

# Lien entre la programmation linéaire tropicale, les jeux à paiement moyen et les jeux de parité

Mattéo Clémot

Juin-juillet 2020

# Équipe d'accueil

- Encadré par Stéphane Gaubert et Xavier Allamigeon
- Équipe Tropical
- INRIA Saclay / CMAP (École Polytechnique)

## 1 Contexte

- Mathématiques tropicales
- Jeux à paiement moyen et jeux de parité

## 2 Liens et double déquantisation

- Programmes linéaires tropicaux et jeux à paiement moyen
- Vers un programme linéaire usuel
- Double déquantisation

## 3 Géométrie des jeux de parité

- Position générale de l'arrangement d'hyperplans
- Intérieur de l'intersection des demi-espaces

# Mathématiques tropicales

- $(G, +, \leq)$  un groupe totalement ordonné
- $\mathbb{T} = G \cup \{0\}$  où  $0$  nouvel élément inférieur à tous ceux de  $G$
- Semi-anneau  $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$  où  $\oplus = \max$  et  $\odot = +$
- Exemple :  $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

# Ensemble signé

- Ensemble signé  $\mathbb{T}_{\pm}$  : deux copies  $\mathbb{T}$  et  $\ominus\mathbb{T}$  qui coïncident en  $0 = \ominus 0$
- Multiplication tropicale signée :  $x \odot y$  nombre tropical signé de module  $|x| + |y|$  et de signe  $\text{sgn}(x)\text{sgn}(y)$   
Exemple :  $(\ominus 2) \odot 3 = \ominus 5$ ,  $(\ominus 2) \odot (\ominus 3) = 5$
- Addition tropicale signée :  $x \oplus y$  nombre tropical signé de module  $\max\{|x|, |y|\}$  et de signe le signe de l'élément maximal  
Exemple :  $(\ominus 2) \oplus 3 = 3$ ,  $2 \oplus (\ominus 3) = \ominus 3$

# Séries formelles

- $(G, +, \leq)$  un groupe abélien totalement ordonné,  $\mathbb{K}$  un corps
- $\mathbb{K}[[t^G]]$  : *séries de Hahn* à exposants dans  $G$  et à coefficients dans  $\mathbb{K}$

$$\mathbf{x} = \sum_{\alpha \in \Lambda} \mathbf{x}_\alpha t^\alpha$$

où l'opposé du support  $\Lambda \subset G$  est bien ordonné

- Addition et multiplication usuelles des séries formelles

# Valuation

- *Valuation* :  $\text{val}(\mathbf{x})$  pour  $\mathbf{x} \neq 0$  est le plus grand exposant dans  $(G, \leq)$
- On pose  $\text{val}(0) = 0$
- On a :

$$\begin{aligned}\text{val}(\mathbf{xy}) &= \text{val}(\mathbf{x}) \odot \text{val}(\mathbf{y}) \\ \text{val}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &\leq \text{val}(\mathbf{x}) \oplus \text{val}(\mathbf{y})\end{aligned}$$

- *Coefficient dominant*  $\text{lc}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{\text{val}(\mathbf{x})}$  : série *positive* si  $\text{lc}(\mathbf{x}) \geq 0$
- *Valuation signée* :

$$\text{sval}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \text{val}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \geq 0 \\ \ominus \text{val}(\mathbf{x}) & \text{sinon} \end{cases}$$

# Jeux

- Deux joueurs  $J_0, J_1$
- Graphe orienté biparti  $\mathcal{G} = (V_0 \sqcup V_1, E)$ ,  $V_i$  représente les états de  $J_i$
- Un coup de  $J_i$  : peut se déplacer de  $u \in V_i$  vers  $v \in V_{i-1}$  si  $(u, v) \in E$ , c'est à l'autre de jouer
- Une partie : un chemin infini dans  $\langle v_0, v_1, \dots \rangle \in V^{\mathbb{N}}$  dans le graphe  $\mathcal{G}$
- Hypothèse de non-blocage



