



Rapport de stage de L3

# LIEN ENTRE LA PROGRAMMATION LINÉAIRE TROPICALE, LES JEUX À PAIEMENT MOYEN ET LES JEUX DE PARITÉ

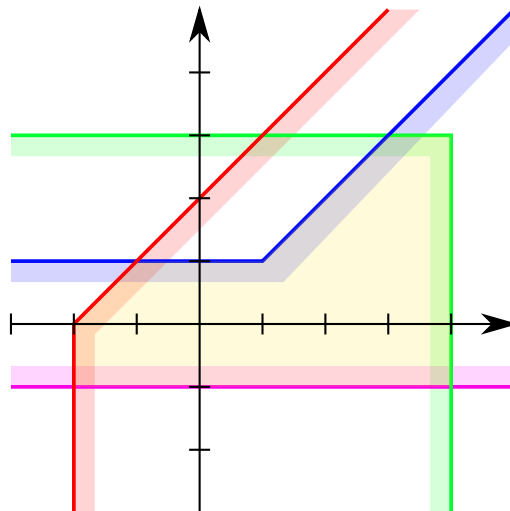
Mattéo Clémot

Encadrants :

Stéphane Gaubert et Xavier Allamigeon

Équipe Tropical (INRIA Saclay / École Polytechnique)

Juin-juillet 2020



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Mathématiques tropicales</b>	<b>3</b>
1.1 Préambule algébrique . . . . .	3
1.2 Géométrie tropicale . . . . .	4
1.3 Séries de Hahn et de Puiseux . . . . .	6
<b>2 Jeux à paiement moyen et de parité</b>	<b>6</b>
2.1 Définitions . . . . .	7
2.2 Réduction des jeux de parité aux jeux à paiement moyen . . . . .	8
2.3 Résultats et complexité algorithmique concernant ces jeux . . . . .	8
<b>3 Des jeux de parité aux programmes linéaires</b>	<b>9</b>
3.1 Jeux à paiement moyen et programmes linéaires tropicaux . . . . .	9
3.2 Programmation linéaire tropicale et programmation linéaire . . . . .	9
3.3 Double déquantisation . . . . .	10
<b>4 Approche géométrique des jeux de parité</b>	<b>12</b>
4.1 Un exemple . . . . .	12
4.2 Position générale de l'arrangement d'hyperplans . . . . .	12
4.3 Intérieur non vide de l'intersection des demi-espaces . . . . .	14
<b>Conclusion</b>	<b>17</b>
<b>A Contexte institutionnel et social du stage</b>	<b>18</b>

# Introduction

## Contexte

Les jeux à paiement moyen sont une classe de jeux à deux joueurs sur un graphe. La complexité de leur résolution, qui consiste à déterminer le vainqueur, est encore mal connue : si on sait que ces jeux sont dans  $\mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$  et qu'il existe un algorithme de résolution en temps pseudo-polynomial, on ne sait pas s'ils sont dans  $\mathbf{P}$ .

D'autre part, la programmation linéaire consiste en l'optimisation d'une application linéaire avec des contraintes linéaires. En dépit de l'existence d'algorithmes très utilisés comme celui du simplexe ou celui des points intérieurs, la question de la faisabilité en temps fortement polynomial demeure non résolue et constitue le neuvième problème de Smale.

L'équipe de recherche ayant encadré ce stage, Tropical, est spécialisée dans les applications diverses des mathématiques tropicales, qui consistent à travailler dans des structures où l'addition a été remplacée par le maximum et la multiplication par l'addition. L'équipe Tropical a notamment cherché à relier les deux domaines précédents en travaillant sur la géométrie des jeux à paiement moyen et ses liens avec la programmation linéaire. En particulier, il a été montré que les jeux à paiement moyen sont équivalents à des programmes linéaires tropicaux. Il a été également montré que des programmes linéaires usuels suffisamment génériques, sur des corps ordonnés non-archimédien, étaient équivalents à des programmes linéaires tropicaux. Ainsi, un algorithme décidant la faisabilité d'un programme linéaire en temps polynomial résoudreait également les jeux à paiement moyen en temps polynomial.

## Objectif

Le travail réalisé durant ce stage s'intéresse plus précisément à une classe particulière de jeux à paiement moyen, appelés jeux de parité. En 2017, un algorithme résolvant ces jeux de parité en temps quasi-polynomial a été publié. Une question est alors de savoir quels sont les éventuelles particularités des programmes linéaires tropicaux obtenus à partir des jeux de parité, dans le but de déterminer lesquels pourraient être résolus avec un tel algorithme.

## Plan

Dans la Section 1, consacrée à l'aspect algébrique du sujet, on introduit les mathématiques tropicales et ainsi que certaines extensions utiles. On s'intéresse également aux objets géométriques classiques dans le cadre des mathématiques tropicales. Enfin, on s'intéresse à des corps de séries formelles utiles par la suite. Dans la Section 2, on introduit les jeux à paiement moyen et les jeux de parité, en explicitant une réduction des seconds aux premiers et en donnant quelques résultats classiques. Dans la Section 3, on explicite la façon dont sont liés les programmes linéaires tropicaux et les jeux à paiement moyen, puis celle dont les programmes linéaires tropicaux peuvent se ramener à des programmes linéaires usuels sur des corps non-archimédiens. Ces deux réductions successives nous amènent à travailler sur l'idée de double déquantisation pour les considérer d'un point de vue algébrique. Dans la Section 4, on s'intéresse tout particulièrement aux jeux de parité et aux particularités géométriques des programmes linéaires qu'ils engendrent.

Les Sections 1, 2, 3.1 et 3.2 constituent principalement un travail bibliographique et une étude de travaux préexistants, tandis que les Sections 3.3 et 4 représentent les contributions de ce stage.

# 1 Mathématiques tropicales

Les mathématiques tropicales consistent en l'étude d'objets mathématiques lorsque l'addition est remplacée par le maximum usuel, et la multiplication par l'addition usuelle. Le terme *tropical* a été choisi en l'honneur du mathématicien et informaticien brésilien Imre Simon, précurseur du domaine.

Les définitions de cette section proviennent essentiellement des articles [ABGJ14], [ABGJ15], [AGG14].

## 1.1 Préambule algébrique

Soit  $(G, +, \geq)$  un groupe abélien totalement ordonné. On pose  $\mathbb{T}(G) = G \cup \{0\}$ , écrit parfois plus simplement  $\mathbb{T}$ , où  $0$  est un nouvel élément inférieur à tous les éléments de  $G$ . On considère la structure  $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ , où la loi additive  $\oplus$  est donnée par  $a \oplus b = \max\{a, b\}$  et la loi multiplicative par  $a \odot b = a + b$ , étendue avec la convention  $a \odot 0 = 0 \odot a = 0$ . Il s'agit d'un semi-anneau, dans la mesure où :

- $(\mathbb{T}, \oplus)$  est un monoïde commutatif ( $\oplus$  est associative et commutative et dispose d'un élément neutre  $0$ ), et pas un groupe (puisque  $\oplus$  n'est pas inversible) ce qui constitue la différence avec un anneau ;
- $(\mathbb{T}, \odot)$  est un monoïde (et en fait même un groupe abélien,  $\odot$  ayant  $1 = 0_G$  pour élément neutre et étant inversible) ;
- $\odot$  est distributive sur  $\oplus$ .

Un exemple classique est le semi-anneau max-plus réel  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  muni de  $\oplus = \max$  et  $\odot = +$ . On a alors  $0 = -\infty$  et  $1 = 0$ .

**Calcul matriciel tropical** On définit les matrices et les opérations matricielles de façon usuelle, c'est-à-dire que pour deux matrices  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ , les matrices  $A \oplus B$  et  $A \odot B$  sont définies, sous réserve d'avoir des dimensions compatibles, par :

$$(A \oplus B)_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\}$$

$$(A \odot B)_{ij} = \bigoplus_k a_{ik} \odot b_{kj} = \max_k(a_{ik} + b_{kj})$$

De même, dans  $\mathbb{T}^n$ , la *multiplication scalaire* est donnée par  $\lambda \odot x = (\lambda + x_1, \dots, \lambda + x_n)$ . On peut alors voir alors  $\mathbb{T}^n$  comme un semi-module sur  $\mathbb{T}$ .

**Ensemble tropical signé** On construit maintenant l'ensemble des nombres tropicaux signés, noté  $\mathbb{T}_{\pm}$ . Il est constitué de deux copies de  $\mathbb{T}$  constituant d'une part les nombres tropicaux *positifs*, notés  $\oplus x$  ou simplement  $x$  avec  $x \in \mathbb{T}$ , et d'autre part les nombres tropicaux *négatifs*, notés  $\ominus x$  avec  $x \in \mathbb{T}$ . Les deux copies "coïncident" en  $0 = -\infty$ , c'est-à-dire que  $0 = \ominus 0$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{T}$ , on définit le *signe*  $\text{sgn}(x) = 1$  et  $\text{sgn}(\ominus x) = -1$  si  $x \neq 0$  et  $\text{sgn}(0) = 0$ , ainsi que le *module*  $|x| = |\ominus x| = x \in \mathbb{T}$ . On définit également pour tout  $x \in \mathbb{T}_{\pm}$  sa *partie positive*  $x^+$  et sa *partie négative*  $x^-$  par

$$x^+ = \begin{cases} |x| & \text{si } \text{sgn}(x) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad x^- = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{sgn}(x) = 1 \\ |x| & \text{sinon} \end{cases}$$

La multiplication de  $x, y \in \mathbb{T}_{\pm}$  est définie comme le nombre tropical signé de module  $|x| + |y|$  et de signe  $\text{sgn}(x)\text{sgn}(y)$ . Cependant, l'addition tropicale sur  $\mathbb{T}_{\pm}$  ne peut pas être définie de façon pertinente, en particulier pour deux nombres tropicaux signés de même module et de signes opposés :  $x \oplus (\ominus x)$  n'est pas défini. Cette limitation nous amène à construire l'ensemble tropical symétrisé en ajoutant une troisième copie de  $\mathbb{T}$ .

