



Rapport de stage de M1

RECONSTRUCTION DE SURFACES À L'AIDE DU COMPLEXE DE DELAUNAY

Mattéo Clémot

Encadrante :
Dominique Attali
Équipe GAIA (GIPSA-lab)

Avril - juillet 2021

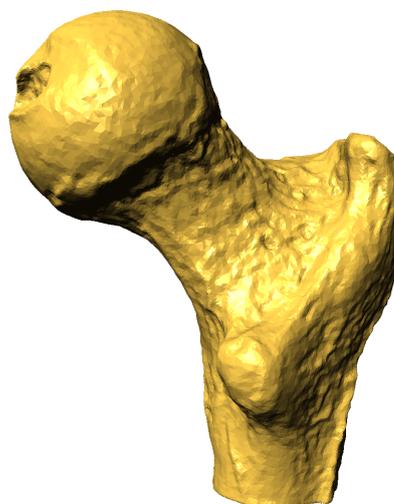
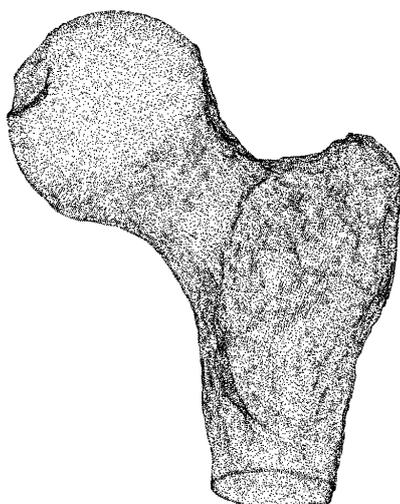


Table des matières

Introduction	2
1 Notions géométriques et topologiques	3
1.1 Variétés et équivalences	3
1.2 Caractéristiques géométriques	3
1.3 Alpha-offset et théorème de reconstruction	5
1.4 Reconstruction non uniforme	5
2 Construction d'un complexe simplicial approchant la surface	6
2.1 Complexes simpliciaux	6
2.2 Diagramme de Voronoï et complexe de Delaunay	7
2.3 Filtrations	8
2.4 Alpha-complexe pondéré	10
2.5 Flag complex	12
3 Élimination des <i>slivers</i>	12
3.1 Topologie du link	12
3.2 Collapses	13
3.3 Algorithme	14
4 Existence de collapses vers une triangulation de la surface	15
4.1 État de l'art	15
4.2 Des points presque cocycliques dans l'alpha-complexe	16
4.3 Collapses vers une triangulation du disque	16
5 Implémentations	20
5.1 Outils utilisés	20
5.2 Code écrit	20
Conclusion	21
A Interface du programme	22
B Résultats de l'algorithme d'élimination des <i>slivers</i>	23

Introduction

Contexte

On s'intéresse à la reconstruction d'une surface dans \mathbb{R}^3 à partir d'un ensemble de points qui l'échantillonnent, avec ou sans bruit. Plus précisément, il s'agit d'élaborer un modèle informatique respectant au mieux la géométrie et la topologie de la surface à reconstruire :

- la forme reconstruite doit être proche géométriquement de la surface initiale ;
- la topologie de la surface initiale doit être respectée, dans le sens où la forme reconstruite doit y être homéomorphe ou au moins homotopiquement équivalente.

Le cas tridimensionnel peut servir à constituer un modèle informatique d'un objet réel à partir d'un échantillon de points sur son bord. Mais le problème peut se généraliser en dimension supérieure à la reconstruction d'une k -variété qui a des applications en apprentissage automatique.

De nombreuses méthodes de reconstruction sont fondées sur le calcul d'un sous-complexe simplicial du complexe de Delaunay des points qui échantillonnent la surface, de façon à aboutir à un complexe qui approche la surface et pas son enveloppe convexe. L'alpha-complexe est un de ces sous-complexes adaptés à la reconstruction, car capable, sous certaines conditions, de reproduire le type d'homotopie de la surface.

Objectif

Il reste généralement des "tétraèdres plats" appelés *slivers* dans l'alpha-complexe qui approche la surface : même s'il dispose du bon type d'homotopie, il n'est donc pas forcément homéomorphe à la surface.

Ce stage s'intéresse à la possibilité d'éliminer ces *slivers* par une succession de *collapses*, des transformations élémentaires du complexe simplicial qui conservent son type d'homotopie. Il aborde ainsi la question de savoir s'il est possible de transformer l'alpha-complexe en un complexe homéomorphe à la surface par une telle séquence de *collapses*.

Plan

La Section 1 introduit les notions de topologie et de géométrie qui sont utiles pour définir les hypothèses sur les données d'entrée et l'objectif de la reconstruction. Elle s'intéresse également à des résultats, utiles par la suite, concernant la topologie d'un ensemble de points grossis par des boules d'un certain rayon, appelé alpha-offsets.

La Section 2 est consacrée à des méthodes pour calculer un premier complexe simplicial approchant la surface en partant de la triangulation de Delaunay de l'échantillon de points. On s'intéresse particulièrement à l'alpha-complexe, qui peut reproduire le type d'homotopie de la surface sous certaines conditions.

La Section 3 s'intéresse à une façon d'éliminer les *slivers* restants dans l'alpha-complexe à l'aide d'une séquence de *collapses*, afin d'aboutir à un complexe homéomorphe à la surface.

La Section 4 essaye de former un fragment de preuve qui viserait à montrer l'existence sous certaines conditions d'une séquence de *collapses* aboutissant à une surface. Plus précisément, on y montre dans le cas d'un ensemble de points presque cocycliques l'existence d'une séquence de *collapses* vers la triangulation du disque.

La Section 5 est consacrée aux commentaires sur le code écrit et utilisé durant le stage et les outils préexistants qui ont été utilisés.

Remerciements

Je remercie vivement mon encadrante Dominique Attali pour sa disponibilité et son engagement tout au long du stage. Je remercie également André Lieutier pour son aide précieuse qui nous a fait bien avancer à plusieurs reprises.

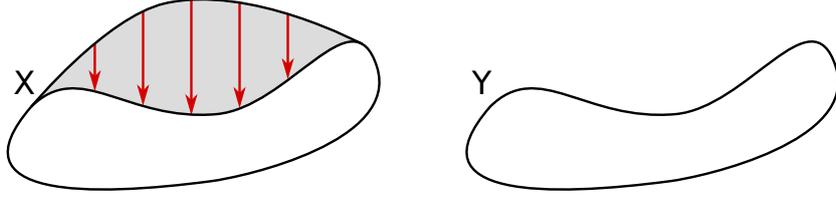


FIGURE 1 – X se rétracte par déformation sur Y , les deux espaces ont le même type d'homotopie. En revanche, ils ne sont pas topologiquement équivalents (c'est-à-dire pas homéomorphes).

1 Notions géométriques et topologiques

Cette section introduit les outils topologiques (1.1) et géométriques (1.2) utilisés par la suite. Elle s'intéresse ensuite à la topologie des alpha-offsets d'un échantillon de points en fonction du rayon des boules (1.3). Enfin, elle s'intéresse au cas où les boules ont un rayon variable en évoquant un résultat de [CL08] (1.4).

1.1 Variétés et équivalences

On considère que l'objet A à reconstruire est une k -variété (sans bord) de \mathbb{R}^d : tout point de A possède un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^k . On pourrait aussi s'intéresser aux k -variétés à bord (c'est-à-dire dont tout point possède un voisinage homéomorphe soit à \mathbb{R}^k soit à un demi-espace comme $\mathbb{R}_+^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0\}$).

Idéalement, dans le but de refléter la topologie de l'objet initial A , on souhaite reconstruire un ensemble X qui soit homéomorphe à A , c'est-à-dire pour lequel il existe une fonction $f : X \rightarrow A$ continue, bijective, de réciproque continue. On note alors $X \approx A$, et on dit que A et X sont topologiquement équivalents. C'est une propriété forte, c'est pourquoi on introduit la notion d'équivalence d'homotopie qui est moins restrictive.

Définition (Rétraction par déformation). On dit que X se rétracte par déformation sur $Y \subset X$, ou que Y est un rétract par déformation de X , et on note $X \hookrightarrow Y$, s'il existe une application continue $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que :

- pour tout $x \in X$, $H(x, 0) = x$ et $H(x, 1) \in Y$;
- pour tout $y \in Y$ et $t \in [0, 1]$, $H(y, t) = y$.

Définition (Équivalence d'homotopie). On dit que X et Y sont homotopiquement équivalents, ou qu'ils ont le même type d'homotopie, et on note $X \simeq Y$, si X et Y sont des rétracts par déformation d'un même espace topologique Z .

Deux espaces topologiquement équivalents sont homotopiquement équivalents, la réciproque n'étant pas vraie (voir Figure 1). De façon informelle, l'équivalence d'homotopie est "moins sensible" à la dimension de l'espace.

Un espace topologique est dit *contractile* lorsqu'il est homotopiquement équivalent à un point.

1.2 Caractéristiques géométriques

Définition (Distance de Hausdorff). Soient X et Y deux compacts d'un espace métrique (E, d) . On définit la *distance de Hausdorff* entre X et Y comme, de façon équivalente :

$$\begin{aligned} d_H(X, Y) &= \min\{r \geq 0 \mid X \subseteq Y^{\oplus r} \text{ et } Y \subseteq X^{\oplus r}\} \\ &= \max\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y)\} \end{aligned}$$

Cette distance permet de traduire la "proximité" entre deux sous-ensembles. Dans le cadre de la reconstruction, supposons que A soit le compact à reconstruire et P un échantillonnage bruité de A . Une mesure de la qualité de P peut être $d_H(A, P) \leq \varepsilon$, puisque dans ce cas, tout point de P est à moins de ε de A (ε -précision) et tout point de A est à moins de ε d'un point de l'échantillon (ε -densité).

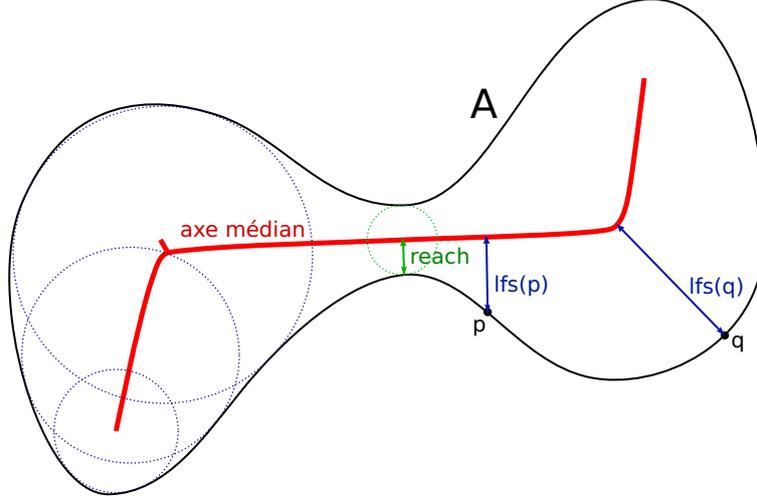


FIGURE 2 – Axe médian (approximatif), reach, et local feature size de deux points pour une courbe fermée dans le plan.

