

Mécanique



I Cinématique

* Référentiel: association d'un repère d'espace et d'un repère de temps (horloge).

* Composition des dérivées vectorielles: $\left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{S'} = \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_S + \vec{V} \wedge \vec{\Omega}_{S'/S}$ Vecteur "rotation" de S' dans S .

* Composition des vitesses: $\left. \frac{d\vec{O}\vec{M}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{O}\vec{O}'}{dt} \right|_R + \left. \frac{d\vec{O}\vec{M}}{dt} \right|_{R'}$
 $= \vec{v}_R(O') + \vec{v}_{R'}(M) + \vec{O}\vec{M} \wedge \vec{\Omega}_{R'/R}$

$$\Rightarrow \vec{v}_R(M) = \vec{v}_E(M) + \vec{v}_{R'}(M) \quad \text{avec} \quad \vec{v}_E = \vec{v}_R(O') + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O}\vec{M}$$

= vitesse d'entraînement.

* Point coïncident: Point fixe dans R' qui coïncide avec M à l'instant t .

$\Rightarrow$ la vitesse d'entraînement est la vitesse du point coïncident.

* Composition des accélérations: $\vec{a}_R(M) = \vec{a}_{R'}(M) + \vec{a}_E(M) + \vec{a}_C(M)$
↑
accélération
d'entraînement ↑
accélération de Coriolis.

Avec: $\vec{a}_E(M) = \vec{a}_R(O') + \frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \vec{O}\vec{M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O}\vec{M})$

$$\vec{a}_E(M) \equiv \text{Accélération du point coïncident à } M !!!$$

$$\triangle \vec{a}_C(M) \neq \frac{d\vec{v}_E(M)}{dt}$$

et $\vec{a}_C(M) = 2 \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{R'}(M)$

II Mécanique du point / du solide en ref. gal.

* Force: couple (vecteur, point d'application) qui décrit les effets d'un système sur un autre.

* Postulat: Une force est la même dans tous les référentiels.

- 4 types de forces:
 - gravitationnelle: interaction de portée infinie qui cause l'attraction de corps massifs entre eux. C'est elle qui détermine la structure de l'Univers à grande échelle.
 - électromagnétique: interaction entre particules chargées, de portée infinie, responsable de la cohésion de la matière.
 - forte: interaction attractive de très faible portée (échelle nucléaire) qui agit sur les nucléons et est responsable de la cohésion du noyau.
 - faible: s'exerce sur les leptons (électrons, neutrinos...) à très faible portée (analogue à l'interaction forte) et qui intervient par exemple dans le processus de radioactivité β .

• Première Loi de Newton: Principe d'inertie.

Il existe une famille de référentiels, dits galiléens, dans lesquels tout système isolé persiste en mouvement rectiligne uniforme.

• Seconde Loi de Newton: Principe fondamental de la dynamique.

Dans un référentiel galiléen, la dérivée de la quantité de mouvement d'un système fermé est égale à la somme des forces extérieures qui s'exercent sur ce système.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{ext,i}$$

• Troisième Loi de Newton: Principe d'action-réaction.

Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction, mais de sens opposé, exercée par le corps B.

* Moment cinétique: $\vec{\sigma}_O(t) = \vec{O} \wedge m \vec{v} \quad (= \iiint_V \vec{O} \wedge dm \vec{v}(t) = \iiint_V \vec{O} \wedge \rho \vec{v}(t) d\tau)$

* Théorème du moment cinétique: $\frac{d\vec{\sigma}_O(t)}{dt} = \sum_i \vec{O} \wedge \vec{F}_{ext,i}$

⚠ Le référentiel doit être galiléen et le point fixe dans le référentiel étudié.

* Moment d'inertie: Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe: $\vec{v}(t) = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$.