**Ensemble tropical symétrisé** On ajoute à  $\mathbb{T}_{\pm}$  une troisième copie de  $\mathbb{T}$ , notée  $\mathbb{T}_{\bullet}$ , dont les éléments, appelés nombres tropicaux *équilibrés*, sont notés  $x^{\bullet}$ ,  $x \in \mathbb{T}$ . On a encore  $0^{\bullet} = 0 = \ominus 0$ , et on pose  $\text{sgn}(x^{\bullet}) = 0$  et  $|x^{\bullet}| = x$ . On forme ainsi l'ensemble  $\mathbb{S}$  des nombres tropicaux symétrisés. Si nécessaire, on précise le groupe abélien totalement ordonné  $(G, +, \geq)$  de départ en notant  $\mathbb{S}(G)$ .

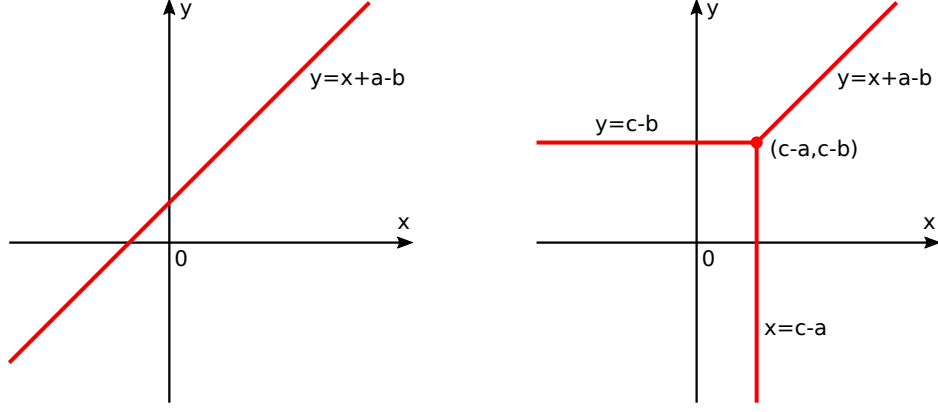


FIGURE 1 – Hyperplans tropicaux dans  $\mathbb{R}_{\max}^2$ . À gauche, droite tropicale linéaire : points où  $\max\{a + x, b + y\}$  est atteint deux fois. À droite, droite tropicale affine : points où  $\max\{a + x, b + y, c\}$  est atteint deux fois.

On définit comme suit les opérations sur  $\mathbb{S}$  : pour tous  $x, y \in \mathbb{S}$

$$x \oplus y = \begin{cases} \max\{|x|, |y|\} & \text{si le maximum est atteint uniquement par des éléments positifs} \\ \ominus \max\{|x|, |y|\} & \text{si le maximum est atteint uniquement par des éléments négatifs} \\ \max\{|x|, |y|\}^\bullet & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x \odot y = \begin{cases} (|x| + |y|) & \text{si } \text{sgn}(x)\text{sgn}(y) > 0 \\ \ominus(|x| + |y|) & \text{si } \text{sgn}(x)\text{sgn}(y) < 0 \\ (|x| + |y|)^\bullet & \text{si } \text{sgn}(x)\text{sgn}(y) = 0 \end{cases}$$

Par exemple pour l'addition on a  $(\ominus 3) \oplus 2 = \ominus 3$  et  $(\ominus 1) \oplus 1 = 1^\bullet$ . Pour la multiplication, on a  $1 \odot 2 = (\ominus 1) \odot (\ominus 2) = 3$ , et  $2^\bullet \odot 3 = 2^\bullet \odot (\ominus 3) = 5^\bullet$ .

Muni de ces opérations,  $\mathbb{S}$  forme également un semi-anneau.

## 1.2 Géométrie tropicale

On s'intéresse à ce que deviennent les objets usuels d'algèbre linéaire dans les structures tropicales que sont les semi-modules  $\mathbb{T}^n$ .

**Convexité tropicale** La convexité tropicale se définit par analogie avec la convexité usuelle : un ensemble  $S \subset \mathbb{T}^n$  est dit *tropicalement convexe* lorsque pour tous  $x, y \in S$ , et pour tous scalaires  $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$  tels que  $\lambda \oplus \mu = \mathbb{1}$  c'est-à-dire  $\max\{\lambda, \mu\} = 0$ , on a  $\lambda \odot x \oplus \mu \odot y = \max\{\lambda + x, \mu + y\} \in S$ .

**Hyperplans** On note  $[n] = \{1, \dots, n\}$ . L'*hyperplan tropical* déterminé par un vecteur  $u \in \mathbb{T}^n \setminus \{0\}$  est défini comme l'ensemble des  $x \in \mathbb{T}^n$  tels que le maximum

$$\max_{i \in [n]} (u_i + x_i)$$

est atteint au moins deux fois. Un hyperplan tropical est tropicalement convexe, et stable par multiplication scalaire tropicale. On peut également définir un *hyperplan tropical affine* comme l'ensemble des  $x \in \mathbb{T}^n$  tels que le maximum

$$\max(\{u_i + x_i, i \in [n]\} \cup \{c\})$$

est atteint deux fois. Des hyperplans tropicaux en dimension 2 dans  $\mathbb{R}_{\max}^2$  sont illustrés en Figure 1.

**Position générale** Comme en algèbre linéaire classique, on définit le *permanent* d'une matrice carrée  $M \in \mathbb{T}_\pm^{n \times n}$  par

$$\begin{aligned} \text{tper}(M) &= \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \bigodot_{i=1}^n |M_{i\sigma(i)}| \\ &= \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{i=1}^n |M_{i\sigma(i)}| \end{aligned}$$

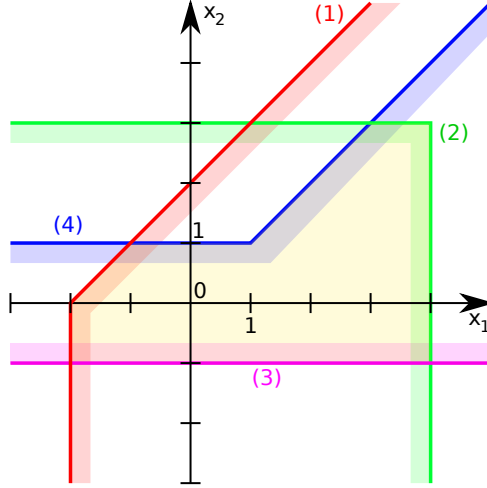


FIGURE 2 – Polyèdre tropical en dimension 2.

On dit qu'une matrice carrée  $M \in \mathbb{T}_{\pm}^{n \times n}$  est *tropicalement singulière* lorsque  $\text{tper}(M) = 0$  ou lorsque le maximum dans la définition du permanent est atteint au moins deux fois.

Une matrice rectangulaire  $M \in \mathbb{T}_{\pm}^{m \times n}$  est *tropicalement générique* lorsque pour toute sous-matrice carrée  $W$  de  $M$ ,  $\text{tper}(W) = 0$  ou  $W$  est tropicalement non-singulière.

On dit alors qu'une famille de  $m$  hyperplans tropicaux  $(H^1, \dots, H^m)$  dirigés par des vecteurs  $(u^1, \dots, u^m) \in (\mathbb{T}^n)^m$  est en position générale lorsque la matrice de ces vecteurs dans  $\mathbb{T}^{m \times n}$  est tropicalement générique.

**Cônes tropicaux polyédriques** Soient deux matrices  $A, B \in \mathbb{T}^{m \times n}$ . On considère le *cône tropical polyédrique* des vecteurs  $x \in \mathbb{T}^n$  vérifiant pour tout  $i \in [m]$  :

$$\max_{j \in [n]} A_{ij} + x_j \leq \max_{j \in [n]} B_{ij} + x_j$$

c'est-à-dire en notation matricielle tropicale :  $A \odot x \leq B \odot x$ , ou même  $Ax \leq Bx$ . On parle de cône tropical dans la mesure où ils sont stables par multiplication scalaire tropicale  $x \mapsto \lambda \odot x = \lambda + x$ . Le système 1 est un exemple de cône tropical polyédrique dans  $\mathbb{R}_{\max}^2$ .

On peut voir une matrice  $A$  de  $\mathbb{T}^{m \times n}$  comme un opérateur

$$A : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^m$$

$$x \mapsto Ax \text{ où } (Ax)_i = \max_{j \in [n]} A_{ij} + x_j$$

auquel on peut associer l'opérateur

$$A^{\#} : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$$

$$x \mapsto A^{\#}y \text{ où } (A^{\#}y)_j = \min_{i \in [m]} -A_{ij} + x_i$$

de telle sorte qu'on ait l'équivalence

$$Ax \leq y \iff x \leq A^{\#}y.$$

Ainsi l'inégalité du cône tropical polyédrique se réécrit  $x \leq T(x)$  où  $T(x) = A^{\#}Bx$  est une fonction dite *min-max* de  $\mathbb{T}^n$  dans  $\mathbb{T}^n$ . Ces fonctions min-max de la forme  $x \mapsto A^{\#}Bx$  dispose d'un certain nombre de propriétés : préservation de l'ordre, additivité, continuité pour la topologie usuelle.

**Polyèdres tropicaux** Soient  $A \in \mathbb{T}_{\pm}^{m \times n}$  et  $b \in \mathbb{T}_{\pm}^m$ . On peut définir de façon plus générale qu'au paragraphe précédent le *polyèdre tropical* par :

$$\mathcal{P}(A, b) = \{x \in \mathbb{T}^n \mid A^+ \odot x \oplus b^+ \geq A^- \odot x \oplus b^-\}.$$

Par exemple, dans  $\mathbb{R}_{\max}^2$ , les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \ominus 0 \\ \ominus 1 & \ominus 0 \\ -\infty & 0 \\ 2 & \ominus 0 \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ \ominus 1 \\ \ominus 0 \end{bmatrix}$$

donnent le polyèdre tropical caractérisé par les inégalités ci-dessous et représenté en Figure 2 :

$$\begin{cases} x_1 \oplus 1 \geq x_2 & (1) \\ 3 \geq (x_1 - 1) \oplus x_2 & (2) \\ x_2 \geq -1 & (3) \\ (x_1 + 2) \geq x_2 \oplus 0 & (4) \end{cases}$$

### 1.3 Séries de Hahn et de Puiseux

On introduit ici des corps de séries formelles et on évoque leurs liens avec des semi-anneaux tropicaux.