On peut ajouter une condition traduisant le fait que les points ne doivent pas être trop proches les uns des autres, donnant les nets :

Définition (Séparation). Soit P un ensemble fini de points. On appelle *séparation* de P la distance minimale entre deux points de P :

$$\text{sep}(P) = \min_{\substack{p, q \in P \\ p \neq q}} \|p - q\|.$$

Définition (Nets). Un (ε, η) -net d'un compact $A \subseteq \mathbb{R}^d$ est un ensemble fini de points P tel que :

- $d_H(P, A) \leq \varepsilon$;
- $\eta = \frac{\text{sep}(P)}{\varepsilon}$.

Définition (Axe médian). Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un compact. L'*axe médian* de A , noté $\mathcal{M}(A)$, est l'ensemble des points de \mathbb{R}^d qui ont au moins deux plus proches points dans A , ou de façon équivalente, le lieu des centres des $(d - 1)$ -sphères qui sont tangents à A en au moins deux points.

Définition (Reach et local feature size). On définit la *local feature size* (largeur locale) en un point $x \in A$ comme la distance de x à l'axe médian $\mathcal{M}(A)$:

$$\text{lfs}(x) = d(x, \mathcal{M}(A)).$$

On définit également le *reach* comme l'infimum de la lfs :

$$\begin{aligned} \text{reach}(A) &= \inf_{x \in A} \text{lfs}(x) \\ &= \inf_{\substack{x \in A \\ m \in \mathcal{M}(A)}} d(x, m). \end{aligned}$$

Définition (Projection). Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un compact. On note

$$\begin{aligned} \Pi_A : \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{M}(A) &\rightarrow A \\ x &\mapsto \underset{a \in A}{\text{argmin}} d(x, a) \end{aligned}$$

l'application qui, à un point x qui n'est pas sur l'axe médian, associe son unique point le plus proche, c'est-à-dire le $a \in A$ tel que $d(x, a) = d(x, A)$. Ce point, qui est bien unique par définition de l'axe médian, est appelé le projeté de x sur A .

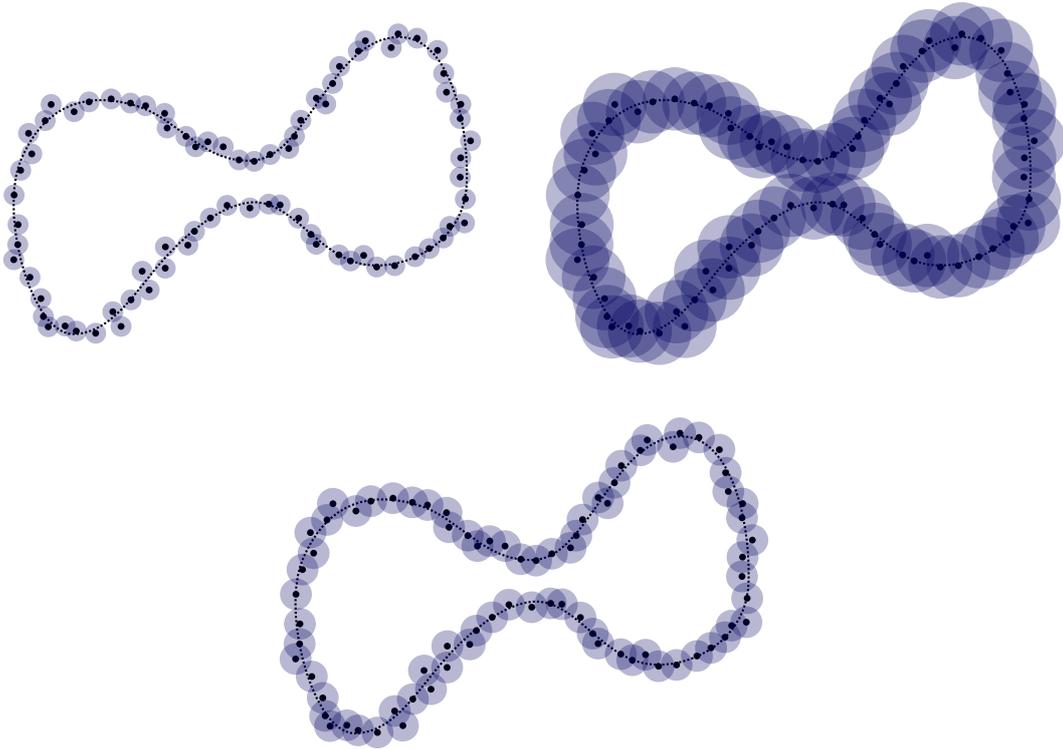


FIGURE 3 – α -offset d'un échantillonnage bruité d'une courbe fermée pour différentes valeurs de α . En haut à gauche et en haut à droite, α est respectivement trop petit et trop grand pour que l' α -offset ait le même type d'homotopie que la courbe (en l'occurrence, celui d'un cercle).

1.3 Alpha-offset et théorème de reconstruction

Définition (α -offset). Soit $P \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble de points et $\alpha > 0$. On définit l' α -offset de X , noté $X^{\oplus\alpha}$, comme l'union des boules de rayon α et centrées en les points de X :

$$X^{\oplus\alpha} = \bigcup_{x \in X} B(x, \alpha).$$

Le théorème de reconstruction suivant est issu de résultats de la Section 3 de l'article [CL08].

Théorème 1 (Théorème de reconstruction). Soit A un compact de \mathbb{R}^d de reach strictement positif. Soit P un compact de \mathbb{R}^d tel qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $d_H(A, P) \leq \varepsilon < (3 - \sqrt{8}) \text{reach}(A)$. Alors $P^{\oplus\alpha}$ se rétracte par déformation sur A pour tout

$$\alpha \in \left[(2 + \sqrt{2})\varepsilon, \text{reach}(A) - (3 + \sqrt{2})\varepsilon \right].$$

En particulier, sous ces conditions, A et $P^{\oplus\alpha}$ ont le même type d'homotopie. Ce résultat théorique est important pour la suite car on se ramènera à des objets de même type d'homotopie que $P^{\oplus\alpha}$ et donc que A si α est bien choisi.

1.4 Reconstruction non uniforme

On pourrait souhaiter utiliser des boules de rayon variable, par exemple afin d'être fin là où la variété a une lfs faible et au contraire être plus grossier là où la lfs est élevée. Une possibilité est d'avoir des boules $B(p, r)$ dont le rayon r est proportionnel à la lfs de la projection de p sur A . On peut alors se demander s'il existe un théorème de reconstruction analogue dans ce cas non uniforme. Frédéric Chazal et André Lieutier ont donné une réponse avec le Théorème 6.2 de l'article [CL08].

Définition. Soit A un compact de \mathbb{R}^d de reach strictement positif. Un compact P de \mathbb{R}^d est une (κ, ε) -approximation de A si :

- pour tout $p \in P$, $d(p, A) = d(p, \Pi_A(p)) < \kappa \varepsilon \text{lfs}(\Pi_A(p))$ (analogue non uniforme de la ε -précision) ;
- pour tout $a \in A$, il existe $p \in P$ tel que $d(a, \Pi_A(p)) < \varepsilon \text{lfs}(a)$ (analogue non uniforme de la ε -densité).

Théorème 2 (Chazal et Lieutier, 2007). *Soit P une (κ, ε) -approximation de A . Soit*

$$\begin{aligned} r : P &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ p &\mapsto \alpha_p \text{lfs}(\Pi_A(p)) \text{ où } \alpha_p \in]0, 1[. \end{aligned}$$

Soit l'offset non uniforme de P dont le rayon des boules est donné par la fonction r :

$$P^{\oplus r} = \bigcup_{p \in P} B(p, r(p)).$$

Si les α_p sont situés dans le bon intervalle (dépendant de ε et κ) alors $P^{\oplus r}$ se rétracte par déformation sur A . En particulier, $P^{\oplus r}$ et A ont même type d'homotopie.

L'intervalle en question, sous réserve d'existence, s'exprime de façon très "lourde" (voir [CL08]). J'ai passé une partie du début du stage à comprendre la preuve dans un premier temps, puis dans un second temps à essayer de modifier les hypothèses (choisir $\alpha_p = \beta \in]0, 1[$ pour tout p par exemple) et d'utiliser une approche plus proche de celle de la preuve du Théorème 1, pour voir s'il était possible d'obtenir une borne plus simple pour les rayons des boules. Cela n'a pas été concluant, les expressions devenant vite extrêmement lourdes et pas facilement exploitables.

2 Construction d'un complexe simplicial approchant la surface

On s'intéresse dans cette section à des méthodes pour obtenir un complexe simplicial approchant la surface, en considérant des sous-complexes de la triangulation de Delaunay des points donnés en entrée. Les définitions proviennent des livres [E⁺01] et [EH10] ainsi que de l'article de Bauer et Edelsbrunner [BE17].

2.1 Complexes simpliciaux

Définition (Simplexe). Un k -simplexe géométrique est l'enveloppe convexe de $k + 1$ points de \mathbb{R}^d affinement indépendants. k est la dimension du simplexe. On parle plutôt de :

- points pour les 0-simplexes ;
- arêtes pour les 1-simplexes ;
- triangles pour les 2-simplexes ;
- tétraèdres pour les 3-simplexes.

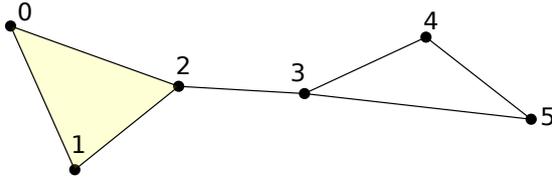
Soit $\sigma = \text{conv}\{u_0, \dots, u_k\}$ un simplexe. Une face (respectivement face propre) de σ est un simplexe τ qui est l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble (respectivement sous-ensemble strict) non vide des (u_i) . On note $\tau \leq \sigma$ (respectivement $\tau < \sigma$). σ est aussi appelée une coface (respectivement coface propre) de τ .

Définition (Complexe simplicial). Un *complexe simplicial (géométrique)* est un ensemble K de simplexes tel que :

- si $\sigma \in K$ et τ est une face de σ , alors $\tau \in K$;
- si $\sigma, \sigma' \in K$, alors $\sigma \cap \sigma'$ est soit vide, soit une face commune à σ et σ' .