# Condition de victoire : jeux de parité

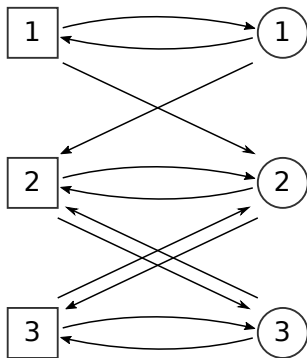


Figure: Jeu de parité

- Fonction de priorité sur les sommets  $p : V \rightarrow \mathbb{N}$
- Parité de la plus grande priorité apparaissant une infinité de fois :

$$\max(\text{Inf}(p(v_0), p(v_1), \dots))$$

- $J_0$  gagne si et seulement si elle est paire

# Condition de victoire : jeux à paiement moyen

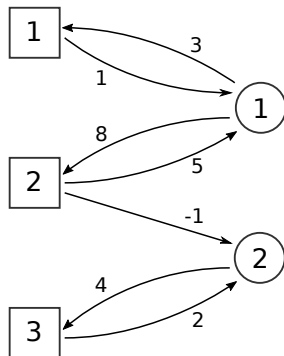


Figure: Jeu à paiement moyen

- Fonction de coût sur les arêtes  $w : E \rightarrow \mathbb{Z}$ , représentant ce que chaque joueur gagne ou perd à chaque coup joué en empruntant une arête
- Paiement moyen

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i w(v_i, v_{i+1})$$

- $J_0$  gagne si et seulement si le paiement moyen est positif

# Réduction

- Marcin Jurdziński en 1998 : réduction des jeux de parité aux jeux à paiement moyen
- $\mathcal{J}$  jeu de parité sur le graphe  $\mathcal{G} = (V_0 \sqcup V_1, E)$  muni d'une fonction de priorité  $p$
- $\mathcal{K}$  jeu à paiement moyen sur le même graphe  $\mathcal{G}$  et de fonction de coût  $w$  donnée par

$$w((u, v)) = \begin{cases} (-s)^{p(u)} & \text{si } u \in V_0 \\ -(-s)^{p(u)} & \text{si } u \in V_1 \end{cases} \in \mathbb{R} \{\{s^{\mathbb{Q}}\}\}.$$

## Réduction

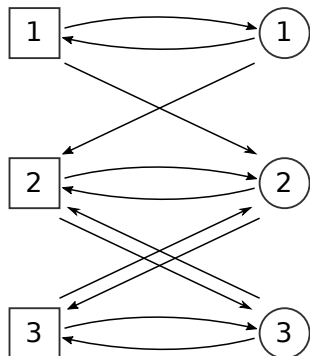


Figure: Jeu de parité

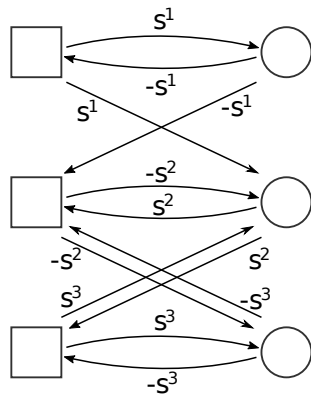


Figure: Jeu à paiement moyen à paiements dans les séries formelles issu du jeu de parité

# Complexité algorithmique

- Résolution d'un jeu à paiement moyen : **NP**  $\cap$  **coNP** ; un algorithme pseudo-polynomial en temps est connu
- Calude et al. en 2017 : résolution d'un jeu de parité résolu en temps quasi-polynomial :  $n^{\mathcal{O}(\sqrt{n})}$  vers  $\mathcal{O}(n^{\log(m)+6})$  où  $m$  est le nombre de priorités distinctes

## Cône tropical polyhédrique

- $A, B \in \mathbb{T}^{m \times n} : \{x \in \mathbb{T}^n \mid A \odot x \leq B \odot x\}$
- Exemple dans  $\mathbb{R}_{\max}$  :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -\infty \\ 8 & -\infty \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -\infty \\ 5 & -1 \\ -\infty & 3 \end{bmatrix}$$

donnent

$$\begin{cases} 3 + x_1 \leq 1 + x_1 \\ 8 + x_1 \leq \max\{5 + x_1, -1 + x_2\} \\ 1 + x_2 \leq 3 + x_2 \end{cases}$$

## Jeu à paiement moyen associé

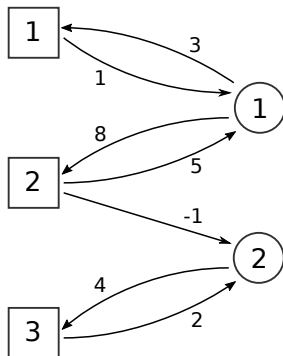


Figure: Jeu à paiement moyen associé à  $A$  et  $B$ .