**Séries de Hahn** Soit  $(G, +, \leq)$  un groupe abélien totalement ordonné et  $\mathbb{K}$  un corps. On définit le corps des *séries de Hahn* à exposants dans  $G$  et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , et on note  $\mathbb{K}[[t^G]]$ , l'ensemble des séries formelles de la forme suivante, muni de l'addition et de la multiplication des séries formelles :

$$\mathbf{x} = \sum_{\alpha \in \Lambda} \mathbf{x}_\alpha t^\alpha$$

où l'opposé du support  $\Lambda \subset G$  est bien ordonné (c'est-à-dire que tout sous-ensemble non vide du support admet un plus grand élément pour  $\leq$ ) et où les coefficients  $\mathbf{x}_\alpha \in \mathbb{K}$  sont non nuls.

**Séries de Puiseux** On définit également le corps des séries de Puiseux généralisées à coefficients réels, noté  $\mathbb{R}\{\{s\}\}$ , comme l'ensemble des séries formelles de la forme suivante, muni de l'addition et de la multiplication des séries formelles :

$$\mathbf{x} = \sum_{\alpha \in \Lambda} \mathbf{x}_\alpha s^\alpha$$

où le support  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  est soit fini, soit est l'image d'une suite tendant vers  $-\infty$ . On peut également se restreindre à des exposants rationnels, et on note dans ce cas  $\mathbb{R}\{\{s^{\mathbb{Q}}\}\}$ .

**Valuation** Toute série  $\mathbf{x}$  non nulle, de Hahn ou de Puiseux, admet un plus grand exposant (dans  $(G, \leq)$  ou  $(\mathbb{R}, \leq)$  respectivement), que l'on appelle *valuation* de  $\mathbf{x}$  et que l'on note  $\text{val}(\mathbf{x})$ . Le *coefficient dominant* de  $\mathbf{x}$ , noté  $\text{lc}(\mathbf{x})$ , est le coefficient  $\mathbf{x}_{\text{val}(\mathbf{x})}$  associé à cet exposant. Par convention, on pose également  $\text{val}(0) = 0$ .

On dit que  $\mathbf{x}$  est *positive*, et on note simplement  $\mathbf{x} \geq 0$ , lorsque  $\text{lc}(\mathbf{x}) \geq 0$ . On peut alors ordonner totalement les corps  $\mathbb{K}[[t^G]]$  et  $\mathbb{R}\{\{s\}\}$  par la relation d'ordre :  $\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} \geq 0$ . On notera d'ailleurs  $(\mathbb{K}[[t^G]])_{\geq 0}$  pour désigner les séries positives en ce sens.

La valuation  $\text{val}$  est alors une application de  $\mathbb{K}[[t^G]]$  dans  $\mathbb{T}(G)$  pour les séries de Hahn, ou de façon analogue de  $\mathbb{R}\{\{s\}\}$  dans  $\mathbb{R}_{\max}$  pour les séries de Puiseux. Elle vérifie :

$$\begin{aligned} \text{val}(\mathbf{xy}) &= \text{val}(\mathbf{x}) \odot \text{val}(\mathbf{y}) \\ \text{val}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &\leq \text{val}(\mathbf{x}) \oplus \text{val}(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

la seconde ligne devenant une égalité dès que les coefficients dominants de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ne s'annulent pas, ce qui arrive automatiquement par exemple si elles n'ont pas la même valuation, ou encore si elles sont de même signe.

On peut également définir la *valuation signée*, notée  $\text{sval}$ , de  $\mathbb{K}[[t^G]]$  dans  $\mathbb{S}(G)$  pour les séries de Hahn ou de  $\mathbb{R}\{\{s\}\}$  dans  $\mathbb{S}(\mathbb{R})$  pour les séries de Puiseux, définie par :

$$\text{sval}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \text{val}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \geq 0 \\ \ominus \text{val}(\mathbf{x}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout élément tropical signé  $x \in \mathbb{T}_\pm$ , on note  $\text{sval}^{-1}(x) = \{\mathbf{x} \mid \text{sval}(\mathbf{x}) = x\}$  l'ensemble des séries dont la valuation signée est  $x$ , que l'on appelle *lifts* de  $x$ .

L'intérêt de ces objets sera justifié par les sections suivantes 2 et 3. En section 3.3, on approfondira les liens entre ces corps de séries et semi-anneaux tropicaux en travaillant sur l'idée de double déquantisation.

## 2 Jeux à paiement moyen et de parité

Dans cette section, on s'intéresse à une classe de jeux à deux joueurs introduits dans [GKK88] : les jeux à paiement moyen et les jeux de parité. On donne quelques propriétés et on évoque la complexité algorithmique de leur résolution. On donne également une réduction des seconds aux premiers.

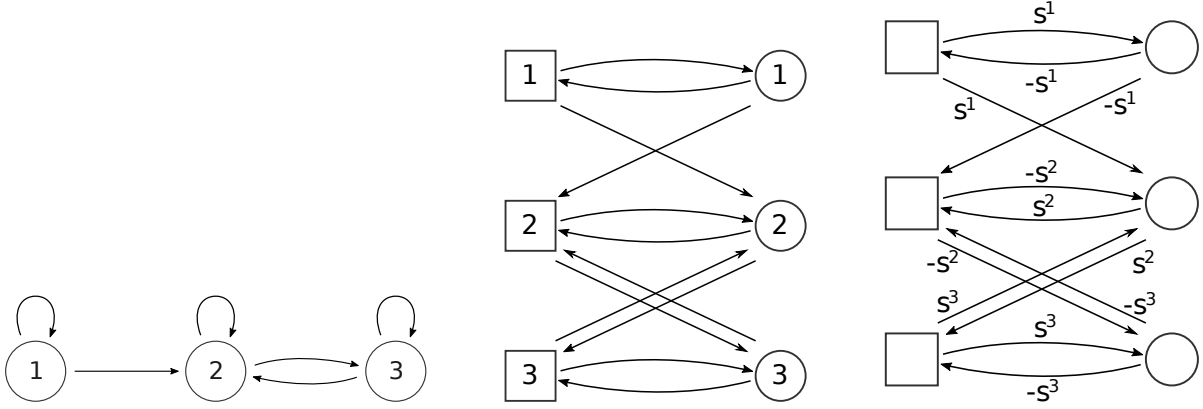


FIGURE 3 – À gauche, jeu de parité défini sur un graphe orienté. Au milieu, jeu de parité équivalent défini sur un graphe biparti. Les parités sont indiquées à l’intérieur des sommets. À droite, jeu à paiement moyen issu de ce jeu de parité par la réduction de la section 2.2.

## 2.1 Définitions

Les jeux à paiement moyen (MPG pour *Mean Payoff Game*) et les jeux de parité (PG pour *Parity Game*) sont des jeux à deux joueurs se jouant sur un graphe orienté  $\mathcal{G} = (V, E)$ . Dans le cadre de ce travail, on se restreint aux jeux sur des graphes bipartis :  $V = V_0 \sqcup V_1$ . Chaque sous-ensemble  $V_0, V_1$  correspond aux états d’un joueur. À chaque coup, le joueur  $i \in \{0, 1\}$ , présent dans l’état  $u \in V_i$  peut jouer dans l’état  $v \in V_{1-i}$  si  $(u, v) \in E$ , et c’est alors à l’autre joueur  $1-i$  de jouer. Afin de ne pas bloquer le jeu, on fait l’hypothèse que tous les noeuds du graphe sont d’arité sortante strictement positive. Une partie de ce jeu est alors un chemin infini  $\langle v_0, v_1, \dots \rangle \in V^{\mathbb{N}}$  dans le graphe  $\mathcal{G}$ .

Afin d’achever la définition d’un jeu, il reste à donner la condition de victoire, qui constitue la différence entre jeu de parité et jeu à paiement moyen.

### 2.1.1 Jeux de parité

On introduit une fonction de priorité sur les sommets  $p : V \rightarrow \mathbb{N}$ , et on dit qu’une partie  $\langle v_0, v_1, \dots \rangle$  est gagnante pour le joueur 0 si la plus grande priorité apparaissant une infinité de fois dans ce chemin est paire, c’est-à-dire si  $\max(\text{Inf}(p(v_0), p(v_1), \dots))$  est paire où  $\text{Inf}(u)$  est l’ensemble des éléments apparaissant une infinité de fois dans la suite  $u \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ .

**Remarque** En général, les jeux de parité ne sont pas forcément définis de la sorte, sur un graphe biparti. Par exemple, dans [CJK<sup>+</sup>17], un jeu de parité est défini comme un graphe orienté  $\mathcal{G} = (V, E)$  muni d’une fonction de priorité  $p : V \rightarrow [m]$ . Les deux joueurs déplacent alternativement un jeton dans le graphe selon des mouvements valides, c’est-à-dire en suivant une arête du graphe. Le vainqueur est alors le joueur associé à la parité de la plus grande priorité apparaissant infiniment souvent lors de la partie. Pour cette définition, on peut néanmoins facilement se ramener à un jeu de parité sur un graphe biparti équivalent, en dédoublant les sommets (une copie par joueur), comme illustré en Figure 3.

**Remarque** Les jeux de parité apparaissent notamment dans un tout autre domaine, la logique modale. En particulier, le *model checking* du  $\mu$ -calcul est équivalent à la résolution des jeux de parité.

**Exemple** Dans le jeu de parité de la Figure 3, le joueur 1 est toujours vainqueur, puisqu’il peut faire en sorte que la plus grande priorité apparaissant une infinité de fois soit 3, donc impaire.

### 2.1.2 Jeux à paiement moyen

On introduit une fonction de coût sur les arêtes  $w : E \rightarrow \mathbb{Z}$ , représentant ce que chaque joueur gagne ou perd à chaque coup joué en empruntant une arête. On définit le paiement moyen d’une partie  $\langle v_0, v_1, \dots \rangle$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i w(v_i, v_{i+1})$$



et on dit que la partie est gagnante pour le joueur 0 si le paiement moyen est positif.

