Mathieu CANCADE

Résolution d'une équation différentielle d'ordre 2 par la méthode d'Euler

On souhaite résoudre une équation différentielle du type :

$$\ddot{x}(t) = a\,\dot{x}(t) + b\,x(t) + c$$

Le programme proposé s'applique donc, par exemple, au pendule simple amorti, où les équations du mouvement donnent :

$$\ddot{\theta}(t) = -\gamma\,\dot{\theta}(t) - \frac{g}{L}\sin(\theta(t))$$

avec γ la constante d'amortissement

g l'accélération gravitationnelle

L la longueur de la corde.

Pour la méthode d'Euler, on suppose $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ connues.

On constitue une liste de dates t_i, séparées d'un pas fixe :

$$p = t_{i+1} - t_i$$

On approxime les valeurs $[x(t_{i+1})\,;\,\dot{x}(t_{i+1})]$ à partir des valeurs $[x(t_i)\,;\,\dot{x}(t_i)]$ via des taux d'accroissements :

$$\dot{x}(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \quad \text{et} \quad \ddot{x}(t_i) = \frac{\dot{x}(t_{i+1}) - \dot{x}(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

Soit, in fine :

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + p\,\dot{x}(t_i)$$

$$\dot{x}(t_{i+1}) = \dot{x}(t_i) + p\,\ddot{x}(t_i) = \dot{x}(t_i) + p\left(a\dot{x}(t_i) + b x(t_i) + c\right)$$

⚠ De par les approximations réalisées, la méthode d'Euler induit une <u>divergence</u> des résultats obtenus (en particulier si le pas de temps choisi est trop important).