On appelle *dimension* d'un complexe simplicial la dimension maximale de ses simplexes.

Définition (Espace sous-jacent d'une triangulation). L'*espace sous-jacent* d'un complexe simplicial est l'union de ses simplexes munie de la topologie de l'espace métrique ambiant.



$\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\},$
 $\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\},$
 $\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\},$
 $\{0, 1, 2\}\}$

FIGURE 4 – Complexe simplicial de dimension 2 dans le plan (à gauche) et complexe simplicial abstrait associé (à droite).

Définition (Triangulation). Une *triangulation* d'un espace topologique X est un complexe simplicial K dont l'espace sous-jacent est homéomorphe à X .

Définition (Complexe simplicial abstrait). Un *complexe simplicial abstrait* est un ensemble fini A d'ensembles stable par sous-ensemble, c'est-à-dire tel que si $\alpha \in A$ et $\beta \subset \alpha$ alors $\beta \in A$. La dimension d'un simplexe α est ici $\dim \alpha = \#\alpha - 1$.

Les deux notions de complexe simplicial, géométrique et abstraite, sont équivalentes puisque qu'un complexe simplicial donne directement une abstraction, et qu'un complexe simplicial abstrait de dimension d admet une *réalisation géométrique* dans \mathbb{R}^{2d+1} (théorème de la réalisation géométrique, [EH10], p.62).

Une façon d'obtenir des complexes simpliciaux abstraits très utilisée par la suite est fondée sur la notion de *nerf d'un recouvrement*.

Définition (Nerf d'un recouvrement). Soit \mathcal{E} un ensemble fini d'ensembles. Le *nerf* de \mathcal{E} est l'ensemble des sous-ensembles de \mathcal{E} dont les ensembles ont une intersection commune non vide :

$$\text{Nrv } \mathcal{E} = \left\{ \mathcal{X} \subset \mathcal{E} \mid \bigcap_{X \in \mathcal{X}} X \neq \emptyset \right\}$$

Théorème 3 (Théorème du nerf). Soit \mathcal{E} un ensemble d'ensembles tel que pour tout sous-ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{E}$, toute intersection $\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X$ est contractile. Alors le nerf de \mathcal{E} (ou plus précisément n'importe laquelle de ses réalisations géométriques) est homotopiquement équivalent à l'union des ensembles.

2.2 Diagramme de Voronoï et complexe de Delaunay

Définition (Diagramme de Voronoï). Soit P un ensemble de points de \mathbb{R}^d appelés les *sites*. La *cellule de Voronoï* V_u d'un site $u \in P$ est l'ensemble des points de \mathbb{R}^d qui sont plus proche de u que de n'importe quel autre site $v \in P$:

$$V_u = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall v \in P, \|x - u\| \leq \|x - v\|\}.$$

Une cellule de Voronoï étant l'intersection de demi-espaces, elle est convexe.

Définition (Complexe de Delaunay). Le complexe de Delaunay (souvent appelé triangulation de Delaunay en dimension 2) d'un ensemble de points P dans \mathbb{R}^d est le dual de l'ensemble des cellules de Voronoï. On peut aussi le voir comme son nerf :

$$\text{Del}(P) = \left\{ \sigma \subset P \mid \bigcap_{u \in \sigma} V_u \neq \emptyset \right\}.$$

Une définition alternative est fondée sur la notion de *d-sphère circonscrite* : étant donné une sphère Σ , on note $B^\circ(\Sigma)$ la boule ouverte ayant pour bord Σ . On dit que la sphère Σ est vide si $B^\circ(\Sigma)$ ne contient aucun point de P .

Lemme 1. Le complexe de Delaunay de $P \subset \mathbb{R}^d$ est constitué des simplexes possédant une sphère circonscrite vide.

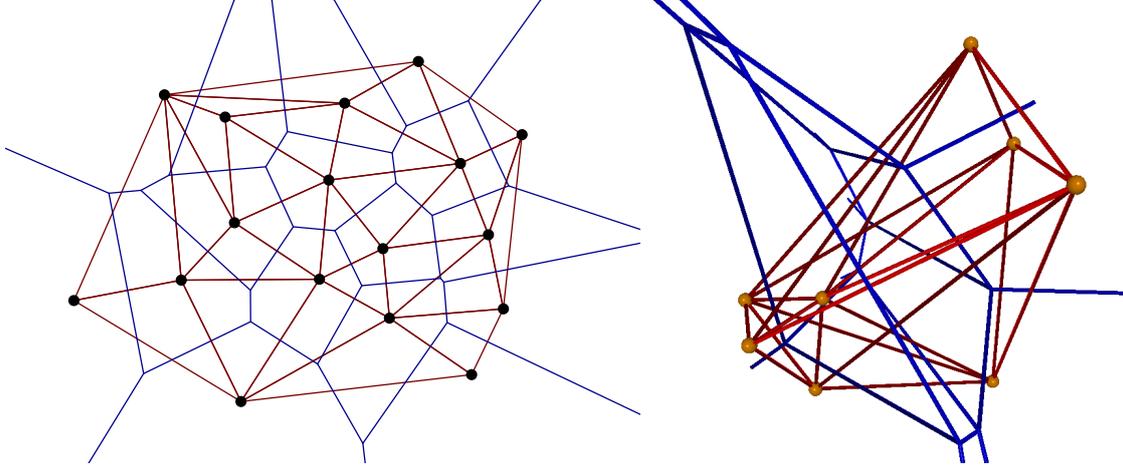


FIGURE 5 – Complexe de Delaunay (en rouge) et diagramme de Voronoï (en bleu) pour un nuage de points dans \mathbb{R}^2 (à gauche) et dans \mathbb{R}^3 (à droite).

Définition. Un ensemble de points P est en position générale dans \mathbb{R}^d si :

- l'espace affine engendré par P est de dimension d ;
- il n'existe pas d'ensemble de $d + 2$ points de P se situant sur une d -sphère vide.

Lemme 2. Si P est un ensemble de points en position générale dans \mathbb{R}^d , son complexe de Delaunay possède une réalisation géométrique naturelle dans \mathbb{R}^d , obtenue en remplaçant chaque simplexe abstrait σ par le simplexe géométrique conv σ .

2.3 Filtrations

Afin de passer du complexe de Delaunay à une approximation de la surface, on souhaite maintenant ne garder que certains simplexes du complexe.

Définition (Complexe de Čech). Le complexe de Čech de paramètre α d'un ensemble de points P est le complexe simplicial abstrait :

$$\check{C}ech(P, \alpha) = \left\{ \sigma \subset P \mid \bigcap_{p \in \sigma} B(p, \alpha) \neq \emptyset \right\}.$$

C'est en fait le nerf de l'ensemble des boules de rayon r centrées en les points de P . Par le théorème du nerf (Théorème 3), le complexe de Čech a le même type d'homotopie que l'union des boules.

Définition (Complexe de Vietoris-Rips). Le complexe de Vietoris-Rips de paramètre α d'un ensemble de points P est le complexe simplicial abstrait contenant les simplexes dont le diamètre est inférieur à 2α :

$$Rips(P, \alpha) = \{ \sigma \subset P \mid \text{diam}(\sigma) \leq 2\alpha \}.$$

On remarque déjà que $\check{C}ech(P, \alpha) \subset Rips(P, \alpha)$. Par ailleurs pour tous réels $\alpha_1 < \alpha_2$:

$$\begin{aligned} \emptyset &= \check{C}ech(P, 0) \subset \check{C}ech(P, \alpha_1) \subset \check{C}ech(P, \alpha_2) \subset \check{C}ech(P, \infty) = \mathcal{P}(P) \\ \emptyset &= Rips(P, 0) \subset Rips(P, \alpha_1) \subset Rips(P, \alpha_2) \subset Rips(P, \infty) = \mathcal{P}(P) \end{aligned}$$

On dit que les familles de complexes de Čech et de Rips sont une filtration de $\mathcal{P}(P)$.

Les complexes de Čech et Vietoris-Rips ont l'inconvénient de n'être limités en dimension que par le nombre de points. L' α -complexe défini ci-après permet de construire un sous-complexe de la triangulation de Delaunay fondé sur la proximité entre les points.

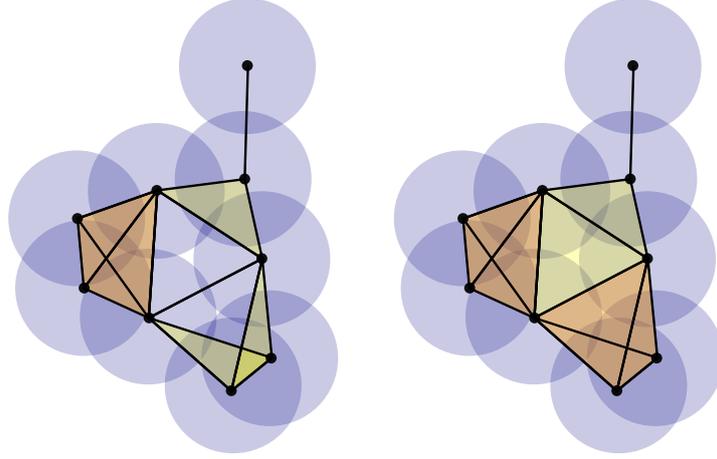


FIGURE 6 – Complexe de Čech (à gauche) et de Vietoris-Rips (à droite) pour un même ensemble de points dans le plan. Dans les deux cas, la dimension du complexe est 3. Les triangles sont en jaunes et les tétraèdres en orange.

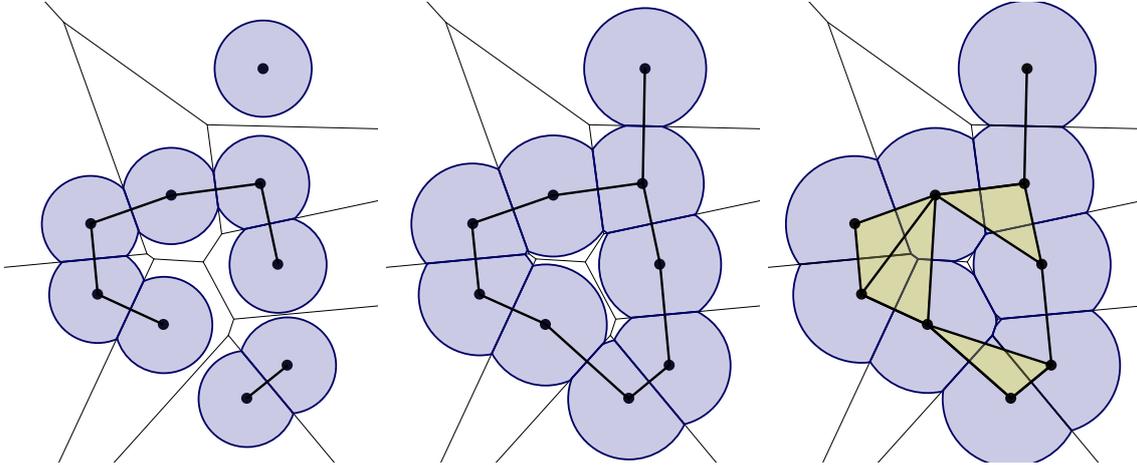


FIGURE 7 – α -complexe du même ensemble de points pour trois valeurs différentes de α .

