\Leftrightarrow$ diffusion de quantité de mouvement

- OrdG :

Fluide	viscosité dynamique (kg.m ⁻¹ .s ⁻¹ ou Poiseuille P)	masse volumique (kg.m ⁻³)	viscosité cinématique (m ² .s ⁻¹)
Air	1.8 . 10 ⁻⁵	1000	1.4 . 10 ⁻⁵
Eau	1.0 . 10 ⁻³	1,3	1.0 . 10 ⁻⁶
Glycérol	1.4	1300	1.1 . 10 ⁻³

- Nombre de Reynolds :

$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\| \text{convection de qd} \|}{\| \text{diffusion de qd} \|}$

- Un écoulement est dit laminaire si les lignes de courant "glissent" les unes sur les autres en restant parallèles.

- Un écoulement est dit turbulent si il est irréversible et que sa structure est chaotique.

La transition laminaire-turbulent se fait à partir d'un nombre de Reynolds critique qui dépend de l'écoulement.
En général, $Re_c \approx 2000$ à 3000 .

- Écoulement autour d'un obstacle : les effets visqueux se concentrent dans la couche limite.

→ Dimension caractéristique de la couche limite :

$$\frac{\delta}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

← se retrouve en supposant que US dans la couche limite est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \nu \frac{1}{L} \Rightarrow \delta = \sqrt{2\nu L} = L \sqrt{\frac{2\nu}{UL}} = \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

- Écoulement de Stokes : écoulement à faible Re et stationnaire : $\vec{\text{grad}} P = \eta \Delta \vec{u}$ = équation réversible.

- Forces sur un obstacle :

→ À très bas Reynolds : force de Stokes :

$$\vec{F} = +6\pi\eta R \vec{u}_\infty$$

vitesse du fluide

→ Simon :

$$\begin{cases} \text{force de traînée : } F_0 = \frac{1}{2} \rho u^2 C_0 A \\ \text{force de portance : } F_e = \frac{1}{2} \rho u^2 C_e A \end{cases}$$

Surface frontale

coeff de traînée et de portance

Pour un écoulement donné, ils dépendent uniquement de Re .

- Fluide parfait : fluide dont on peut négliger la viscosité.

→ Équation d'Euler pour un fluide parfait et incompressible :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\text{grad}} P + \vec{f}_v$$

• Déduction de Bernoulli :

hypothèses : Pour un écoulement de fluide

→ parfait

→ incompressible

→ dont les forces volumiques
dériver d'une ep.

→ stationnaire

$$\Rightarrow \boxed{\frac{D}{Dt} \left(\rho \frac{u^2}{2} + P + \phi \right) = 0}$$

énergie potentielle
volumique

→ le long d'une ligne de courant :

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + P + \phi = C^{ste}$$

Démo : vient de NS scalaire $\vec{u}$.

Remarque : Pour un écoulement stationnaire mais irrotationnel.

$$\text{On a } \vec{\text{rot}} \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \exists \phi \quad \vec{u} = \vec{\text{grad}} \phi$$

$$\text{Alors } \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} \left(\frac{u^2}{2} \right) \quad \text{car } \vec{\text{rot}} \vec{u} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{\text{grad}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \right)$$

$$\text{D'où NS implique : } \vec{\text{grad}} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \frac{u^2}{2} + P + \phi \right) = 0$$

soit

$$\boxed{\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \frac{u^2}{2} + P + \phi = C^{ste}}$$

Par conséquent le fluide :