### 2.1.3 Stratégies

Une *stratégie* pour le joueur 0 est une fonction

$$\begin{aligned} \sigma : \text{Pos}(V) &\rightarrow V_1 \\ \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle &\mapsto v_n \end{aligned}$$

indiquant vers quel état doit jouer 0 étant donné le déroulement jusque-là de la partie. Une stratégie *sans-mémoire* pour le joueur 0 ne dépend que de l'état actuel dans  $V_0$ , c'est-à-dire qu'on se ramène à une fonction  $\sigma : V_0 \rightarrow V_1$ . Une stratégie pour le joueur 0 est *gagnante* depuis l'état  $v_0 \in V_0$  est telle que toute partie partant de  $v_0$  où le joueur 0 suit cette stratégie est gagnante pour le joueur 0.

Se pose alors le problème de décision suivant : étant donné un état  $v_0 \in V_0$ , existe-t-il une stratégie gagnante pour le joueur 0 à partir de  $v_0$  ?

## 2.2 Réduction des jeux de parité aux jeux à paiement moyen

Dans [Jur98], Marcin Jurdziński propose une réduction des jeux de parité aux jeux à paiement moyen, que l'on présente ci-dessous.

Soit un jeu de parité  $\mathcal{J}$  sur le graphe  $\mathcal{G} = (V_0 \sqcup V_1, E)$  muni d'une fonction de priorité  $p$ . Soit  $m = |V|$  le nombre d'états. On construit un jeu à paiement moyen  $\mathcal{K}$  sur le même graphe  $\mathcal{G}$  et la fonction de coût  $w$  est donnée par, pour tout  $(u, v) \in E$  :

$$w((u, v)) = \begin{cases} (-m)^{p(u)} & \text{si } u \in V_0 \\ -(-m)^{p(u)} & \text{si } u \in V_1 \end{cases} .$$

Le théorème suivant montre que les jeux de parité se réduisent bien aux jeux à paiement moyen.

**Théorème 1.** *Pour tout état initial  $v_0 \in V_0$ , le joueur 0 dispose d'une stratégie gagnante dans  $\mathcal{J}$  à partir de  $v_0$  si et seulement s'il dispose d'une stratégie gagnante dans  $\mathcal{K}$  à partir de  $v_0$ .*

De façon analogue, on peut considérer une réduction des jeux de parité vers les jeux à paiement moyen dont les paiements sont dans  $\mathbb{R} \{\{s\}\}$  où même dans  $\mathbb{R} \{\{s^{\mathbb{Q}}\}\}$ . La fonction de coût est alors simplement donnée par

$$w((u, v)) = \begin{cases} (-s)^{p(u)} & \text{si } u \in V_0 \\ -(-s)^{p(u)} & \text{si } u \in V_1 \end{cases} \in \mathbb{R} \{\{s^{\mathbb{Q}}\}\} .$$

Un exemple de réduction est donné en Figure 3.

## 2.3 Résultats et complexité algorithmique concernant ces jeux

### 2.3.1 Un résultat sur les jeux de parité

Le théorème suivant illustre l'importance des stratégies sans-mémoire dans le cadre des jeux de parité.

**Théorème 2.** *Soit un jeu de parité sur  $(V, E)$  et un sommet  $u \in V$ . Alors l'un des deux joueurs dispose d'une stratégie sans-mémoire gagnante à partir de  $u$  ([BS12]).*

### 2.3.2 Complexité de résolution des jeux

Le problème de décision consistant à déterminer le gagnant d'un jeu à paiement moyen appartient à la classe  $\mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$ . Un algorithme pseudo-polynomial en temps pour la résolution des jeux à paiement moyen est décrit dans [ZP96].

Récemment a été montré dans [CJK<sup>+</sup>17] que les jeux de parité peuvent être résolus en temps quasi-polynomial, c'est-à-dire en  $\mathcal{O}\left(2^{(\log n)^k}\right)$ . L'article fait en particulier passer la borne de  $n^{\mathcal{O}(\sqrt{n})}$  à  $\mathcal{O}(n^{\log(m)+6})$ , où  $m$  est le nombre de priorités distinctes dans le jeu de parité;  $m$  peut toujours être choisi inférieur à  $n$ , et dans les applications pratiques, il est beaucoup plus petit. L'article décrit pour cela un algorithme de résolution fondé sur la mémorisation d'une *statistique de jeu* d'espace logarithmique.

### 3 Des jeux de parité aux programmes linéaires

Dans cette section, on fait le lien entre les différents domaines évoqués dans les sections précédentes. On s'intéresse dans un premier temps à l'équivalence entre les jeux à paiement moyen et les programmes linéaires tropicaux (TLP pour *Tropical Linear Program*), en s'appuyant sur l'article [AGG12]. On parle ensuite de la façon dont les programmes linéaires tropicaux se réduisent à des programmes linéaires (LP pour *Linear Program*) "usuels" sur un corps de séries formelles, on s'appuyant sur l'article [ABGJ15]. Enfin, on travaille sur l'idée de *double déquantisation* qui donne une vision algébrique des deux réductions successives que constituent celle des jeux de parité aux jeux à paiement moyen, et celle des jeux à paiement moyen/programmes linéaires tropicaux aux programmes linéaires usuels.

#### 3.1 Jeux à paiement moyen et programmes linéaires tropicaux

Soit un cône tropical polyédrique donné par l'inégalité  $Ax \leq Bx$  avec  $A, B \in \mathbb{T}^{m \times n}$ . On y associe un jeu à paiement moyen dont les joueurs 0 et 1 sont plutôt appelé Max et Min respectivement. Le joueur Max possède un ensemble  $I$  de  $m$  états (dans les représentations, on les dessinera à gauche par des carrés), le joueur Min possède un ensemble  $J$  de  $n$  états (dans les représentations, on les dessinera à droite par des cercles). Lorsque l'état actuel est  $i \in I$  c'est à Max de jouer : il choisit un état  $j \in J$  tel que  $B_{ij}$  est fini et reçoit en paiement  $B_{ij}$ . À l'inverse quand l'état actuel est  $j \in J$  c'est à Min de jouer : il choisit un état  $i \in I$  tel que  $A_{ij}$  est fini et reçoit en paiement  $A_{ij}$ .

Un résultat important de [AGG12], montrant l'équivalence entre les polyèdres tropicaux et les jeux à paiement moyen est le suivant :

**Théorème 3.** *Dans un jeu à paiement moyen donné par deux matrices tropicales  $A$  et  $B$ , un état  $j \in [n]$  est gagnant pour le joueur Max si et seulement s'il existe une solution  $x \in \mathbb{T}^n$  du système d'inégalités  $Ax \leq Bx$  telle que  $x_j \geq 0$ .*

**Un exemple** Prenons pour exemple les matrices dans  $\mathbb{R}_{\max}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -\infty \\ 8 & -\infty \\ -\infty & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -\infty \\ 5 & -1 \\ -\infty & 4 \end{bmatrix}$$

donnant le système linéaire tropical suivant :

$$\begin{cases} 3 + x_1 \leq 1 + x_1 \\ 8 + x_1 \leq \max\{5 + x_1, -1 + x_2\} \\ 2 + x_2 \leq 4 + x_2 \end{cases} \quad (1)$$

On représente en Figure 4 le jeu à paiement moyen issu de ce système. On remarque que depuis l'état  $\textcircled{1}$ , une stratégie sans-mémoire gagnante pour Min consiste à jouer en permanence dans l'état  $\boxed{1}$ ; le paiement moyen pour Max est alors  $\frac{1-3}{2} = -1 < 0$ , il est donc perdant. À l'inverse, les états  $\boxed{2}$  et  $\boxed{3}$  sont gagnants pour Max. En effet, il lui suffit de jouer en permanence dans  $\textcircled{2}$ , de telle sorte que le paiement moyen soit  $\frac{4-2}{2} = 1 > 0$ . Le seul état initial gagnant pour Max est ainsi  $\textcircled{2}$ . Une illustration du théorème 3 est alors l'observation du fait que :

- $3 + x_1 \leq 1 + x_1$  impose  $x_1 = -\infty$  donc  $\textcircled{1}$  n'est pas gagnant pour Max ;
- le vecteur  $x = (-\infty, 0) \in \mathbb{R}_{\max}^2$  vérifie par exemple le système 1 et  $x_2 \geq 0$  donc  $\textcircled{2}$  est effectivement gagnant pour Max.

#### 3.2 Programmation linéaire tropicale et programmation linéaire

Soit  $\mathbb{T} = \mathbb{T}(G)$ . On considère un programme linéaire tropical LP( $A, b, c$ ) sur  $\mathbb{T}_{\pm}^n$  donné par des matrices  $A \in \mathbb{T}_{\pm}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{T}_{\pm}^m$  et  $c \in \mathbb{T}^n$  :

$$\begin{aligned} \min \quad & c \odot x \\ \text{s.t.} \quad & x \in \mathcal{P}(A, b) \end{aligned} \quad (\text{LP}(A, b, c))$$

Il consiste à minimiser la quantité  $c \odot x$  dans le polyèdre tropical comme défini en Section 1.2. On s'intéresse ici surtout à la question de la faisabilité, c'est-à-dire de savoir si ce polyèdre est vide ou non.

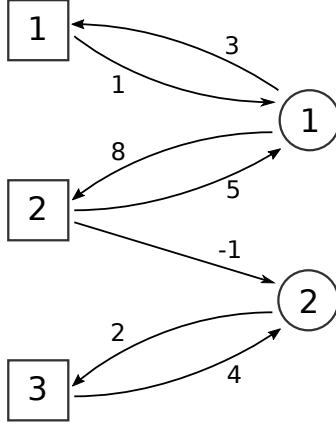


FIGURE 4 – Jeu à paiement moyen issu du système linéaire tropical.

**Théorème 4.** *On peut trouver  $\mathbf{A} \in \text{sval}^{-1}(A)$ ,  $\mathbf{b} \in \text{sval}^{-1}(b)$ ,  $\mathbf{c} \in \text{sval}^{-1}(c)$  et former un programme linéaire "usuel"  $\mathbf{LP}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  sur  $\mathbb{R}[[t^G]]$  :*

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (\mathbf{LP}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}))$$

où  $\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}[[t^G]]^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \geq 0\}$ , tel que :

- $\text{sval}(\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b})) = \mathcal{P}(A, b)$ . En particulier,  $\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$  si et seulement si  $\mathcal{P}(A, b) \neq \emptyset$  ;
- la valuation d'une solution optimale du programme linéaire  $\mathbf{LP}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  dans les séries de Hahn est solution optimale du programme linéaire tropical  $LP(A, b, c)$ .