Définition (α -complexe). L' α -complexe $K_\alpha(P)$ d'un ensemble de points P est le nerf de l'ensemble des boules de rayon r centrées en les points $p \in P$, intersectées avec la cellule de Voronoï V_p associée à leur centre p . C'est donc le complexe simplicial abstrait

$$\begin{aligned} K_\alpha(P) &= \left\{ \sigma \subset P \mid \bigcap_{p \in \sigma} (V_p \cap B(p, \alpha)) \neq \emptyset \right\} \\ &= \left\{ \sigma \subset P \mid \bigcap_{p \in \sigma} (V_p \cap P^{\oplus \alpha}) \neq \emptyset \right\}. \end{aligned}$$

Comme $V_p \cap B(p, \alpha) \subset V_p$, l' α -complexe est bien un sous-complexe simplicial de la triangulation de Delaunay. En outre, par le théorème du nerf (Théorème 3), il a le même type d'homotopie que l'union des boules, c'est-à-dire que $P^{\oplus \alpha}$. En particulier, si on a montré au préalable que α était tel que l' α -offset $P^{\oplus \alpha}$ a le même type d'homotopie que la surface, par exemple avec le Théorème 1, alors l' α -complexe est homotopiquement équivalent à la surface.

Le lemme suivant donne une définition alternative de l' α -complexe et donne une caractérisation simple des simplexes qui y appartiennent.

Lemme 3. L' α -complexe d'un ensemble de points P est l'ensemble des simplexes $\sigma \subset P$ qui ont une sphère circonscrite vide de rayon inférieur à α .



FIGURE 8 – α -complexes du même nuage de points (en haut à gauche) pour différentes valeurs de α . Les triangles sont en jaunes et les tétraèdres en orange. En haut à droite et en bas à droite, α est respectivement trop petit et trop grand pour donner au complexe le bon type d'homotopie. En bas à gauche, on remarque que la valeur de α donne à l' α -complexe le bon type d'homotopie, en l'occurrence celui d'une sphère. Cependant, il reste des slivers dont on aimerait se débarrasser.

On a pour $\alpha_1 < \alpha_2$:

$$\emptyset = K_0(P) \subset K_{\alpha_1}(P) \subset K_{\alpha_2}(P) \subset K_{\infty}(P) = \text{Del}(P)$$

de telle sorte que la suite des α -complexes est une filtration de $\text{Del}(P)$.

2.4 Alpha-complexe pondéré

On peut également définir le diagramme de Voronoï et le complexe de Delaunay dans le cas de points pondérés, lorsque donner différentes "influences" aux points a un sens. On considère pour cela une famille $(w_p)_{p \in P}$ de poids sur les points de P , qui peuvent désormais être vus comme des boules de rayon $\sqrt{w_p}$. La *distance pondérée quadratique* ou la *puissance* d'un point x par rapport à un point pondéré (p, w_p) est désormais $\pi_p(x) = d(x, p)^2 - w_p$. On peut alors définir la cellule de Voronoï pondérée d'un point pondéré :

$$V_u^w = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall v \in P, \pi_u(x) \leq \pi_v(x)\}.$$

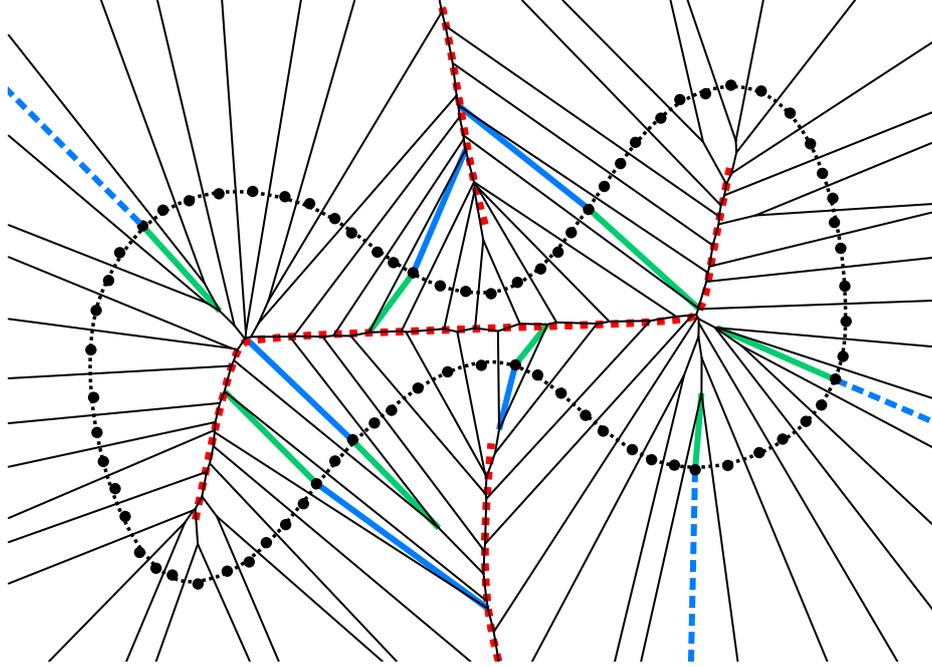


FIGURE 9 – Diagramme de Voronoï d'un nuage de points (en noir) bruité échantillonnant une courbe dans le plan. L'axe médian est en pointillés rouges. On montre également quelques segments reliant des points à leur pôle positif (en bleu, et en pointillés s'il est situé à l'infini), et à leur pôle négatif (en vert), afin d'illustrer le fait que la distance au pôle négatif peut servir d'approximation de la *local feature size*.

Il en découle le complexe de Delaunay pondéré :

$$\text{Del}^w(P) = \left\{ \sigma \subset P \mid \bigcap_{u \in \sigma} V_u^w \neq \emptyset \right\}.$$

On aimerait maintenant reconstruire la surface en étant plus "grossier" là où la *local feature size* est grande et attribuer un poids élevé à ces points, et au contraire être plus fin là où la lfs est faible, et donner un poids plus faible à ces points. On peut utiliser le diagramme de Voronoï (non pondéré) de P pour obtenir une estimation de la lfs (Figure 9) et ainsi pondérer les points de P . Pour cela, on calcule les pôles de la cellule de Voronoï de p définis par Amenta et Bern dans [AB99].

Définition (Pôles d'une cellule de Voronoï). Soit un ensemble de points P , et $p \in P$.

- Si p n'est pas situé sur le bord de l'enveloppe convexe de P , sa cellule de Voronoï V_p est bornée. Le pôle positif π_p^+ est défini comme le point de V_p le plus éloigné de p .
- Si p est situé sur le bord de l'enveloppe convexe de p , sa cellule de Voronoï est non bornée.

On définit le pôle positif comme un point π_p^+ à l'infini tel que la direction $\overrightarrow{p\pi_p^+}$ est la moyenne des normales extérieures des facettes de $\text{conv } P$ incidentes à p .

Le pôle négatif π_p^- est alors le point x de V_p tel que $\langle \overrightarrow{p\pi_p^+}, \overrightarrow{px} \rangle < 0$ le plus éloigné de p . On approxime alors la lfs en p par $d(p, \pi_p^-)$.

J'ai implémenté le calcul des pôles des cellules de Voronoï et le calcul de l' α -complexe pondéré par la distance du point au pôle négatif. En pratique, cette méthode fonctionnait mal sur les échantillons de points, car l'approximation de la lfs par la distance du point au pôle négatif peut être arbitrairement mauvaise sans hypothèse particulière.

2.5 Flag complex

Une dernière méthode à laquelle je me suis intéressé et que j'ai implémenté est la construction du *flag complex* d'un graphe de proximité.

Définition (flag complex). Un *flag complex* est un complexe simplicial K tel que si toutes les faces d'un simplexe σ appartiennent à K , alors σ appartient aussi à K .

On peut alors s'intéresser au flag complex engendré par exemple par un graphe G :

$$\text{Flag } G = \{\sigma \mid \sigma \text{ est une clique de } G\}.$$

Remarque. La structure Skeleton-Blocker [ALS12], implémentée dans la bibliothèque GUDHI, est particulièrement adaptée ici. En effet pour représenter un complexe simplicial K , elle stocke son 1-squelette c'est-à-dire le graphe G constitué de ses points et de ses arêtes, et un ensemble de simplexes minimaux pour l'inclusion de $\text{Flag } G \setminus K$, appelés *blockers*. Intuitivement, si on supprime de $\text{Flag } G$ les blockers de K ainsi que toutes leur cofaces, on obtient K .

Afin de construire un complexe simplicial approchant la surface, on peut calculer le flag complex d'un graphe de proximité, qui peut être défini de différentes manières :

- graphe de voisinage : $G(P, \alpha)$ tel que $pq \in G(P, \alpha)$ si et seulement si $d(p, q) \leq 2\alpha$. On retombe alors sur le complexe de Vietoris-Rips :

$$\text{Rips}(P, \alpha) = \text{Flag}(G(P, \alpha));$$

- graphe des k plus proches voisins : $G(P, k)$ tel que $pq \in G(P, k)$ si et seulement si q est l'un des k plus proches voisins de p .

Il convient d'intersecter les flag complexes ainsi produits avec le complexe de Delaunay de P afin d'obtenir un complexe dont la dimension est celle de l'espace.

Dans la suite, on n'utilise plus que l' α -complexe (non pondéré) pour construire un complexe simplicial approchant la surface.

3 Élimination des *slivers*

Dans la section précédente, on a vu comment construire un complexe simplicial approchant la surface et qui, sous certaines conditions sur l'échantillonnage, possède le même type d'homotopie que cette dernière. Pour autant, ce complexe n'est pas nécessairement une triangulation de la surface (son espace sous-jacent n'est pas forcément homéomorphe à la surface), puisqu'il peut rester des tétraèdres, généralement plats, appelés *slivers*. Dans cette section, on s'intéresse à une méthode de suppression de ces slivers fondée sur des *collapses* de simplexes.

3.1 Topologie du link

Définition (Star). La *star* d'un simplexe τ dans un complexe simplicial K est l'ensemble de ses cofaces, c'est-à-dire

$$\text{St } \tau = \{\sigma \in K \mid \tau \leq \sigma\}.$$

Ce n'est en général pas un complexe simplicial, c'est pourquoi il est utile de considérer sa clôture $\overline{\text{St}} \tau$, le plus petit complexe simplicial contenant $\text{St } \tau$.