- $J_0$  / Max possède  $m$  états,  $J_1$  / Min possède  $n$  états
- Max peut jouer de  $i \in I$  vers  $j \in J$  si  $B_{ij}$  fini, et reçoit un paiement de  $B_{ij}$
- Min peut jouer de  $j \in J$  vers  $i \in I$  si  $A_{ij}$  fini, et reçoit un paiement de  $A_{ij}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -\infty \\ 8 & -\infty \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -\infty \\ 5 & -1 \\ -\infty & 3 \end{bmatrix}$$

# Équivalence

## Théorème

Dans un jeu à paiement moyen donné par deux matrices tropicales  $A$  et  $B$ , un état  $j \in [n]$  est gagnant pour le joueur Max si et seulement s'il existe une solution  $x \in \mathbb{T}^n$  du système d'inégalités  $A \odot x \leq B \odot x$  telle que  $x_j \geq 0$ .



# Programme linéaire tropical

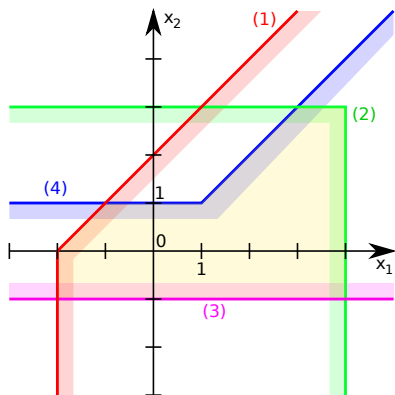


Figure: Exemple de polyèdre tropical  $\mathcal{P}(A, b)$

Soit  $\mathbb{T} = \mathbb{T}(G)$ . Soient  $A \in \mathbb{T}_{\pm}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{T}_{\pm}^m$  et  $c \in \mathbb{T}^n$ . On considère un programme linéaire tropical  $\text{LP}(A, b, c)$  sur  $\mathbb{T}_{\pm}$  :

$$\begin{aligned} \min \quad & c \odot x \\ \text{s.t.} \quad & x \in \mathcal{P}(A, b) \end{aligned}$$

# Programme linéaire

## Théorème

On peut trouver  $\mathbf{A} \in \text{sval}^{-1}(A)$ ,  $\mathbf{b} \in \text{sval}^{-1}(b)$ ,  $\mathbf{c} \in \text{sval}^{-1}(c)$  et former un programme linéaire usuel  $\mathbf{LP}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  sur  $\mathbb{R}[[t^G]]$  :

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \end{array}$$

où  $\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}[[t^G]]^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \geq 0\}$ , tels que :

- $\text{sval}(\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b})) = \mathcal{P}(A, b)$ . En particulier,  $\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$  si et seulement si  $\mathcal{P}(A, b) \neq \emptyset$  ;
- la valuation d'une solution optimale du programme linéaire  $\mathbf{LP}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  dans les séries de Hahn est solution optimale du programme linéaire tropical  $\mathbf{LP}(A, b, c)$ .

# Double déquantisation

Deux réductions successives

- jeux de parité  $\xrightarrow{\text{val}_1}$  jeux à paiement moyen
- programme linéaire tropical  $\xrightarrow{\text{sval}_2}$  programme linéaire

Ensemble	$\left( \mathbb{R} \left[ \left[ t^{\mathbb{R} \{ \{ s^{\mathbb{Q}} \} \} } \right] \right] \right)_{\geq 0}$	$\mathbb{T}(\mathbb{R} \{ \{ s^{\mathbb{Q}} \} \})$	$\mathbb{S}(\mathbb{Q})$
Lois	$(+, \cdot)$	$(\oplus, \odot)$ $= (\max, +)$	$(\oplus_2, \odot_2)$ $= (\oplus_2, \oplus_{\mathbb{Q}})$
Coefficients de	LP	MPG/TLP	PG

