4 Stat

I) Ensemble microcanonique

* Ensemble microcanonique : ensemble statistique constitué des répliques fictives d'un système isolé : l'énergie interne U, le volume V et le nombre de particules du système étant fixés.

* Macro-état : donnée de (U, V, N).
* Micro-état : configuration microscopique du système permettant la réalisation d'un macro-état donné.

On note $\Omega(E, V, N)$ le nombre de micro-états d'un système dans le macro-état (U, V, N).

* Entropie statistique : $\boxed{S = -k \sum_{l \in \Omega} p_l \ln(p_l)}$ avec p_l = proba de réalisation du micro-état l.

• Postulat fondamental de la physique statistique :
Si un système isolé est à l'équilibre, tous les micro-états accessibles sont équiprobables.

• Hypothèse ergodique (ou quasi-ergodique) : si on attend suffisamment longtemps, on peut identifier la moyenne statistique et la moyenne temporelle d'une grandeur.

• Conséquences : → la proba de réaliser un micro-état est $\boxed{p_l = p = \frac{1}{\Omega(U,V,N)}}$.

→ l'entropie microcanonique est $\boxed{S(U,V,N) = k_B \ln(\Omega(U,V,N))}$

II) Ensemble canonique.

* Ensemble canonique : ensemble statistique formé des copies virtuelles d'un système fermé en contact avec un thermostat à la température T.

• Facteur de Boltzmann : la proba que le système soit dans un micro-état d'énergie E est

$$\boxed{p(E) = \frac{g(E)}{Z} \underbrace{\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)}_{\text{= facteur de Boltzmann}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{Z = \sum_E g(E) \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)}.$$

$g(E)$: dégénérescence = nbre de micro état d'NRJ E.

Z : fonction de partition

- **Algorithme à retenir pour déterminer un système dans l'ensemble canonique :**

  - Fonction de partition : $\boxed{Z = \sum_E g(E) \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)}$.
  - Energie libre moyenne : $\boxed{\langle F \rangle = -k_B T \ln(Z)}$.
  - Entropie moyenne : $\boxed{\langle S \rangle = -\frac{d\langle F \rangle}{dT}}$.
  - Energie interne : $\boxed{\langle U \rangle = \langle F \rangle + T\langle S \rangle}$

- Autre formules utiles : * $\boxed{U = \langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}}$

  * $\boxed{C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N}}$

* Théorème d'équipartition de l'énergie : chaque degré de liberté quadratique indépendant du système contribue à hauteur de $\frac{1}{2} k_B T$ dans l'énergie interne du système.

- Factorisation de la fonction de partition : Supposons un système divisé en N sous-systèmes avec des énergies d'interactions négligeables : ces systèmes sont considérés indépendants.

  Alors $\boxed{Z_{tot} = \prod_{i=1}^{N} Z_i}$ et, si ces systèmes sont identiques : $\boxed{Z_{tot} = Z^N}$.

  fonction de partition globale

  fonctions de partition des sous-systèmes.

⚠ Ceci n'est valable que pour des systèmes discernables, sinon, il faut diviser par N!.

III) Ensemble grand canonique.

* Ensemble grand-canonique : ensemble statistique formé des copies virtuelles d'un système de volume V fixé échangeant de l'énergie et de la matière avec un thermostat / réservoir de particules de température T et de potentiel chimique μ fixés.

- Probabilité d'observer un micro-état (U, N) : $\boxed{P(U,N) \propto \exp\left(-\frac{U-\mu N}{k_B T}\right)}$

- Grande fonction de partition : $\boxed{\Xi(\mu, V, T) = \sum_{N=0}^{+\infty} z^N Q_N(V,T)}$ ← valable pour des particules indiscernables.

avec $z \equiv$ fugacité : $\boxed{z = \exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right)}$ et $Q_N(V,T)$ = fonction de partition canonique à (N,V,T) pour des particules indiscernables.