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_S(t) = \iiint_V \vec{O} \wedge dm \vec{v}(t) = \iiint_V r \vec{e}_r \wedge r \dot{\theta} \vec{e}_\theta dm = \left(\underbrace{\iiint_V r^2 dm}_{= J_S} \right) \dot{\theta} \vec{e}_z = J_S \dot{\theta} \vec{e}_z$$

* Subtilités mécaniques du point vs masse du solide :

Pour un solide, la PFD et la TDC sont les variables et on ne prend en compte QUE les forces extérieures car les forces intérieures s'annulent 2 à 2 en vertu du principe d'action réaction.

CEPENDANT : la thèse de l'URS cinétique se démontre en appliquant la PFD à chaque point matériel qui compose le système. Ceci explique que la puissance des forces intérieures intervient dans la thèse de l'URS cinétique.

• Théorème de l'Energie cinétique : Pour un système fermé, en référentiel galiléen :

$$\rightarrow \text{dém. : } E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$$

$$\Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

$$\begin{aligned} \text{PFD sur chaque } i &= \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{f}_i \\ &= P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} \end{aligned}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$$

← puissance des forces intérieures.

↑
puissance des forces extérieures

+ Rappel : Puissance : $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

* Système conservatif : système tel que, parmi les forces qu'il subit, celles qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle.

* Théorème de l'énergie mécanique : En référentiel galiléen, l'énergie mécanique d'un système conservatif est constante :

$$E_m = E_p + E_c = C^{\text{te}}$$

+ Quelques lois de composition utiles :

* Vitesse d'un point dans un solide :

$$\vec{v}_R(B) = \vec{v}_R(A) + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}$$

← vecteur rotation du solide dans A

↑
points du solide
= BABAR

+ Composition des moments :

$$\vec{\sigma}_O(n) = \vec{\sigma}_O(n) + \vec{OO} \wedge m \vec{v}(n)$$

III Référentiels non galiléens.

Pour obtenir la PFD en ref non gal, on applique la PFD en ref gal et on utilise la loi de composition des accélérations :

$$m \vec{a}_R(n) = \vec{F}_{ext} \Rightarrow m(\vec{a}_R(n) + \vec{a}_e(n) + \vec{a}_c(n)) = \vec{F}_{ext}$$

$$\Rightarrow m \vec{a}_R(n) = \vec{F}_{ext} - m \vec{a}_e(n) - m \vec{a}_c(n)$$

$$m \vec{a}_R(n) = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

avec $\begin{cases} \vec{F}_e = \text{force d'inertie d'entraînement} \end{cases}$

$\begin{cases} \vec{F}_c = \text{force d'inertie de Coriolis} \end{cases}$

→ Ce sont des pseudo forces car elles dépendent du référentiel.

Propriété : La force d'inertie de Coriolis ne travaille pas.

Conséquence : Théorème de l'énergie cinétique en Ref non gal :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{entraînement}$$

Remarque : $\vec{F}_c$ peut être conservative ou non.

Dans le cas particulier d'une rotation uniforme, elle est conservative (force centrifuge)

On suit la même démarche pour le théorème du moment cinétique, le point d'application du moment doit être fixe dans le référentiel non galiléen.

$$\omega_{\text{Terre}} \approx 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

* Quelques référentiels :

- ref héliocentrique : origine = centre de gravité du soleil, axes vers 3 étoiles fixes.
 - ref de Copernic : origine = centre de gravité du système solaire, axes vers 3 étoiles fixes.
 - ref géocentrique : origine = centre de gravité de la Terre, axes vers 3 étoiles fixes.
 - ref Terrestre : origine = centre de gravité de la Terre, axes liés à la Terre.
- En rotation dans le ref géocentrique.

= galiléen sur de très grandes échelles de temps devant 1 année.

IV) Loi de Coulomb

$$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2}$$

↑
force de frottement

avec $\vec{T}$ de même direction que la vitesse de glissement, même de sens opposé.

• Loi de Coulomb dynamique :

$$\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| = f_d \|\vec{U}_{1 \rightarrow 2}\|$$

——— statique :

$$\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq f_s \|\vec{U}_{1 \rightarrow 2}\|$$

avec, en général f_s et f_d très proches
mais $f_d < f_s$.

• Remarque : la vitesse de glissement entre 2 solides est indépendante de référentiel.