Reconstruction de surfaces à l'aide du complexe de Delaunay

Mattéo Clémot

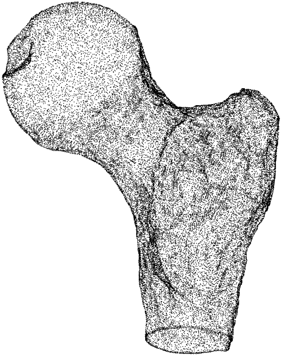
Avril-juillet 2021

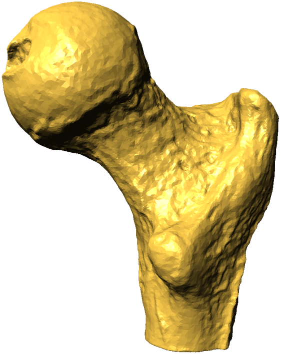
Équipe d'accueil

- Encadré par Dominique Attali
- Équipe GAIA (Géométrie, Apprentissage, Information et Algorithmes) au GIPSA-lab à Grenoble

Objectif

Échantillonage d'une surface (bruité ou non) $\longrightarrow$ Triangulation de la surface

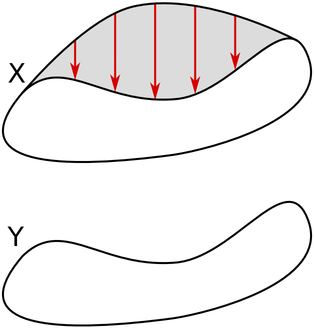




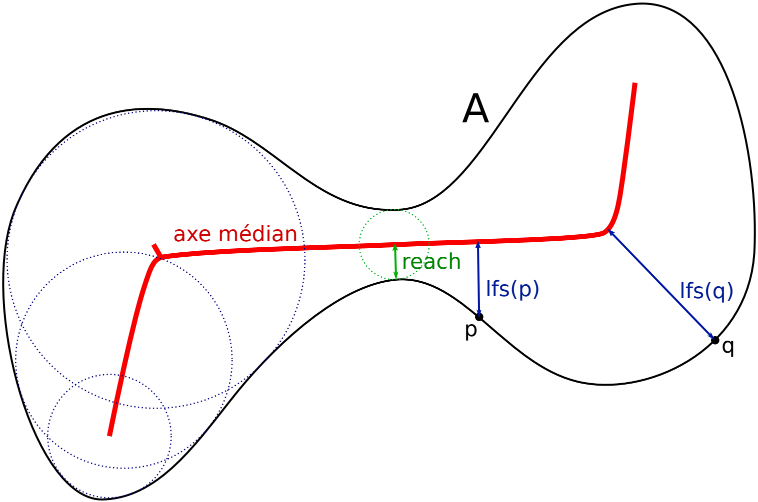
Contrainte

- Contrainte géométrique : approcher au mieux la surface en distance
- Contrainte topologique : avoir la même topologie que la surface (y être homéomorphe, ou de façon moins restrictive, avoir le même type d'homotopie)

Type d'homotopie



Caractéristiques géométriques de la surface



Théorème de reconstruction

Définition : α-offset

$$P^{\oplus\alpha} = \bigcup_{p \in P} B(p, \alpha)$$

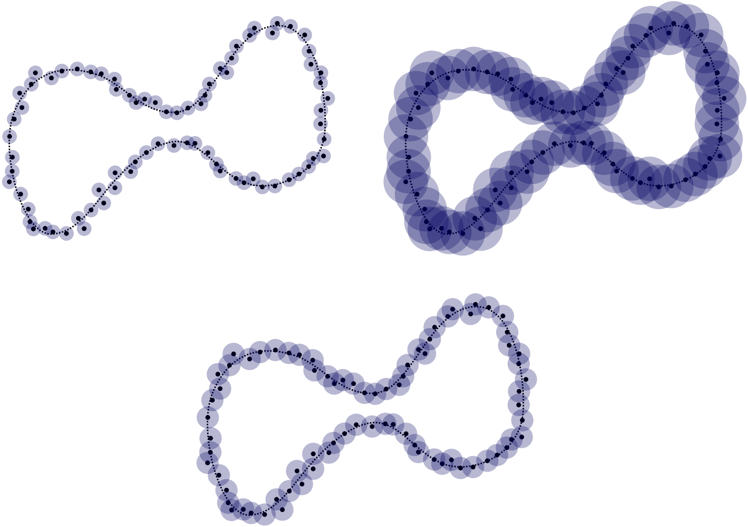
Théorème de reconstruction

Soit A un compact de $\mathbb{R}^d$ de reach strictement positif. Soit P un compact de $\mathbb{R}^d$ tel qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $d_H(A, P) \leq \varepsilon < (3 - \sqrt{8})\,\mathrm{reach}(A)$. Alors $P^{\oplus\alpha}$ se rétracte par déformation sur A pour tout

$$\alpha \in \left[(2 + \sqrt{2})\varepsilon, \mathrm{reach}(A) - (3 + \sqrt{2})\varepsilon\right].$$

En particulier, sous ces conditions, A et $P^{\oplus\alpha}$ ont le même type d'homotopie.