Cela signifie qu'on peut résoudre un programme linéaire tropical, et donc un jeu à paiement moyen d'après la section 3.1, en se ramenant à la résolution d'un programme linéaire dans le corps des séries de Hahn, qui peut par exemple se faire avec l'algorithme du simplexe.

### 3.3 Double déquantisation

Lorsqu'on réduit un jeu de parité (à priorités entières, ou au moins rationnelles) à un jeu à paiement moyen (voir Section 2.2), on obtient des paiements dans  $\mathbb{R} \{\{s^Q\}\}$ , que l'on peut voir comme un groupe abélien  $(G, +)$  muni de l'ordre total  $\leq$  donné par

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x}(s) \leq \mathbf{y}(s) \text{ quand } s \rightarrow +\infty.$$

La résolution de ce jeu à paiement moyen comme évoqué en Section 3.2 demande la résolution d'un programme linéaire dans le corps des séries de Hahn à exposants dans  $(G, +, \leq)$ . On peut imposer que les séries de Hahn choisies (en tant que *lifts* dans les  $\text{val}^{-1}(\mathbf{x})$ ) soient positives. Cette résolution se fait donc dans le semi-anneau

$$\mathbb{L} = (\mathbb{R}[[t^G]])_{\geq 0} = \left( \mathbb{R} \left[ \left[ t^{\mathbb{R}\{\{s^Q\}\}} \right] \right] \right)_{\geq 0}.$$

Des exemples d'éléments de  $\mathbb{L}$  sont  $t^{s^2}$  ou  $t^{-s^3}$ .

**Valuations comme morphismes** On peut voir la valuation

$$\text{val}_1 : (\mathbb{R}[[t^G]])_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{T}(G)$$

des séries de Hahn à coefficients réels et à exposants dans  $G$ , et positives, comme un morphisme de semi-anneaux de  $\left( (\mathbb{R}[[t^G]])_{\geq 0}, +, \cdot \right)$  dans  $(\mathbb{T}(G), \oplus, \odot)$ , puisque pour toutes séries positives  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{R}[[t^G]])_{\geq 0}$ , on a grâce à l'hypothèse de positivité (et donc la non-annulation des coefficients dominants) :

- $\text{val}_1(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \text{val}_1(\mathbf{x}) \oplus \text{val}_1(\mathbf{y})$  ;
- $\text{val}_1(\mathbf{x}\mathbf{y}) = \text{val}_1(\mathbf{x}) \odot \text{val}_1(\mathbf{y})$ .

En revanche, la valuation signée

$$\text{sval}_2 : \mathbb{R} \{\{s^{\mathbb{Q}}\}\} \rightarrow \mathbb{S}(\mathbb{Q})$$

des séries de Puiseux généralisées à coefficients réels ne forme qu'un "quasi-morphisme" de  $(\mathbb{R} \{\{s^{\mathbb{Q}}\}\}, +, \cdot)$  dans  $(\mathbb{S}(\mathbb{Q}), \oplus, \odot)$ , car les cas du type  $s^\alpha - s^\alpha$  posent problème :

$$\text{sval}_2(s^\alpha - s^\alpha) = \text{sval}_2(0) = 0$$

mais

$$\text{sval}_2(s^\alpha) \oplus \text{sval}_2(-s^\alpha) = \alpha \oplus (\ominus \alpha) = \alpha^\bullet \neq 0.$$

En revanche pour toutes séries  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R} \{\{s^{\mathbb{Q}}\}\}$  on a :

- $\text{sval}_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \text{sval}_2(\mathbf{x}) \oplus \text{sval}_2(\mathbf{y})$  si les coefficients dominants ne s'annulent pas (c'est-à-dire si  $\text{val}(\mathbf{x}) \neq \text{val}(\mathbf{y})$  ou  $\text{lc}(\mathbf{x}) + \text{lc}(\mathbf{y}) \neq 0$ );
- $\text{sval}_2(\mathbf{x}\mathbf{y}) = \text{sval}_2(\mathbf{x}) \odot \text{sval}_2(\mathbf{y})$ .

**Double valuation** Posons la *double valuation*

$$\text{dval} = \text{sval}_2 \circ \text{val}_1 : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{S}(\mathbb{Q}).$$

On s'intéresse aux lois  $(\oplus_2, \odot_2)$  transportées de  $(\mathbb{L}, +, \cdot)$  par le (quasi-)morphisme  $\text{dval}$  sur  $\mathbb{S}(\mathbb{Q})$  dans le cas général :

- $\text{dval}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \text{dval}(\mathbf{x}) \oplus_2 \text{dval}(\mathbf{y})$ ;
- $\text{dval}(\mathbf{x}\mathbf{y}) = \text{dval}(\mathbf{x}) \odot_2 \text{dval}(\mathbf{y})$ .

Le cas de la seconde loi est simple puisque lorsqu'il n'y a pas d'annulation des coefficients dominants :

$$\begin{aligned} \text{dval}(\mathbf{x}\mathbf{y}) &= \text{sval}_2(\text{val}_1(\mathbf{x}\mathbf{y})) \\ &= \text{sval}_2(\text{val}_1(\mathbf{x}) \odot \text{val}_1(\mathbf{y})) = \text{sval}_2(\text{val}_1(\mathbf{x}) + \text{val}_1(\mathbf{y})) \\ &= \text{sval}_2(\text{val}_1(\mathbf{x})) \oplus_{\mathbb{Q}} \text{sval}_2(\text{val}_1(\mathbf{y})) \text{ (lorsqu'il n'y a pas d'annulation)} \\ &= \text{dval}(\mathbf{x}) \oplus_{\mathbb{Q}} \text{dval}(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

La loi  $\odot_2$  n'est donc autre que la loi  $\oplus_{\mathbb{Q}}$  de  $\mathbb{S}(\mathbb{Q})$ .

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \text{dval}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \text{sval}_2(\text{val}_1(\mathbf{x} + \mathbf{y})) \\ &= \text{sval}_2(\text{val}_1(\mathbf{x}) \oplus \text{val}_1(\mathbf{y})) \\ &= \text{sval}_2\left(\max_{s \rightarrow +\infty} \{\text{val}_1(\mathbf{x}), \text{val}_1(\mathbf{y})\}\right) \end{aligned}$$

Il faut alors une distinction de cas sur la positivité de  $\text{val}_1(\mathbf{x})$  et  $\text{val}_1(\mathbf{y})$  :

- si  $\text{val}_1(\mathbf{x})$  et  $\text{val}_1(\mathbf{y})$  sont des séries positives, c'est-à-dire si  $\text{dval}(\mathbf{x})$  et  $\text{dval}(\mathbf{y})$  sont de signe tropical positif, alors  $\max_{s \rightarrow +\infty} \{\text{val}_1(\mathbf{x}), \text{val}_1(\mathbf{y})\}$  est atteint pour la série dont la valuation signée est de plus grand module, si bien que  $\text{dval}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \text{sval}_2(\text{val}_1(\mathbf{x})) \oplus \text{sval}_2(\text{val}_1(\mathbf{y})) = \text{dval}(\mathbf{x}) \oplus \text{dval}(\mathbf{y})$ ;
- si  $\text{val}_1(\mathbf{x})$  et  $\text{val}_1(\mathbf{y})$  sont des séries négatives, alors à l'inverse  $\max_{s \rightarrow +\infty} \{\text{val}_1(\mathbf{x}), \text{val}_1(\mathbf{y})\}$  est atteint pour la série dont la valuation signée est de plus petit module, si bien que  $\text{dval}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \ominus \min\{|\text{dval}(\mathbf{x})|, |\text{dval}(\mathbf{y})|\}$ ;
- si  $\text{val}_1(\mathbf{x})$  est positive et  $\text{val}_1(\mathbf{y})$  négative, il est immédiat que  $\max_{s \rightarrow +\infty} \{\text{val}_1(\mathbf{x}), \text{val}_1(\mathbf{y})\} = \text{val}_1(\mathbf{x})$ , et donc que  $\text{dval}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \text{dval}(\mathbf{x})$ ; le dernier cas se traite symétriquement.

On trouve ainsi que  $\oplus_2$  est donnée par

$$x \oplus_2 y = \begin{cases} x \oplus y & \text{si } \text{sgn}(x) \geq 0 \text{ et } \text{sgn}(y) \geq 0 \\ x & \text{si } \text{sgn}(x) \geq 0 \text{ et } \text{sgn}(y) < 0 \\ y & \text{si } \text{sgn}(x) < 0 \text{ et } \text{sgn}(y) \geq 0 \\ \ominus \min\{|x|, |y|\} & \text{sinon} \end{cases}$$

et on a alors  $\text{dval}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \text{dval}(\mathbf{x}) \oplus_2 \text{dval}(\mathbf{y})$ .

**Exemples de calculs** On a par exemple  $\text{dval}(t^{s^2} + t^{-s^3}) = \text{dval}(t^{s^2}) = 2$  en parallèle de  $\text{dval}(t^{s^2}) \oplus_2 \text{dval}(t^{-s^3}) = 2 \oplus_2 (\ominus 3) = 2$ . De même  $\text{dval}(t^{-s^2} + t^{-s^3}) = \text{dval}(t^{-s^2}) = \ominus 2$  et  $\text{dval}(t^{-s^2}) \oplus_2 \text{dval}(t^{-s^3}) = (\ominus 2) \oplus_2 (\ominus 3) = \ominus 2$

Pour l'autre loi, on a par exemple  $\text{dval}(t^{s^2} t^{-s^3}) = \text{dval}(t^{s^2-s^3}) = \text{dval}(t^{-s^3}) = \ominus 3$  en parallèle de  $\text{dval}(t^{s^2}) \odot_2 \text{dval}(t^{-s^3}) = 2 \odot_2 (\ominus 3) = 2 \oplus (\ominus 3) = \ominus 3$ . On a également  $\text{dval}(t^{s^2} t^{s^3}) = \text{dval}(t^{s^2+s^3}) = \text{dval}(t^{s^3}) = 3$  en parallèle de  $\text{dval}(t^{s^2}) \odot_2 \text{dval}(t^{s^3}) = 2 \odot_2 3 = 2 \oplus 3 = 3$ .