Définition (Link). Le *link* d'un simplexe τ dans un complexe simplicial K est l'ensemble des simplexes de $\overline{\text{St}} \tau$ qui n'intersectent pas τ . Les définitions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \text{Lk } \tau &= \{\sigma \in \overline{\text{St}} \tau \mid \sigma \cap \tau = \emptyset\} \\ &= \overline{\text{St}} \tau \setminus \text{St } \tau \\ &= \{\sigma \in K \mid \tau \cup \sigma \in K \text{ et } \tau \cap \sigma = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Dans un complexe de dimension 3 :

- le link d'un point est un sous-complexe d'une triangulation d'une sphère ;

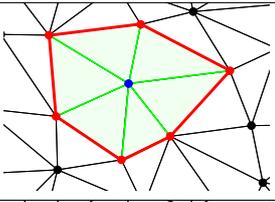
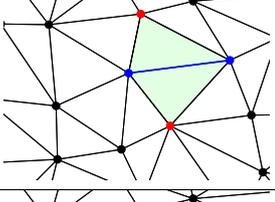
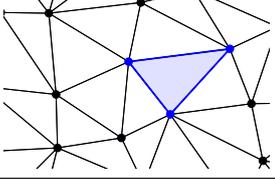
Dimension	Figure	Description	β_0	β_1	β_2
0		homéomorphe à un cercle	1	1	0
1		deux points	2	0	0
2		vide	0	0	0

TABLE 1 – Topologie des links dans un complexe simplicial représentant une surface. En bleu, le simplexe considéré, en vert, sa star, et en rouge, son link.

- le link d'une arête est un sous-complexe d'une triangulation d'un cercle ;
- le link d'un triangle est un sous-complexe d'un ensemble de deux points.

On peut se demander à quoi doit ressembler topologiquement le link d'un simplexe dans un complexe qui représente une surface (bidimensionnelle). On s'intéresse notamment aux trois premiers nombres de Betti qu'il doit avoir : voir Table 1.

Définition (Nombres de Betti). Les nombres de Betti d'un espace topologique X sont une suite $(\beta_n(X))$ de nombres entiers qui constituent des invariants topologiques. De façon informelle, dans le cas d'une surface A :

- $\beta_0(A)$ est le nombre de composantes connexes de A ;
- $\beta_1(A)$ est le nombre de "trous circulaires" de A ;
- $\beta_2(A)$ est le nombre de "cavités" de A .

Les simplexes dont le link ne vérifie pas ces conditions ne sont pas caractéristiques d'une surface, on aimerait donc les "supprimer" en conservant le type d'homotopie du complexe. On introduit pour cela l'opération de *collapse*.

3.2 Collapses

Définition (Intervalle). Soit K un complexe simplicial et $\tau \subset \sigma$ deux simplexes de K . L'*intervalle* $[\tau, \sigma]$ associé à la paire (τ, σ) est l'ensemble de simplexes suivant :

$$[\tau, \sigma] = \{\gamma \in K \mid \tau \subset \gamma \subset \sigma\}.$$

Définition (Collapse). Soit K un complexe simplicial. Un *collapse* dans K est la suppression d'un intervalle $[\tau, \sigma]$ non réduit à un singleton, c'est-à-dire pour lequel $\tau \neq \sigma$.

Un collapse, élémentaire ou pas, conserve le type d'homotopie du complexe.

Définition. S'il existe une séquence de collapses transformant un complexe simplicial K en un complexe simplicial K' , on dit que K se collapse en K' , et on note $K \rightsquigarrow K'$.

Définition (Collapsibilité). Un complexe simplicial K est dit *collapsible* s'il existe une séquence de collapses depuis K qui aboutit à un point.

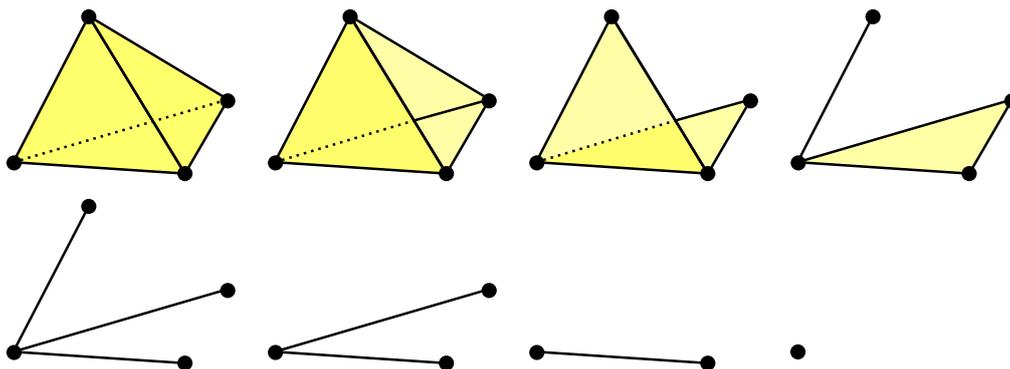


FIGURE 10 – Séquence de sept collapses élémentaires transformant un tétraèdre en un point.

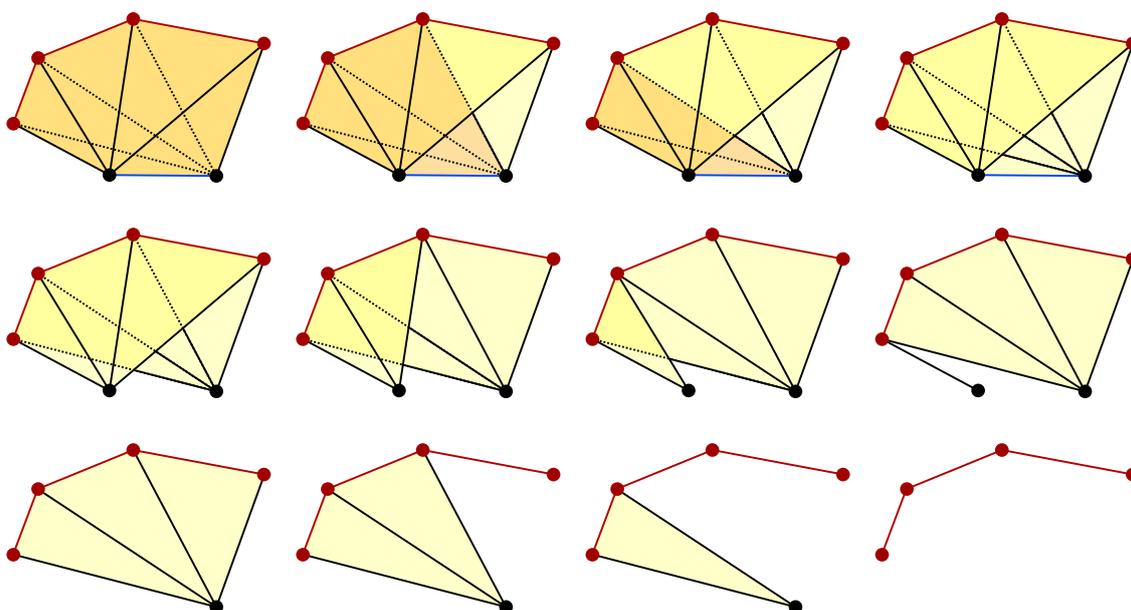


FIGURE 11 – Illustration du Lemme 4 montrant la séquence de collapses équivalente à la suppression des cofaces d’une arête σ (en bleu) dont le link $Lk_K(\sigma)$ (en rouge) est collapsible. Les tétraèdres sont en orange et les triangles en jaune.

Puisque les collapses conservent le type d’homotopie, un complexe collapsible est contractile. La réciproque n’est pas vraie, un contre-exemple étant la maison de Bing.

Lemme 4. *La suppression de toutes les cofaces d’une arête dont le link est collapsible correspond à une séquence de collapses. En particulier, cette opération conserve le type d’homotopie.*

Démonstration. Le link d’une arête est un sous-ensemble d’un complexe homéomorphe à un cercle, donc s’il est collapsible, il est homéomorphe à un segment. Voir la Figure 11 pour la procédure donnant alors une séquence de collapse équivalente à la suppression des cofaces de l’arête. \square

3.3 Algorithme

Nous élaborons maintenant un algorithme supprimant des simplexes et leur cofaces tant que c’est possible, c’est-à-dire lorsque cette opération est équivalente à une séquence de collapses. Il faut donc que le simplexe ait un link qui ne soit pas caractéristique d’une surface (voir Table 1) et qui soit collapsible, ce qui est équivalent au fait qu’il soit collapsible. Dans ce contexte, cela revient à ce que les trois premiers nombres de Betti soient $\beta = (1, 0, 0)$. Plus précisément, cette condition devient :

- pour un triangle, si son link est un unique point ;
- pour une arête, si son link est homéomorphe à un segment (voir Lemme 4) ;
- pour un point, si son link est collapsible.

Remarque. Le module de cohomologie persistante de la bibliothèque GUDHI permet le calcul des nombres de Betti d'un complexe simplicial. La dimension du complexe étant ici fixée, on peut faire plus simple et plus rapide avec le nombre de simplexes de chaque dimension :

- le link d'un triangle σ est un sous-complexe de deux points, la condition pour le supprimer est donc $|\text{Lk}_K \sigma| = 1$;
- le link d'une arête est un sous-complexe d'une triangulation d'un cercle, la condition pour le supprimer (être homéomorphe à un segment) est donc $|\text{Lk}_K \sigma|_0 = |\text{Lk}_K \sigma|_1 + 1$ où $|K|_d$ désigne le nombre de simplexes de dimension d dans le complexe K .

On adopte par ailleurs l'heuristique qui consiste à collapser les simplexes σ par ordre décroissant de plus petit $\beta_\sigma \leq \alpha$ tel que $\sigma \in K_{\beta_\sigma}(P)$ (ce β_σ correspond au rayon de la plus petite sphère vide circonscrite à σ). Avec cet ordre, les points sont toujours traités à la fin. L'idée est en effet que les "gros" simplexes ont des points plus éloignés et sont moins susceptibles de bien représenter la surface : on essaye donc de les collapser prioritairement. Pour cela, on maintient une liste de priorité contenant les simplexes σ qui peuvent être collapsés, avec β_σ comme clé de priorité. Lorsqu'on traite un simplexe σ extrait du sommet de la file, il faut vérifier si des simplexes de son link $\text{Lk}_K(\sigma)$ peuvent désormais être collapsés, ce qui a pu être changé par la suppression de σ et de ses cofaces.

