Néca a

# I) Approche ondulatoire.

* Dualité onde corpuscule : lumière = photons : particules de masse nulle et d'impulsion $\boxed{p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}}$

↳ Louis de Broglie : "toute matière est dotée d'une onde associée" : $\boxed{\lambda_{dB} = \frac{h}{p}}$ et $\boxed{\vec{p} = \hbar \vec{k}}$.

Proba que la particule soit dans $d^3\vec{r}$ autour de $\vec{r}$ à $t$.

* Particule décrite par une fonction d'onde $\Psi(\vec{r},t)$ $\Rightarrow$ $\boxed{dP(\vec{r},t) = |\Psi(\vec{r},t)|^2 d^3\vec{r} = \Psi^*(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)\, d^3\vec{r}}$.

* Condition de Normalisation : $\boxed{\iiint_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\vec{r},t)|^2 d^3\vec{r} = 1}$

* Equation d'évolution : Equation de Schrödinger (1925) : $\boxed{i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)}$

* Particule libre : $V = 0$ $\Rightarrow$ les ondes planes sont solutions de l'équation de Schrödinger.

$\Rightarrow$ $\boxed{\Psi(\vec{r},t) = A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}}$ avec $\boxed{\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}}$. Problème : $\iiint_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\vec{r},t)|^2 d^3\vec{r} = |A|^2 \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} = +\infty$.

→ 2 solutions : * boîte finie avec $|\Psi|^2 = 0$ en dehors $\Rightarrow$ $|A|^2 = \frac{1}{L^3}$.

* paquets d'onde : $\boxed{\Psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint g(\vec{k})\Psi_{\vec{k}}(\vec{r},t)\, d^3\vec{k} = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint g(\vec{k}) A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} d^3\vec{k}}$

avec $\boxed{\iiint |\Psi(\vec{r},t)|^2 d^3\vec{r} = 1}$ et $\boxed{g(\vec{k}) = \text{TF de } \Psi(\vec{r},0)}$

* Relation d'incertitude de Heisenberg : $\boxed{\Delta\vec{r}\,\Delta\vec{p} \geq \frac{\hbar}{2}}$ avec $\Delta a^2 = \langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2$

→ démo pour un paquet d'onde. On choisit l'origine tel que $\left| \begin{array}{l} \langle \vec{r} \rangle = \vec{0} \\ \langle \vec{p} \rangle = \vec{0} \end{array} \right.$.

* Courant de densité de proba : $\int_{\mathbb{R}^3} |\Psi|^2 d^3\vec{r} = 1$ donc $|\Psi|^2 \nearrow$ dans une région $\Rightarrow$ $|\Psi|^2 \searrow$ dans une autre.

$\Rightarrow$ courant de densité de probabilité.

On a $\boxed{\frac{\partial |\Psi(\vec{r},t)|^2}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}} = 0$ avec $\boxed{\vec{j} = \frac{1}{m}\operatorname{Re}\Big(\Psi^* \big(\underbrace{\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}}_{=\hat{p}}\big)\Psi\Big)}$

Démo : écrire l'éq Schro + son conjugué hermitique et calculer $\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} = \frac{\partial \Psi\Psi^*}{\partial t}$

# III) Formalisme de Dirac.

- **1er principe de la MQ : Principe de superposition.**
  A chaque système physique est associé un espace de Hilbert $\mathcal{E}_H$. L'état du système est défini à chaque instant, par un vecteur normé $|\psi(t)\rangle$ de $\mathcal{E}_H$.

- Définitions :
  - Soit $\hat{A}$ un opérateur de $\mathcal{E}_H$. L'opérateur adjoint, noté $\hat{A}^+$, est défini par :

$$\boxed{\langle\psi_2|\hat{A}|\psi_1\rangle = \left(\langle\psi_1|\hat{A}^+|\psi_2\rangle\right)^*} \qquad \forall\, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$$

- Si $\hat{A} = \hat{A}^+$, on dit que $\hat{A}$ est hermitien ou auto-adjoint.
- Si $\hat{A}$ est autoadjoint alors $\langle a\rangle_\psi = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \left(\langle\psi|\hat{A}^+|\psi\rangle\right)^* = \left(\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle\right)^* = \langle a\rangle_\psi^*$.
  $\Rightarrow$ $\boxed{\hat{A} = \hat{A}^+ \Rightarrow \langle a\rangle = \langle a\rangle^* \Rightarrow \text{la valeur moyenne de } \hat{A} \text{ est réelle.}}$

$\hat{P}_n|\psi\rangle = \underbrace{\langle n|\psi\rangle}_{PS}|n\rangle$

- Projecteur : on appelle projecteur sur l'état $|n\rangle$, noté $\hat{P}_n$, l'opérateur défini par : $\boxed{\hat{P}_n = |n\rangle\langle n|}$
- Projecteur sur un sous-espace : Soit $\{|n\rangle, n \in \{\nu\}\}$ une BON de ce ssev alors :

$$\boxed{\hat{P}_\nu = \sum_{n\in\{\nu\}} |n\rangle\langle n|}$$

- **Relation de fermeture** : Soit $\{|n\rangle\}$ une BON de $\mathcal{E}_H$, alors $\boxed{\sum_n \hat{P}_n = \mathbb{1}}$

- **Théorème spectral** : L'ensemble des vecteurs propres orthonormés d'un opérateur auto-adjoint forme une base hilbertienne de $\mathcal{E}_H$.

- **2ème principe de la MQ : mesure des grandeurs physiques.**
  a) A toute grandeur physique A est associée un opérateur linéaire auto-adjoint $\hat{A}$ : $\hat{A}$ est l'observable représentant A.
  b) Soit $|\psi\rangle$ l'état dans lequel se trouve le système au moment où l'on effectue la mesure de A. Les résultats possibles de la mesure sont les valeurs propres de $\hat{A}$.
  c) Soit $\hat{P}_\alpha$ le projecteur sur le ssev associé à la vp $a_\alpha$. La probabilité de trouver $a_\alpha$ lors d'une mesure est :

$$\boxed{\mathcal{P}(a_\alpha) = \| \hat{P}_\alpha|\psi\rangle\|^2 = \| |\psi_\alpha\rangle\|^2}$$

  d) Immédiatement après le résultat d'une mesure ayant donné $a_\alpha$, le nouvel état du système est :

$$\boxed{|\psi'\rangle = \frac{|\psi_\alpha\rangle}{\| |\psi_\alpha\rangle\|}}$$

- **$3^{\text{ème}}$ principe de la MQ : Evolution dans le temps.**

Soit $|\Psi(t)\rangle$ l'état d'un système à l'instant $t$. Tant que le système n'est soumis à aucune observation, son évolution au cours du temps est régie par l'équation de Schrödinger :

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}\,|\Psi(t)\rangle}$$

- Relations de commutations : $\forall \alpha, \beta \in \{1,2,3\}^2$ $\boxed{[\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar\, \mathbb{1}\, \delta_{\alpha\beta}}$

Ehrenfest : $\dfrac{d\langle A\rangle}{dt} = \left\langle \dfrac{\partial A}{\partial t} \right\rangle + \dfrac{i}{\hbar}[H, A]$