**En résumé** Le tableau suivant résume la double déquantisation.

Ensemble	$(\mathbb{R} \left[ \left[ t^{\mathbb{R}\{\{s^Q\}\}} \right] \right]_{\geq 0})$	$\xrightarrow{\text{val}_1} \mathbb{T}(\mathbb{R}\{\{s^Q\}\})$	$\xrightarrow{\text{sval}_2} \mathbb{S}(\mathbb{Q})$
Lois	$(+, \cdot)$	$(\oplus, \odot)$ $= (\max, +)$	$(\oplus_2, \odot_2)$ $= (\oplus_2, \oplus_{\mathbb{Q}})$
Coefficients de	LP	MPG/TLP	PG

## 4 Approche géométrique des jeux de parité

Cette section consiste en une investigation sur les propriétés géométriques des programmes linéaires tropicaux engendrés par les jeux à paiement moyen issus de jeux de parité.

### 4.1 Un exemple

On reprend le jeu à paiement moyen issu du jeu de parité de la figure 3. Les matrices dans  $\mathbb{T}(\mathbb{R}\{\{s\}\})^{3 \times 3}$  associées sont :

$$A = \begin{bmatrix} -s & 0 & 0 \\ -s & s^2 & -s^3 \\ 0 & s^2 & -s^3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} s & s & 0 \\ 0 & -s^2 & -s^2 \\ 0 & s^3 & s^3 \end{bmatrix}$$

On remarque qu'avec cette réduction,  $A = -^t B$ . En écrivant  $Ax \leq Bx \iff x \leq A^\# Bx$ , on obtient les inégalités suivantes :

1.  $x_1 \leq \min\{-2s + \max\{x_1, x_2\}, -s + s^2 + \max\{x_2, x_3\}\}$  ce qui revient à  $\begin{cases} x_1 \leq -2s + \max\{x_1, x_2\} \\ x_1 \leq -s + s^2 + \max\{x_2, x_3\} \end{cases}$
2.  $x_2 \leq \min\{2s^2 + \max\{x_2, x_3\}, s^2 - s^3 + \max\{x_2, x_3\}\}$  ce qui revient à  $x_2 \leq s^2 - s^3 + \max\{x_2, x_3\}$
3.  $x_3 \leq \min\{-2s^3 + \max\{x_2, x_3\}, -s^2 - s^3 + \max\{x_2, x_3\}\}$  ce qui revient à  $x_3 \leq -2s^3 + \max\{x_2, x_3\}$

Après simplification, on obtient donc le système :

$$\begin{cases} x_1 \leq -2s + x_2 & \text{(#1)} \\ x_1 \leq s^2 + \max\{x_2, x_3\} & \text{(#2)} \\ x_2 \leq -s^3 + x_3 & \text{(#3)} \\ x_3 \leq -2s^3 + x_2 & \text{(#4)} \end{cases}$$

On représente dans la Figure 5 la position relative dans  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  des demi-espaces associés à chacune de ces inégalités. Cette représentation est pertinente dans la mesure où la propriété  $Ax \leq Bx$  est invariante par "multiplication" scalaire  $x \in \mathbb{K}^n \mapsto \lambda \odot x = \lambda + x$ . Le fait que l'intersection soit vide illustre le fait que le jeu n'est pas gagnant pour Max / joueur 0 / joueur pair, en vertu du Théorème 3. Ceci est cohérent avec l'existence de la stratégie gagnante pour Min / joueur 1 / joueur impair consistant à, s'il est en 1 jouer vers 2, et jouer vers 3 sinon, si bien que la plus grande priorité rencontrée infiniment souvent est 3, donc impaire, lui permettant de gagner.

### 4.2 Position générale de l'arrangement d'hyperplans

**Conjecture 1.** *Si un jeu à paiement moyen est issu d'un jeu de parité avec des paiements tous distincts, alors l'arrangement d'hyperplans tropicaux associé est en position générale.*

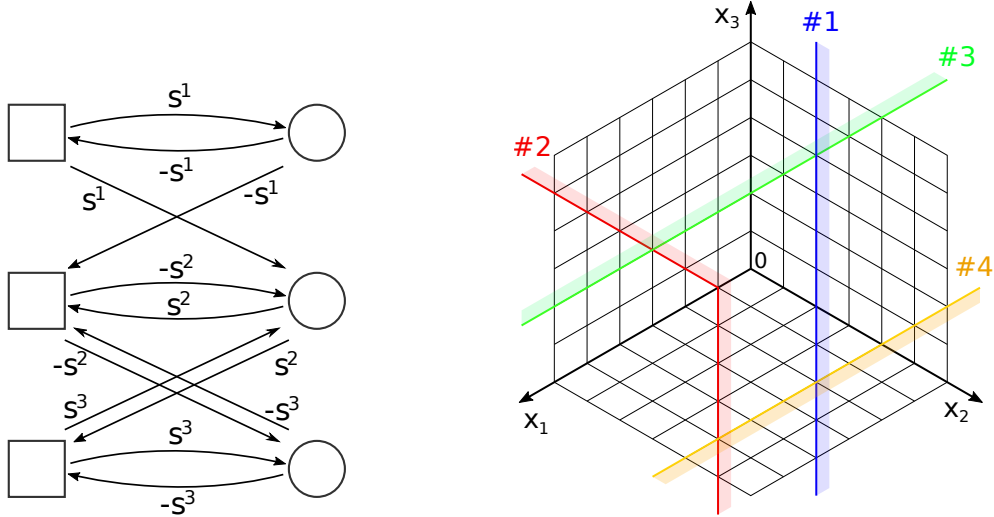


FIGURE 5 – À droite, position relative dans  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  des demi-espaces associé au jeu à paiement moyen de gauche issu du jeu de parité de la Figure 3.

On se donne un tel jeu à paiement moyen à paiements dans  $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathbb{R}\{\{s\}\})$ , c'est-à-dire deux matrices  $A, B \in \mathbb{T}^{m \times n}$  telles que pour tous  $i, k \in [m]$  et  $j, l \in [n]$  on a  $\text{sval}(a_{ij}) \neq \text{sval}(b_{kl})$ . Afin de résoudre ce jeu, en vertu du Théorème 3, la question est de savoir s'il existe  $x \in \mathbb{T}^n$  tel que  $Ax \leq Bx$  au sens tropical, c'est-à-dire si le cône tropical polyédrique

$$\left\{ x \in \mathbb{T}^n \mid \forall i \in [m], \max_{j \in [n]} a_{ij} + x_j \leq \max_{j \in [n]} b_{ij} + x_j \right\}$$

est vide ou non. Sa frontière peut se voir comme la réunion des ensembles

$$\mathcal{H}_i = \left\{ x \in \mathbb{T}^n, \max_{j \in [n]} a_{ij} + x_j = \max_{j \in [n]} b_{ij} + x_j \right\}.$$

Posons alors pour tous  $i \in [m]$  et  $j \in [n]$

$$c_j^i = \max\{a_{ij}, b_{ij}\}$$

qui vérifient pour tous  $i, k \in [m]$  et  $j, l \in [n]$ ,  $\text{sval}(c_j^i) \neq \text{sval}(c_l^k)$ . Définissons également les hyperplans tropicaux

$$H_i = \left\{ x \in \mathbb{T}^n, \max_{j \in [n]} x_j + c_j^i \text{ est atteint deux fois} \right\}.$$

**Proposition 1.** *Pour tout  $i \in [m]$ ,  $\mathcal{H}_i \subset H_i$ .*

*Démonstration.* On fixe ici un  $i \in [m]$  que l'on n'écrit plus par lisibilité. Soit  $x \in \mathcal{H}_i$  c'est-à-dire tel que

$$\max_{j \in [n]} a_j + x_j = \max_{j \in [n]} b_j + x_j.$$

Soient  $\alpha, \beta \in [n]$  tels que le maximum de gauche soit atteint en  $\alpha$  et celui de droite en  $\beta$ . Par hypothèse sur  $A$  et  $B$ ,  $\alpha \neq \beta$ . On a donc  $a_\alpha + x_\alpha = b_\beta + x_\beta$ . Par définition, on a pour tout  $\gamma \in [n]$ ,  $a_\alpha + x_\alpha \geq a_\gamma + x_\gamma$  et en particulier pour  $\gamma = \beta$  on obtient  $b_\beta \geq a_\beta$ . De même,  $a_\alpha \geq b_\alpha$ . Donc  $a_\alpha = \max\{a_\alpha, b_\alpha\} = c_\alpha$  et  $b_\beta = \max\{a_\beta, b_\beta\} = c_\beta$ . Ainsi  $c_\alpha + x_\alpha = c_\beta + x_\beta$ . De plus, cette quantité est pour tout  $\gamma \in [n]$  supérieure à  $a_\gamma + x_\gamma$  et à  $b_\gamma + x_\gamma$ , donc à  $c_\gamma + x_\gamma$ . Finalement,  $\max_{j \in [n]} x_j + c_j$  est bien atteint deux fois au moins, et donc  $x \in H_i$ .  $\square$

En ce sens, la famille  $(H_i)_{i \in [m]}$  d'hyperplans dans  $\mathbb{T}^n$  est associé au jeu de parité donné par  $A$  et  $B$ . Afin de montrer que l'arrangement d'hyperplan est en position générale, il faut montrer que la matrice de cette famille

$$M = \begin{bmatrix} c^1 \\ \vdots \\ c^m \end{bmatrix} \in \mathbb{T}^{m \times n}$$

est tropicalement générique.

**Proposition 2.**  $M$  est tropicalement générique et l'arrangement d'hyperplans  $(H_i)_{i \in [n]}$  est en position générale.