Algorithm 1: Élimination des slivers par suppressions successives.

```

Q une file de priorité contenant les simplexes  $\sigma$  de  $K$  de link  $\text{Lk}_K \sigma$  collapsible;
while  $Q \neq \emptyset$  do
     $L = \text{Lk}_K \sigma$ ;
     $S = \text{St}_K \sigma$ ;
    supprimer de  $K$  tous les simplexes de  $S$ ;
    supprimer de  $Q$  tous les simplexes de  $S$ ;
    ajouter à  $Q$  tous les simplexes  $\tau$  de  $L$  tels que  $\text{Lk}_K \tau$  est collapsible;
end

```

L'algorithme conserve le type d'homotopie du complexe de départ, puisqu'il consiste en un ensemble de suppressions qui sont chacune équivalentes à une séquence de collapses. Notons donc que pour avoir une sortie dont le type d'homotopie est garanti être le bon, il faut supposer que l' α -complexe en entrée a un α déjà bien choisi pour donner le bon type d'homotopie. En pratique, on peut utiliser des théorème sur l'échantillonnage comme le Théorème 1.

Nous n'avons pas durant ce stage cherché à prouver le fait que l'algorithme donne une triangulation de la surface. Nous considérons à la place dans la section suivante (Section 4) un problème simplifié et partiel.

Pour autant, en pratique, nous avons testé cet algorithme sur plusieurs échantillonnages de surfaces, et il est parvenu à une triangulation parfaite de la surface dans tous les cas testés, en ayant choisi manuellement α pour avoir en entrée le bon type d'homotopie (voir Annexe B).

4 Existence de collapses vers une triangulation de la surface

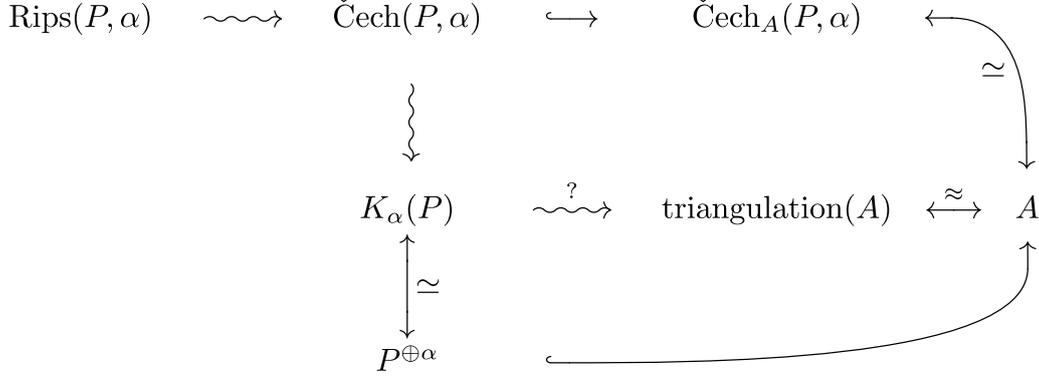
Dans cette section, on se place dans le cas tridimensionnel. L'objectif à long terme est de montrer que, sous certaines conditions, l' α -complexe d'un ensemble de points échantillonnant une surface se collapse en une triangulation de la surface.

4.1 État de l'art

On commence par illustrer les différentes relations qui sont connues entre les différents objets que l'on a vu. Sous certaines conditions précisées dans [AL15], on a les relations suivantes, où :

- $A \rightsquigarrow B$ indique que A se collapse en B ;
- $A \hookrightarrow B$ indique que A se rétracte par déformation sur B ;
- $A \simeq B$ indique que A et B ont le même type d'homotopie ;
- $A \approx B$ indique que A et B sont homéomorphes.

La question est de savoir si $K_\alpha(P) \rightsquigarrow \text{triangulation}(A)$.



4.2 Des points presque cocycliques dans l'alpha-complexe

On part de l'hypothèse qu'on peut regrouper les points du complexe par groupes de points presque cocycliques. Une justification formelle de l'intérêt de cette hypothèse se trouve dans l'article [CSLV19]. L'idée est que les points d'un tétraèdre dans l'alpha-complexe, qui est donc presque plat, sont presque cocycliques.

Pour avoir une intuition géométrique de cette hypothèse, on simplifie et on suppose ici qu'il n'y a pas de bruit, c'est-à-dire que les points sont situés sur la surface : $P \subset A$ et $A \subset P^{\oplus \varepsilon}$. Soient $K = K_\alpha(P)$ et $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in K$ un tétraèdre. Soit Σ la sphère circonscrite de σ . Comme $\sigma \in K_\alpha(P)$, d'après le Lemme 3, le rayon de Σ est $R \leq \alpha$. Soit c son centre, et $p = \Pi_A(c)$. On considère le plan $T = T_p A$ tangent à A en p . Comme $\sigma \subset A$, la sphère Σ intersecte ce plan T en un cercle \mathcal{C} (non dégénéré en un point). On peut alors essayer de borner la distance des σ_i à \mathcal{C} .

4.3 Collapses vers une triangulation du disque

On se place dans \mathbb{R}^3 , muni de la base canonique $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On appelle également H le plan $H = \{(x, y, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Définition (Orientation des triangles). Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. On dit que (a, b, c) est :

- orienté positivement si $(\vec{ab} \wedge \vec{ac}) \cdot \vec{e}_z > 0$;
- orienté négativement si $(\vec{ab} \wedge \vec{ac}) \cdot \vec{e}_z < 0$.

Remarque. On a la propriété suivante : (a, b, c) est orienté positivement si et seulement si le triplet de ses projetés orthogonaux sur H $(\Pi_H(a), \Pi_H(b), \Pi_H(c))$ est orienté positivement.

Démonstration. Soit $u = \vec{ab}$ et $v = \vec{ac}$:

$$(\vec{ab} \wedge \vec{ac}) \cdot \vec{e}_z = \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

L'orientation des points ne dépend donc pas de la coordonnée en z . En particulier, (a, b, c) a la même orientation que ses projetés orthogonaux sur H . \square

On se donne maintenant un cercle C de rayon r centré en l'origine, situé dans le plan H . On considère $P = \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$ n points situés sur ce cercle, ordonnés dans le sens positif. Soit $\tilde{P} = \{\tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_{n-1}\} \in (\mathbb{R}^3)^n$ une η -perturbation de P , c'est-à-dire que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\|p_i - \tilde{p}_i\| \leq \eta$.

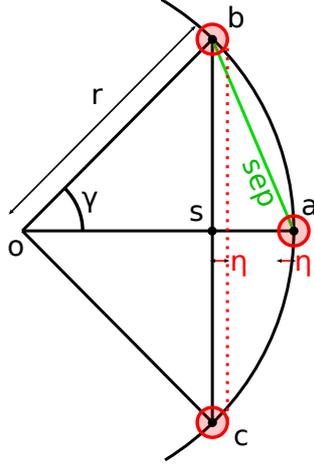


FIGURE 12 – Illustration du pire cas du Lemme 5.

Lemme 5. Si $\eta < \frac{\text{sep}(P)^2}{4r}$, les triplets de points de P conservent leur orientation lors de la η -perturbation, c'est-à-dire que pour tous $i, j, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, (p_i, p_j, p_k) et $(\tilde{p}_i, \tilde{p}_j, \tilde{p}_k)$ ont la même orientation.

Démonstration. Avec la remarque précédente, il suffit de montrer que les projetés orthogonaux sur H des points perturbés $(\Pi_H(\tilde{p}_i), \Pi_H(\tilde{p}_j), \Pi_H(\tilde{p}_k))$ ont la même orientation que (p_i, p_j, p_k) . Or les $\Pi_H(\tilde{p}_\ell)$ pour $\ell \in \{i, j, k\}$ sont dans un disque de rayon η autour de p_ℓ . Le pire cas pour parvenir à un changement d'orientation est le cas de la Figure 12. Pour empêcher le changement d'orientation, la condition $2\eta < sa$ c'est-à-dire $2\eta < (1 - \cos \gamma)r$ est suffisante. Or avec la loi des cosinus on a $ab^2 = oa^2 + ob^2 - 2oa \cdot ob \cos \gamma$ donc $\text{sep}(P)^2 = 2r^2(1 - \cos \gamma)$. La condition devient donc $\eta < \frac{\text{sep}(P)^2}{4r}$. \square

On suppose maintenant que la condition du Lemme 5 est vérifiée. Considérons le complexe de Delaunay de \tilde{P} . On notera dans la suite $\Sigma(\sigma)$ (respectivement $B(\sigma)$) la sphère (respectivement boule) circonscrite à un tétraèdre σ . On notera également $\text{center } \sigma \in \mathbb{R}^3$ le centre de cette sphère.

Les points sont presque cocycliques, donc tous les triangles de Del \tilde{P} forment un angle "faible" avec le plan H , ce qui nous permet de définir leur position par rapport aux tétraèdres dont ils constituent une face.

Définition (Position d'un triangle par rapport à un tétraèdre). Soit $\sigma = \{a, b, c, d\}$ un tétraèdre abstrait. On dit que :

- le triangle $\{a, b, c\}$ est *inférieur* à σ si $\left((\vec{ab} \wedge \vec{ac}) \cdot \vec{ad} \right) \left((\vec{ab} \wedge \vec{ac}) \cdot \vec{e}_z \right) > 0$ (le point d est "au-dessus" du plan engendré par a, b et c);
- le triangle $\{a, b, c\}$ est *supérieur* à σ si $\left((\vec{ab} \wedge \vec{ac}) \cdot \vec{ad} \right) \left((\vec{ab} \wedge \vec{ac}) \cdot \vec{e}_z \right) < 0$ (le point d est "en-dessous" du plan engendré par a, b et c).

Remarque. Soit Δ une droite orthogonale au plan engendré par a, b, c , et $d^+, d^- \in \Delta$. Si d^+ est plus haut que d^- par rapport à ce plan, c'est-à-dire si $\left((\vec{ab} \wedge \vec{ac}) \cdot \vec{d^-d^+} \right) \left((\vec{ab} \wedge \vec{ac}) \cdot \vec{e}_z \right) > 0$, alors $(d^+)_z > (d^-)_z$ où p_z désigne la troisième coordonnée de p .