# Permanent et position générale

- Permanent d'une matrice tropicale :

$$\text{tper}(M) = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \bigodot_{i=1}^n |M_{i\sigma(i)}| = \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{i=1}^n |M_{i\sigma(i)}|$$

- $M \in \mathbb{T}_{\pm}^{n \times n}$  *tropicalement singulière* lorsque  $\text{tper}(M) = 0$  ou lorsque le maximum est atteint au moins deux fois
- $M \in \mathbb{T}_{\pm}^{m \times n}$  est *tropicalement générique* lorsque pour toute sous-matrice carrée  $W$  de  $M$ ,  $\text{tper}(W) = 0$  ou  $W$  est tropicalement non-singulière

# Hyperplan tropical

- *Hyperplan tropical* déterminé par un vecteur  $u \in \mathbb{T}^n - \{0\}$  : ensemble des  $x \in \mathbb{T}^n$  tels que le maximum

$$\max_{i \in [n]} (u_i + x_i)$$

est atteint au moins deux fois

- Famille de  $m$  hyperplans tropicaux  $(H^1, \dots, H^m)$  dirigés par des vecteurs  $(u^1, \dots, u^m) \in (\mathbb{T}^n)^m$  en position générale lorsque  $[u^1 | \dots | u^m] \in \mathbb{T}^{n \times m}$  tropicalement générique

# Résultat

- Cône tropical polyédrique  $A \odot x \leq B \odot x$ .
- On y associe les hyperplans tropicaux  $H^i$  associés aux  $c^i$  où  $c_j^i = \max\{a_{ij}, b_{ij}\}$

## Proposition

Si un jeu à paiement moyen est issu d'un jeu de parité avec des paiements tous distincts, alors l'arrangement d'hyperplans tropicaux associé est en position générale.

# Décomposition en stratégie

## Proposition

Soit un jeu à paiement moyen issu d'un jeu de parité, dont tous les paiements sont distincts. Alors le jeu est gagnant si et seulement si l'intersection des demi-espaces signés est d'intérieur non vide.

- Décomposition en stratégies  $\sigma \in J'$  pour Max
- Pour montrer que  $V = \{x \in \mathbb{T}^n, x \leq Tx\}$  est d'intérieur non vide : montrer qu'il existe  $\sigma$  telle que  $V_\sigma = \{x \in \mathbb{T}^n, x \leq T^\sigma x\}$  est d'intérieur non vide
- Inégalités dans  $\mathbb{T}_\pm$  de la forme  $x \leq C \oplus y$

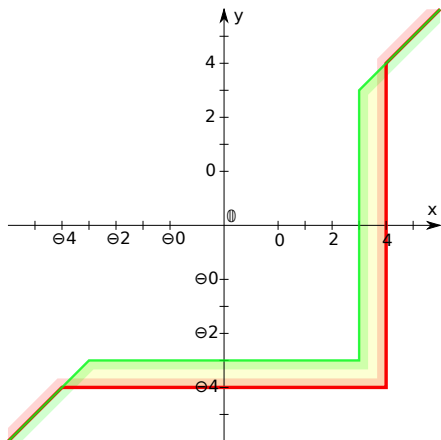


Figure:  $x \geq y \oplus 3$  (vert) et  $x \leq y \oplus 4$  (rouge). L'intérieur de l'intersection, non vide, est colorié en jaune.

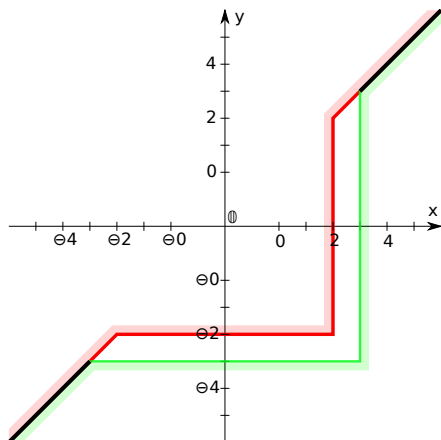


Figure:  $x \geq y \oplus 3$  (vert) et  $x \leq y \oplus 2$  (rouge). Leur intersection (en noir) est non vide, mais son intérieur l'est.



# Conclusion