*Démonstration.* Il suffit de vérifier que toute sous-matrice carrée  $W$  de  $M$  est tropicalement non-singulière. Soit  $W \in \mathbb{T}^{k \times k}$  une telle sous-matrice. Ses coefficients sont de valuations distinctes puisque c'est le cas pour  $M$ . Soient  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_k$  telles que  $\sum_{i=1}^k w_{i\sigma_1(i)} = \sum_{i=1}^k w_{i\sigma_2(i)}$ . En particulier les deux quantités ont la même valuation, donc par hypothèse sur les valuations distinctes, il existe  $j \in [k]$  tel que cette valuation est atteinte pour les termes  $w_{j\sigma_1(j)}$  et  $w_{j\sigma_2(j)}$  qui sont égaux, si bien que  $\sigma_1(j) = \sigma_2(j)$ . Donc  $\sum_{i \in [k] \setminus \{j\}} w_{i\sigma_1(i)} = \sum_{i \in [k] \setminus \{j\}} w_{i\sigma_2(i)}$ . En réitérant ce raisonnement, on montre de proche en proche que  $\sigma_1(i) = \sigma_2(i)$  pour tout  $i \in [k]$ , et donc que  $\sigma_1 = \sigma_2$ . Ainsi pour deux permutations  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \in \mathfrak{S}_k$  distinctes,  $\sum_{i=1}^k w_{i\sigma_1(i)} \neq \sum_{i=1}^k w_{i\sigma_2(i)}$ . Donc  $\text{tper}(W) = \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sum_{i=1}^k w_{i\sigma(i)}$  n'est bien atteint qu'une fois et  $W$  est bien tropicalement non-singulière. Donc  $M$  est tropicalement générique et l'arrangement d'hyperplans  $(H_i)_{i \in [n]}$  est en position générale.  $\square$

**Remarque** Ce résultat est utile dans la mesure où le matroïde orienté que l'on peut associer à un tel jeu / programme linéaire sera tropicalement non singulier ([BBLV<sup>+</sup>99]).

### 4.3 Intérieur non vide de l'intersection des demi-espaces

**Conjecture 2.** Soit un jeu à paiement moyen issu d'un jeu de parité, dont tous les paiements sont distincts. Alors le jeu est gagnant si et seulement si l'intersection des demi-espaces signés est d'intérieur non vide.

Sans parvenir jusqu'à la preuve de ce résultat, on cherche à décomposer le problème selon les stratégies sans-mémoire adoptables par l'un des joueurs.

#### 4.3.1 Décomposition selon les stratégies

On considère les stratégies sans-mémoire pour le joueur Max donnée par une fonction  $\sigma : I \rightarrow J$ , vérifiant  $B_{i\sigma(i)} > -\infty$  pour tout  $i \in I$  : si l'état actuel est  $i \in I$  alors Max joue vers l'état  $\sigma(i) \in J$ . Afin de déterminer si le jeu est gagnant pour Max, on peut essayer de distinguer selon toutes les stratégies sans-mémoire qu'il peut adopter : le jeu est gagnant pour Max si et seulement s'il existe une stratégie sans-mémoire  $\sigma \in J^I$  pour Max telle que s'il la suit, il gagne.

Soit  $\sigma \in J^I$  une telle stratégie pour Max. On pose l'opérateur  $B^\sigma$  tel que  $(B^\sigma x)_i = B_{i\sigma(i)} + x_{\sigma(i)}$ , et on note  $T^\sigma = A^\# B^\sigma$ . On veut exprimer la fonction min-max  $T$  (voir Section 1.2) en fonction des  $\sigma$ .

**Proposition 3.** On a

$$T = \max_{\sigma \in J^I} A^\# B^\sigma = \max_{\sigma \in J^I} T^\sigma.$$

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathbb{T}^n$ . On rappelle que

$$\begin{aligned} T(x)_j &= \min_i \left( -a_{ij} + \max_k b_{ik} + x_k \right) \\ T^\sigma(x)_j &= \min_i \left( -a_{ij} + b_{i\sigma(i)} + x_{\sigma(i)} \right) \end{aligned}$$

Pour tout  $\sigma \in J^I$ ,  $b_{i\sigma(i)} + x_{\sigma(i)} \leq \max_k b_{ik} + x_k$  donc  $T^\sigma(x) \leq T(x)$ . D'autre part on définit  $\bar{\sigma}$  tel que pour tout  $i$ ,  $\max_k b_{ik} + x_k$  soit atteint en  $k = \bar{\sigma}(i)$ . Alors  $T(x) = T^{\bar{\sigma}}(x)$ . D'où le résultat.  $\square$

On pose maintenant  $V = \{x \in \mathbb{T}^n, x \leq Tx\}$  et  $V_\sigma = \{x \in \mathbb{T}^n, x \leq T^\sigma x\}$ . Puisque pour toute  $\sigma \in J^I$ ,  $V_\sigma \subset V$ , pour montrer que  $V$  est d'intérieur non vide il suffit de montrer qu'il existe une stratégie sans-mémoire  $\sigma \in J^I$  telle que  $V_\sigma$  est d'intérieur non vide. Par ailleurs

$$\begin{aligned} x \leq T^\sigma(x) &\iff \forall j, x_j \leq \inf_i \left( -A_{ij} + B_{i\sigma(i)} + x_{\sigma(i)} \right) \\ &\iff \forall j \forall i, x_j \leq -A_{ij} + B_{i\sigma(i)} + x_{\sigma(i)} \end{aligned}$$

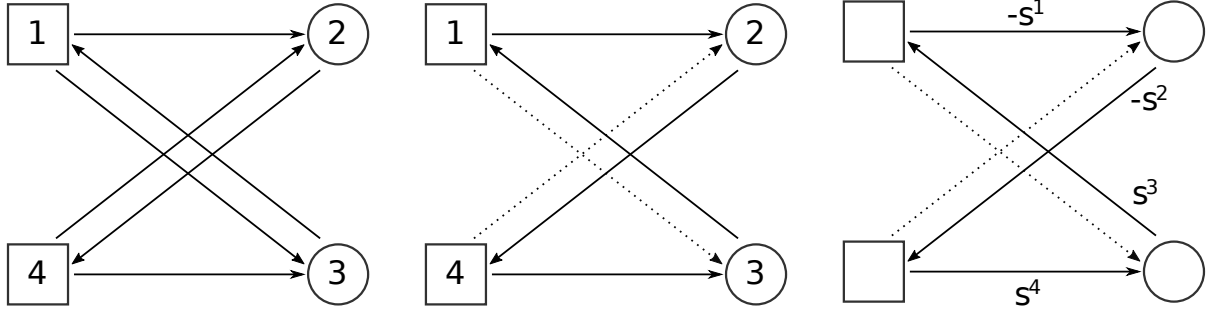


FIGURE 6 – Exemple pour une stratégie victorieuse de Max. À gauche : jeu de parité. Au milieu : jeu de parité avec stratégie sans-mémoire pour Max. À droite : jeu à paiement moyen associé.

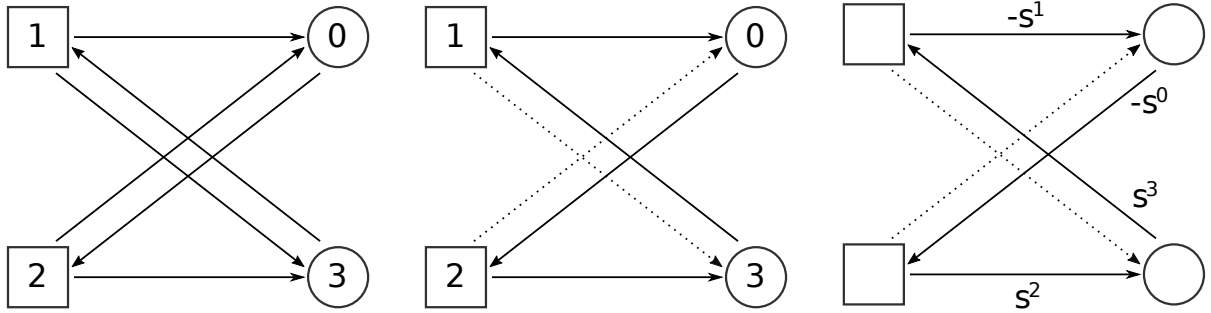


FIGURE 7 – Exemple pour une stratégie perdante de Max. À gauche : jeu de parité. Au milieu : jeu de parité avec stratégie sans-mémoire pour Max. À droite : jeu à paiement moyen associé.

#### 4.3.2 Représentation des inégalités dans un ensemble tropical signé

On se ramène donc à des inégalités dans  $\mathbb{T}_\pm^2$  de la forme  $x \leq C \oplus y$  ([ACG<sup>+</sup>90]). On réalise une distinction de cas sur les signes tropicaux de  $x$ ,  $y$  et  $C$ . On suppose par exemple que  $C$  est tropicalement positif :

- cas  $x, y \in \mathbb{T}_+$  : l'inégalité devient  $|x| \leq \max(|C|, |y|)$  ;
- cas  $x \in \mathbb{T}_+, y \in \mathbb{T}_-$  : si on a  $|y| > |C|$  alors on a  $C \oplus y \in \mathbb{T}_-$  et alors l'inégalité ne peut être vérifiée. Donc  $|y| \leq |C|$ , et on obtient alors également  $|x| \leq |C|$  et  $|y| < |C|$  conviennent ;
- cas  $x \in \mathbb{T}_-, y \in \mathbb{T}_+$  : l'inégalité est toujours vérifiée ;
- cas  $x, y \in \mathbb{T}_-$  : en écrivant  $y \geq x \oplus (\ominus C)$ , l'inégalité devient  $|y| \leq \max(|x|, |C|)$ .

On peut visualiser les solutions dans un repère où l'origine est le neutre  $0 = \ominus 0$  ( $= -\infty$  pour  $\mathbb{R}_{\max}$ ) et où les nombres tropicaux positifs et négatifs s'étendent à module croissant de part et d'autre de cette origine sur chaque axe. De tels demi-espaces tropicaux sont représentés aux Figures 8 et 9.

#### 4.3.3 Exemple

Considérons le jeu de parité de la Figure 6. Max suit la stratégie  $\sigma : 1 \mapsto 1; 2 \mapsto 2$  en numérotant les sommets du bas vers le haut. Le jeu à paiement moyen qui en découle à pour matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & s^3 \\ -s^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B^\sigma = \begin{bmatrix} -s^1 & 0 \\ 0 & s^4 \end{bmatrix}$$

qui donnent le système

$$\begin{cases} s^3 + \mathbf{y} \leq -s^1 + \mathbf{x} \\ -s^2 + \mathbf{x} \leq s^4 + \mathbf{y} \end{cases} \iff \begin{cases} s^3 + s^1 + \mathbf{y} \leq \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \leq s^4 + s^2 + \mathbf{y} \end{cases} .$$

En prenant la valuation, on obtient deux demi-espaces tropicaux donnés par les inégalités :

$$\begin{cases} y \oplus 3 \leq x \\ x \leq y \oplus 4 \end{cases} .$$

On représente ces demi-espaces tropicaux en Figure 8. Le fait que l'intérieur de leur intersection, colorié en jaune, soit non vide, est cohérent avec le fait que la stratégie  $\sigma$  est victorieuse pour Max, la plus grande priorité rencontrée infiniment souvent étant 4 donc paire.