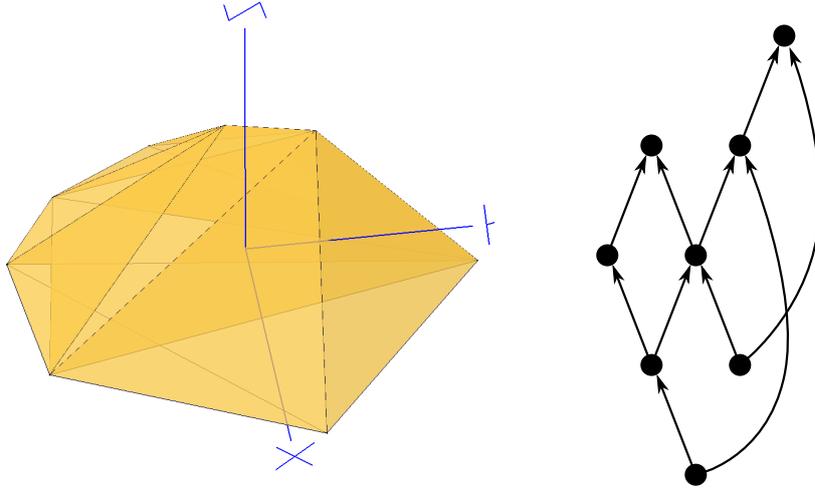


FIGURE 13 – À gauche : complexe de Delaunay de huit points presque cocycliques. À droite : graphe $G(\tilde{P})$ associé, qui est un DAG dont les degrés entrants et sortant sont au maximum 2.

Démonstration. Soit \vec{u} un vecteur unitaire directeur de Δ .

$$\begin{aligned}
& d^+ \text{ est plus haut que } d^- \text{ par rapport au plan engendré par } a, b, c \\
& \iff ((\vec{ab} \wedge \vec{ac}) \cdot \overrightarrow{d^- d^+}) ((\vec{ab} \wedge \vec{ac}) \cdot \vec{e}_z) > 0 \\
& \iff (\vec{u} \cdot \overrightarrow{d^- d^+}) (\vec{u} \cdot \vec{e}_z) > 0 \\
& \iff ((\vec{u} \cdot \overrightarrow{d^- d^+}) \vec{u}) \cdot \vec{e}_z > 0 \\
& \iff \overrightarrow{d^- d^+} \cdot \vec{e}_z > 0 \\
& \iff \overrightarrow{od^+} \cdot \vec{e}_z > \overrightarrow{od^-} \cdot \vec{e}_z \\
& \iff (d^+)_z > (d^-)_z
\end{aligned}$$

□

Définition ($G(Q)$). Soit $Q \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble fini de points tels que pour tous $(a, b, c) \in Q^3$, le triangle abc n'est pas vertical. On définit le graphe orienté $G(Q)$ dont les sommets sont les tétraèdres de $\text{Del } Q$ et tel que $(\sigma^-, \sigma^+) \in G(Q)$ si et seulement si :

- σ^- et σ^+ s'intersectent en un triangle $\tau \in \text{Del } Q$;
- τ est supérieur à σ^- et inférieur à σ^+ .

Lemme 6. $G(\tilde{P})$ est un graphe orienté :

- de degré entrant maximal égal à 2 et de degré sortant maximal égal à 2 ;
- acyclique (c'est un DAG).

Démonstration. Soit $\sigma = \{a, b, c, d\}$ un tétraèdre de $\text{Del } \tilde{P}$, avec a, b, c, d ordonnés dans le sens direct. Les arêtes ab, bc, cd, da font partie de $\text{conv } \sigma$: en effet, les orientations des triplets étant conservées par la η -perturbation, chacune de ces arêtes à laquelle on ajoute n'importe quel autre troisième point forme un triplet d'orientation positive. Le plan contenant l'arête et perpendiculaire à H sépare alors l'espace en deux demi-espaces dont l'un est vide de \tilde{P} , et l'arête appartient donc bien à l'enveloppe convexe. Les arêtes ac et bd forment des "diagonales" dont les projections orthogonales sur H se croisent : dans \mathbb{R}^3 , l'une, e , passe donc au-dessus de l'autre, e' . Les deux triangles de σ attachés à e sont supérieurs à σ et les deux attachés à e' sont inférieurs à σ . Il y a donc au plus deux tétraèdres s'intersectant avec σ en un triangle inférieur à σ , et de même pour les triangles supérieurs à σ . Ainsi les degrés entrant et sortant de σ dans $G(\tilde{P})$ ne peuvent dépasser 2.

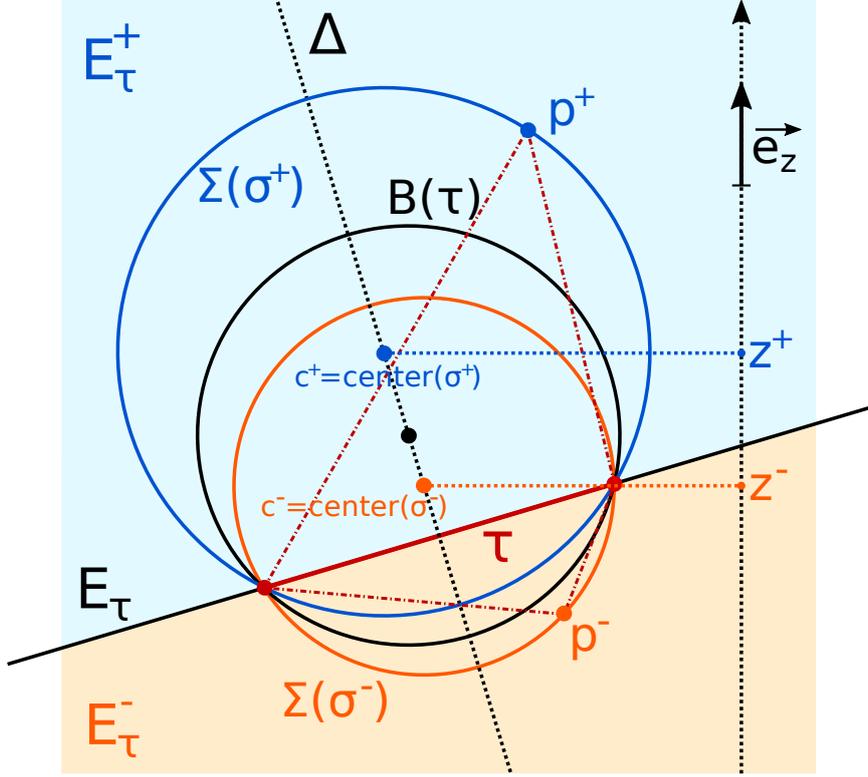


FIGURE 14 – Illustration pour la preuve de la seconde partie du lemme 6.

On montre maintenant que $G(\tilde{P})$ est acyclique. Soit (σ^-, σ^+) une arête de $G(\tilde{P})$, et τ le triangle $\sigma^- \cap \sigma^+$, inclus dans un plan E_τ (le plan *radical*) qui sépare l'espace en deux demi-espaces E_τ^- , contenant σ^- , et E_τ^+ , contenant σ^+ . Notons aussi $p^- = \sigma^- \setminus \tau \in E_\tau^- \cap \tilde{P}$ et $p^+ = \sigma^+ \setminus \tau \in E_\tau^+ \cap \tilde{P}$. Le lieu des centres des sphères du faisceau des sphères circonscrites à τ est une droite Δ orthogonale au plan E_τ . Par ailleurs, τ étant un triangle de Delaunay, il existe une boule $B(\tau)$ circonscrite à τ ne contenant aucun point de \tilde{P} , en particulier ni p^- ni p^+ . Donc :

- $E_\tau^+ \cap B(\tau) \subsetneq E_\tau^+ \cap B(\sigma^+)$, donc le centre de $B(\sigma^+)$ est situé strictement plus haut sur la droite Δ que celui de $B(\tau)$;
- $E_\tau^- \cap B(\tau) \subsetneq E_\tau^- \cap B(\sigma^-)$, donc le centre de $B(\sigma^-)$ est situé strictement plus bas sur la droite Δ que celui de $B(\tau)$;

Par conséquent, $\text{center}(\sigma^+)$ est plus haut sur la droite Δ que $\text{center}(\sigma^-)$. Avec la remarque précédente, la coordonnée en z de $\text{center}(\sigma^+)$ est strictement supérieure à celle de $\text{center}(\sigma^-)$. On dispose donc d'une fonction $h : \sigma \mapsto (\text{center } \sigma)_z$ telle que si (σ^-, σ^+) est une arête de $G(\tilde{P})$, alors $h(\sigma^-) < h(\sigma^+)$. Le graphe orienté $G(\tilde{P})$ est donc acyclique. \square

Lemme 7. Soit σ un sommet de $G(\tilde{P})$ sans successeur (respectivement sans prédécesseur). On peut collapser l'arête supérieure (respectivement inférieure) de σ , ce qui est équivalent à supprimer σ dans $G(\tilde{P})$.

Démonstration. Les deux triangles supérieurs de σ ne sont des faces que de σ , puisque ce dernier est sans successeur dans $G(\tilde{P})$. Donc l'arête diagonale supérieure de σ n'a qu'une coface maximale qui est le tétraèdre σ (et son link est l'arête diagonale inférieure de σ). On peut donc la collapser, ce qui supprime σ par la même occasion. Le cas sans prédécesseur est similaire. \square

L'idée est donc de réduire progressivement $G(\tilde{P})$ en supprimant des sommets sans successeurs, jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus, ce qui est associé à une suite de collapsés d'arête dans le complexe.

Lemme 8. Le bord de l'enveloppe convexe de \tilde{P} se sépare en une partie "en dessous" de P , la coquille inférieure et une partie "au dessus" de P , la coquille supérieure, les deux constituant cha-

cune une triangulation du disque. La coquille inférieure (respectivement supérieure) est l'ensemble des triangles qui ne sont triangle supérieur (respectivement inférieur) d'aucun tétraèdre.

Démonstration. Le bord de l'enveloppe convexe de \tilde{P} est homéomorphe à une sphère. Lorsqu'on la coupe au niveau du cercle $(p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_0)$, les deux coquilles obtenues sont chacune homéomorphes à un disque, donc sont des triangulations du disque.

Si un triangle est supérieur à un tétraèdre, il ne fait clairement pas partie de la coquille inférieure. Réciproquement si un triangle τ n'est supérieur à aucun tétraèdre, son demi-espace E_τ^- est vide de \tilde{P} : il fait donc partie du bord de l'enveloppe convexe. De plus les points de \tilde{P} se situent dans E_τ^+ , donc τ fait partie de la coquille inférieure. \square

Proposition 1. Dans les conditions du Lemme 5, $\text{Del } \tilde{P}$ se collapse en une triangulation du disque.