- Réflexe : Ensemble grand canonique : calculer $\langle N \rangle \equiv$ nombre moyen d'occupation.

Dans 90% des cas : $\boxed{\langle N \rangle = z \frac{\partial \ln \Xi}{\partial z}}$ avec z la fugacité !

- Liens avec la thermo :

→ Grand potentiel : $\boxed{\langle J(\mu, V, T) \rangle = -k_B \ln(\Xi(\mu, V, T))}$

→ Entropie : $\boxed{\langle S \rangle = -\frac{d \langle J \rangle}{dT}}$

→ Energie interne : $\boxed{\langle U \rangle = \langle J \rangle + T \langle S \rangle + \mu \langle N \rangle}$

- Autres relations : $\boxed{\langle U \rangle = -\left(\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \beta}\right)_{\mu, N}}$ et $\boxed{\langle J \rangle = -PV}$

déf de la pression dans l'ensemble GC.

IV) Statistiques quantiques.

- Loi de Fermi-Dirac : $\boxed{n_F(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left(+\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right) + 1}}$

- Loi de Bose-Einstein : $\boxed{n_B(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left(+\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right) - 1}}$ $\Rightarrow \varepsilon_0 > \mu$

niveau d'NRJ minimal.

- Cas particulier : photons ⟺ bosons de potentiel chimique nul :

$\boxed{n_p(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) - 1}}$ avec $\boxed{\varepsilon = h\nu}$.

• **Réflexe** : "Gaz parfait de " $\Rightarrow$ $\boxed{dN_p = g\,\frac{4\pi V}{h^3}\,p^2\,dp}$ g ≡ dégénérescence.

≡ Nombre d'état qui correspondent à une qdm de norme p à dp près

vient de l'intégration de $d^3\vec{r}$ sur le volume V dispo.

vient de l'isotropie $\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi$

On peut ensuite passer à la densité d'état en énergie en utilisant la relation entre $\vec{p}$ et E.

• **Energie de Fermi** : énergie du plus haut état occupé à $T = 0K$.

V) Rayonnement thermique.

• Pour un photon : $g = 2$ dues aux 2 états de polarisation.
$E = pc = h\nu$

$$\Rightarrow \boxed{dN(E) = g(E)\,dE = \frac{8\pi V}{h^3}\,\frac{E^2}{c^3}}$$

• On définit la densité spectrale d'énergie volumique de rayonnement d'équilibre thermique par :

$$\boxed{du_\omega(\omega,T) = E\,\frac{g(E)}{V}\,n_p(\omega)\,dE}$$

$$= \hbar\omega \times \frac{1}{\pi^2} \times \frac{(\hbar\omega)^2}{\hbar^3 c^3} \times \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}\,\hbar\, d\omega$$

$$\boxed{du_\omega(\omega,T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\,\frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}\,d\omega}$$

≡ **Loi de Planck**.

• **Loi de Stephan** : $\boxed{P_s = \sigma T^4}$ avec $\boxed{\sigma = 5{,}67\times10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}}$

• **Loi de Wien** : $\boxed{T\lambda_{max} = c^{te}}$ $(= 2{,}898.10^{-3}\ m.K)$

$\boxed{T_{surface,soleil} = 5800K\ +\ \lambda_{max,soleil} = 500\ nm}$ $\Rightarrow c^{te} \simeq 2{,}9.10^{-3}$ OK

- Corps noir = corps opaque qui absorbe totalement tout rayonnement incident, quel que soit sa fréquence et sa direction d'incidence.

- Propriété du corps noir : à l'équilibre thermique, un corps noir réémet donc sous forme de rayonnement thermique tout le rayonnement qu'il absorbe.

- "Définition" rayonnement thermique : Dans une cavité vide de toute matière, contenue dans une enceinte fermée dont les parois sont maintenues à la température T s'établit ce rayonnement d'équilibre thermique.