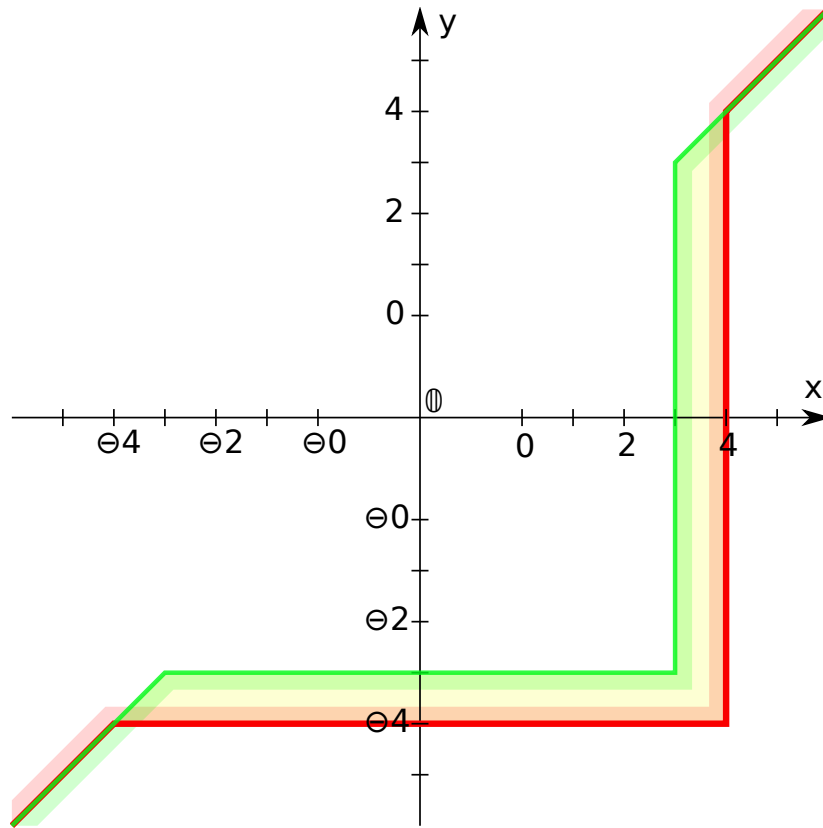


FIGURE 8 – Demi-espaces tropicaux obtenus pour les inégalités  $x \geq y \oplus 3$  (vert) et  $x \leq y \oplus 4$  (rouge). L'intérieur de leur intersection, non vide, est colorié en jaune.

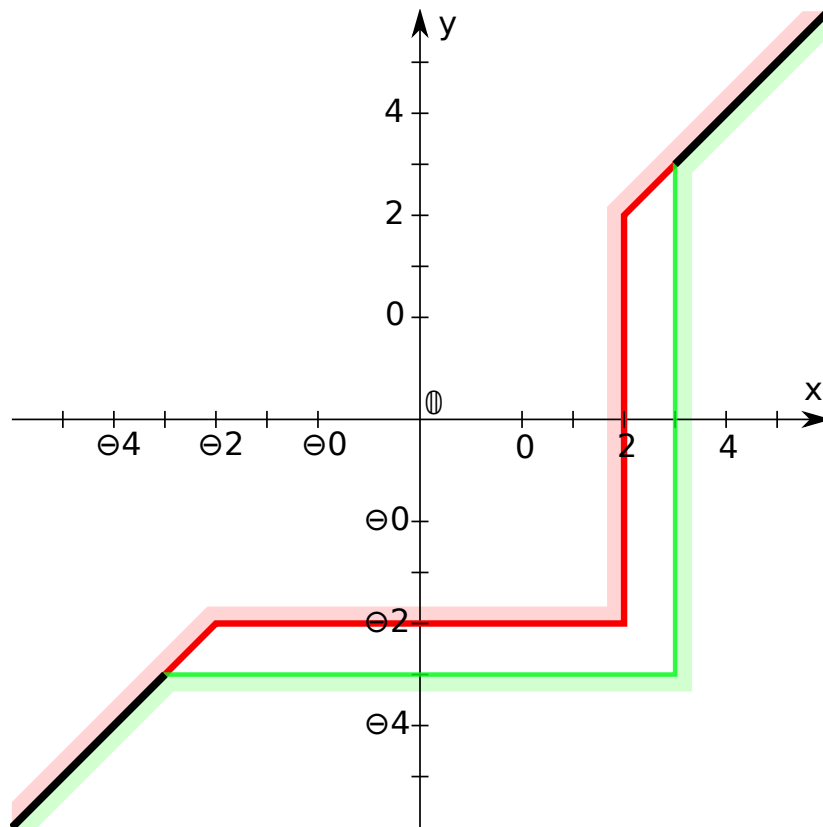


FIGURE 9 – Demi-espaces tropicaux obtenus pour les inégalités  $x \geq y \oplus 3$  (vert) et  $x \leq y \oplus 2$  (rouge). Leur intersection (en noir) est non vide, mais son intérieur l'est.

On remplace maintenant dans le jeu de parité les priorités 4 et 2 par respectivement 2 et 0, comme indiqué en Figure 7. Les demi-espaces tropicaux sont désormais représentés par les inégalités

$$\begin{cases} y \oplus 3 \leq x \\ x \leq y \oplus 2 \end{cases}$$

et sont illustrés en Figure 9. Cette fois-ci, l'intérieur de l'intersection est vide, tandis Max n'est effectivement pas victorieux pour cette stratégie dans ce jeu, la plus grande priorité rencontrée infiniment souvent étant 3 donc impaire.

## Conclusion

Ce stage a comporté une grande partie de travail bibliographique pour appréhender l'ensemble des notions nécessaires à l'étude du problème : fondements des mathématiques tropicales et géométrie tropicale, théorie des jeux de parité et à paiement moyen, entre autres. Il a fallu ensuite étudier les travaux de l'équipe d'accueil qui ont construit les liens entre ces notions, ces liens étant au cœur de la problématique. Le travail nouveau a alors porté dans deux directions principales. D'une part, la double déquantisation qui désigne l'aspect algébrique de la double réduction des jeux de parité aux programmes linéaires, afin de comprendre les structures algébriques dans lesquelles on travaille à chaque étape de réduction et les liens entre elles. D'autre part, des investigations concernant la caractérisation géométrique des programmes linéaires tropicaux issus de jeux de parité. Un résultat a été écrit sur l'arrangement des hyperplans tropicaux associés à certains jeux, et du travail a été effectué sur la conjecture concernant l'intérieur de l'intersection des demi-espaces, sans toutefois parvenir jusqu'à la preuve.

Une perspective est l'introduction des matroïdes orientés associés aux programmes linéaires, tropicaux ou non, pour comprendre quelles propriétés de ces matroïdes orientés peuvent induire la possibilité d'une résolution par des algorithmes de jeux en temps quasi-polynomial.

## Références

- [ABGJ14] Xavier Allamigeon, Pascal Benchimol, Stéphane Gaubert, and Michael Joswig. Combinatorial simplex algorithms can solve mean payoff games. *SIAM Journal on Optimization*, 24(4) :2096–2117, 2014.
- [ABGJ15] Xavier Allamigeon, Pascal Benchimol, Stéphane Gaubert, and Michael Joswig. Tropicalizing the simplex algorithm. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 29(2) :751–795, 2015.
- [ACG<sup>+</sup>90] Marianne Akian, Guy Cohen, Stéphane Gaubert, Ramine Nikoukhah, and Jean Pierre Quadrat. Linear systems in  $(\max, +)$  algebra. In *29th IEEE Conference on decision and control*, pages 151–156. IEEE, 1990.
- [AGG12] Marianne Akian, Stéphane Gaubert, and Alexander Guterman. Tropical polyhedra are equivalent to mean payoff games. *International Journal of Algebra and Computation*, 22(01) :1250001, 2012.
- [AGG14] Marianne Akian, Stéphane Gaubert, and Alexander Guterman. Tropical cramer determinants revisited. *Tropical and idempotent mathematics and applications*, 616 :1–45, 2014.
- [BBLV<sup>+</sup>99] Anders Björner, Anders Björner, Michel Las Vergnas, Bernd Sturmfels, Neil White, and Gunter M Ziegler. *Oriented matroids*. Number 46. Cambridge University Press, 1999.
- [BS12] Dietmar Berwanger and Olivier Serre. Parity games on undirected graphs. *Information Processing Letters*, 112(23) :928–932, 2012.
- [CJK<sup>+</sup>17] Cristian S Calude, Sanjay Jain, Bakhadyr Khossainov, Wei Li, and Frank Stephan. Deciding parity games in quasipolynomial time. pages 252–263, 2017.
- [GKK88] Vladimir A Gurvich, Alexander V Karzanov, and LG Khachivan. Cyclic games and an algorithm to find minimax cycle means in directed graphs. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 28(5) :85–91, 1988.
- [Jur98] Marcin Jurdziński. Deciding the winner in parity games is in  $UP \cap co-UP$ . *Information Processing Letters*, 68(3) :119–124, 1998.
- [ZP96] Uri Zwick and Mike Paterson. The complexity of mean payoff games on graphs. *Theoretical Computer Science*, 158(1-2) :343–359, 1996.

## A Contexte institutionnel et social du stage

L'équipe de recherche Tropical est commune au centre Inria Saclay – Île-de-France et au Centre de Mathématiques Appliquées (CMAP) de l'École polytechnique. Elle est composée de cinq chercheurs permanents, d'un ingénieur de recherche et, actuellement, de six doctorants et post-doctorants. Elle s'intéresse à diverses utilisations des mathématiques tropicales en théorie de la décision, en systèmes dynamiques, ou encore en vérification. Elle travaille également sur des applications concernant l'organisation des centres d'appels d'urgence, notamment dans le cadre d'un partenariat avec le SAMU.

Le stage s'est effectué intégralement à distance, sans passage au laboratoire. Des séances de travail en conférence avec les encadrants ont eu lieu une ou deux fois par semaine.