Démonstration. On part de $G = G(\tilde{P})$. On supprime itérativement de G tout sommet σ sans successeurs dans G (un tel sommet existe toujours car $G(\tilde{P})$ est un DAG d'après le Lemme 6, et reste un DAG après suppression d'un élément maximal) jusqu'à ce qu'il devienne vide. Chaque suppression dans G correspond à un collapse : on obtient ainsi une séquence de collapses dans $\text{Del } \tilde{P}$ (Lemme 7). Il ne reste que des triangles qui n'étaient supérieurs à aucun tétraèdre (un tel triangle aurait sinon été supprimé lors du collapse associé audit tétraèdre), et qui forment donc d'après le Lemme 8 la coquille inférieure de l'enveloppe convexe de \tilde{P} , et donc une triangulation du disque. \square

5 Implémentations

L'intégralité du code écrit durant le stage l'a été en C++. Les bibliothèques et codes préexistants utilisés sont listés ci-après. Le code est disponible sur le dépôt

<https://github.com/MClemot/Reconstruction>

Le dossier `Data` contient des échantillonnages de surfaces, `SooNodes` du code préexistant (voir ci-dessous) et `SooNodes_AlphaShape` le code que j'ai écrit.

5.1 Outils utilisés

CGAL CGAL (Computational Geometry Algorithms Library) est une bibliothèque de géométrie algorithmique. Elle permet notamment le calcul de triangulation en deux et trois dimensions.

GUDHI GUDHI (Geometry Understanding in Higher Dimensions) est une bibliothèque spécialisée en topologie algorithmique et en analyse topologique des données. Elle dispose d'un module pour le calcul de l' α -complexe. Son module de cohomologie persistante m'a servi à calculer des nombres de Betti. Enfin le module implémentant la structure *skeleton-blocker* (représentation alternative d'un complexe simplicial) dispose d'une fonction pour calculer le link d'un simplexe et permet le stockage facile de flag complexes.

FLTK FLTK (Fast Light Toolkit) est une bibliothèque dédiée à la création d'interfaces graphiques. Elle dispose d'un éditeur WYSIWYG, `fluid`, dont je me suis servi pour faire l'interface pour les expérimentations (voir Figure 15).

SooNodes J'ai utilisé du code préexistant pour la représentation, la gestion et l'affichage via OpenGL d'une scène 3D et des objets qui s'y trouvent.

5.2 Code écrit

Ce que j'ai développé pendant le stage comprend :

- l'interface avec GUDHI pour le calcul de l' α -complexe d'un nuage de points et la mise en place des structures de données pour un affichage rapide lorsqu'on fait varier α (`AlphaComplex.cxx`);

- des structures de données pour l’affichage d’ensembles d’objets (arêtes, boules de rayon variables...);
- le calcul du pôle positif et négatif des cellules de Voronoï d’un nuage de points, à l’aide de CGAL, pour servir dans l’alpha-complexe pondéré (`Voronoi.cxx`);
- le calcul du graphe de proximité pour les k plus proches voisins, à l’aide de CGAL, et de son flag complex, avec la structure Skeleton-Blocker de GUDHI (`Proximity.cxx`);
- l’exécution de l’algorithme 1 (et de variantes pour les expérimentations liées aux séquences de collapses) avec la structure Skeleton-Blocker de GUDHI qui permet le calcul du link (`CollapseSB.cxx`);
- le calcul du link d’un simplexe dans le cadre d’une structure "classique" de complexe simplicial pour exécuter des séquences de collapses sans la structure Skeleton-Blocker de GUDHI (`Collapse.cxx`);
- la génération de points presque cocycliques pour les expérimentations liées à la Section 4.3.

Conclusion

Ce stage aura au final été assez divers : une partie bibliographique (quelques notions générales de géométrie et de topologie, lectures de livres et articles sur le domaine de la reconstruction...); une partie théorique (reconstruction par des boules de rayon variable, collapses vers une triangulation du disque...) et enfin une partie de développement et d’expérimentation (apprentissage des bibliothèques CGAL et GUDHI, implémentation des méthodes de reconstruction, développement d’une interface pour les expérimentations sur les collapses, et expérimentations elles-mêmes).

Du temps a sans doute été perdu au début du stage avec un certain nombre de difficultés liées à l’utilisation des deux bibliothèques CGAL et GUDHI. Cependant l’algorithme de suppression des slivers par des collapses a été une bonne surprise, fonctionnant très bien dans la plupart des cas testés, même si dans des conditions assez spécifiques (surfaces sans bord, choix manuel du α pour avoir le bon type d’homotopie). Par ailleurs, ce qui a été fait dans la Section 4 semble être une bonne piste pour montrer que sous certaines conditions, l’alpha-complexe se collapse en une triangulation de la surface : il reste à relier ce qui a été fait ici à la possibilité de regrouper les points par groupes cocycliques. Enfin, la question de la généralisation en dimension supérieure se pose.

Références

- [AB99] Nina Amenta and Marshall Bern. Surface reconstruction by voronoi filtering. *Discrete & Computational Geometry*, 22(4) :481–504, 1999.
- [AL15] Dominique Attali and André Lieutier. Geometry-driven collapses for converting a čech complex into a triangulation of a nicely triangulable shape. *Discrete & Computational Geometry*, 54(4) :798–825, 2015.
- [ALS12] Dominique Attali, André Lieutier, and David Salinas. Efficient data structure for representing and simplifying simplicial complexes in high dimensions. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 22(04) :279–303, 2012.
- [BE17] Ulrich Bauer and Herbert Edelsbrunner. The morse theory of čech and delaunay complexes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 369(5) :3741–3762, 2017.
- [CL08] Frédéric Chazal and André Lieutier. Smooth manifold reconstruction from noisy and non-uniform approximation with guarantees. *Computational Geometry*, 40(2) :156–170, 2008.
- [CSLV19] David Cohen-Steiner, André Lieutier, and Julien Vuillamy. *Lexicographic optimal chains and manifold triangulations*. PhD thesis, INRIA Sophia-Antipolis Méditerranée, 2019.
- [E⁺01] Herbert Edelsbrunner et al. *Geometry and topology for mesh generation*. Cambridge University Press, 2001.
- [EH10] Herbert Edelsbrunner and John Harer. *Computational topology : an introduction*. American Mathematical Soc., 2010.

A Interface du programme

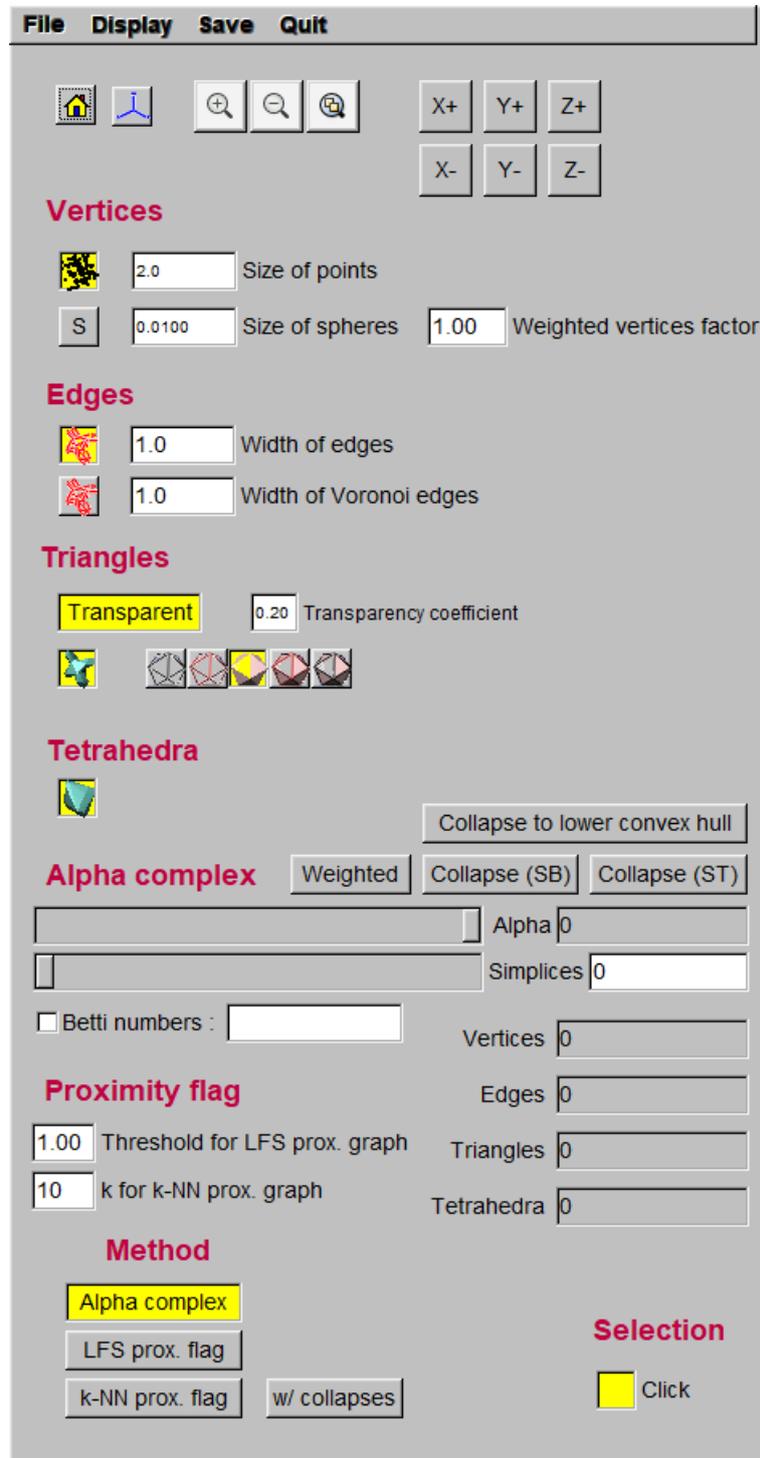


FIGURE 15 – Interface du programme développé pour les expériences du stage.

B Résultats de l'algorithme d'élimination des slivers

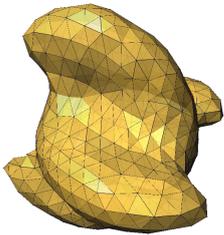
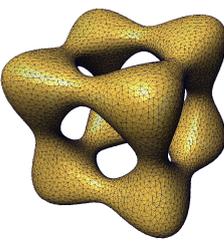
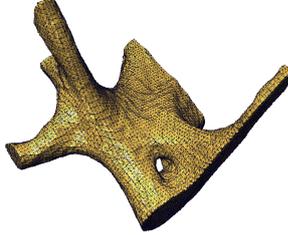
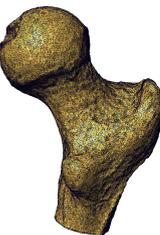
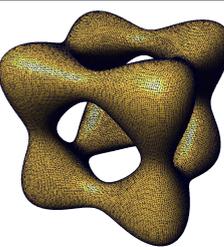
Nom	Points	Image
croissants	542	
helice	1 071	
pillowBox	6 806	
boneSample	11 796	
ballJoint	34 267	
tangledcube	106 608	

TABLE 2 – Résultats produits par l'algorithme 1 pour différents échantillonnages de surface.