Théorème de reconstruction



Reconstruction non uniforme

Définition : offset non-uniforme

Fonction de rayon :

$$\begin{aligned} r : P &\to \mathbb{R}_+^* \\ p &\mapsto \alpha_p \,\mathrm{lfs}(\Pi_A(p)) \text{ où } \alpha_p \in]0,1[. \end{aligned}$$

Reconstruction non uniforme :

$$P^{\oplus r} = \bigcup_{p \in P} B(p, r(p))$$

- Théorème de reconstruction similaire ?
- Travail sur des cas particuliers ($\alpha_p = \beta \in]0,1[$)

Complexe simplicial

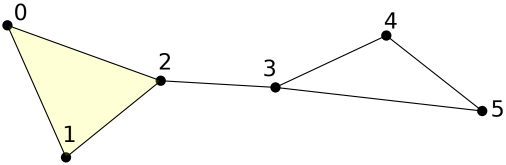
Définition : complexe simplicial géométrique

Un ensemble K de simplexes tel que :

- si $\sigma \in K$ et τ est une face de σ, alors $\tau \in K$;
- si $\sigma, \sigma' \in K$, alors $\sigma \cap \sigma'$ est soit vide, soit une face commune à σ et σ'.

Définition : complexe simplicial abstrait

Un ensemble fini A d'ensembles stable par sous-ensemble, c'est-à-dire tel que si $\alpha \in A$ et $\beta \subset \alpha$ alors $\beta \in A$.



$$\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\},\\ \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{2,3\},\\ \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\},\\ \{0,1,2\}\}$$

Complexe de Delaunay

Diagramme de Voronoï

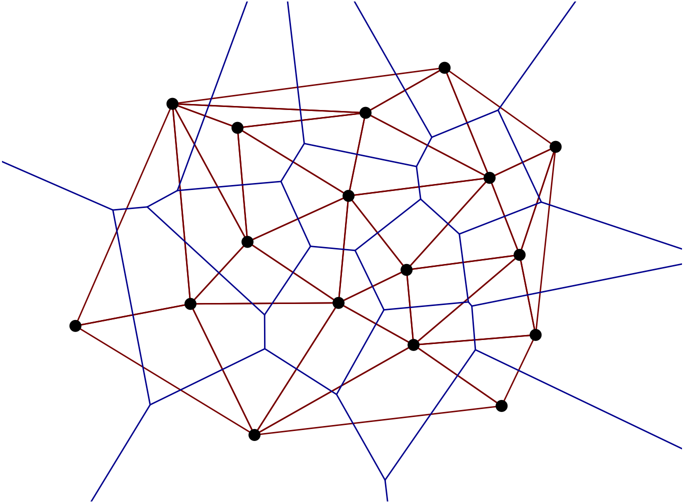
Cellule de Voronoï d'un *site* u dans P :

$$V_u = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall v \in P, \|x - u\| \leq \|x - v\|\}$$

Complexe de Delaunay

$$\mathrm{Del}(P) = \left\{ \sigma \subset P \mid \bigcap_{u \in \sigma} V_u \neq \emptyset \right\}.$$

Complexe de Delaunay



Alpha-complexe

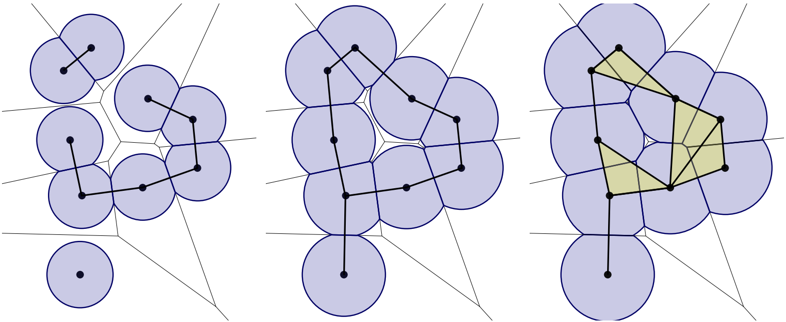
Outil utilisé pour construire un complexe approchant la surface : l'α-complexe.

- le nerf de l'ensemble des boules de rayon α centrées en les points $p \in P$, intersectées avec la cellule de Voronoï V_p associée à leur centre p :

$$K_\alpha(P) = \left\{ \sigma \subset P \mid \bigcap_{p \in \sigma} (V_p \cap B(p, \alpha)) \neq \emptyset \right\}$$

- théorème du nerf : $K_\alpha(P)$ a le même type d'homotopie que l'union des boules $P^{\oplus \alpha}$.

Alpha-complexe



Alpha-complexe d'un échantillon d'une surface

Star et link d'un simplexe

Définition : star d'un simplexe τ

L'ensemble des cofaces d'un simplexe

$$\mathrm{St}\,\tau = \{\sigma \in K \mid \tau \leq \sigma\}.$$

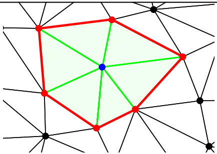
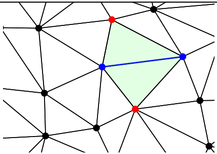
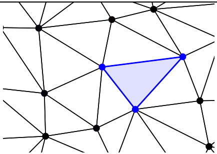
Clôture $\overline{\mathrm{St}}\,\tau$: plus petit complexe simplicial contenant $\mathrm{St}\,\tau$.

Définition : link d'un simplexe τ

Ensemble des simplexes de $\overline{\mathrm{St}}\,\tau$ n'intersectant pas τ.

$$\begin{aligned}\mathrm{Lk}\,\tau &= \{\sigma \in \overline{\mathrm{St}}\,\tau \mid \sigma \cap \tau = \emptyset\} \\ &= \overline{\mathrm{St}}\,\tau \setminus \mathrm{St}\,\tau.\end{aligned}$$

Topologie du link dans une triangulation de surface

Dimension	Figure	Description	β_0	β_1	β_2
0		homéomorphe à un cercle	1	1	0
1		deux points	2	0	0
2		vide	0	0	0

Objectif

- éliminer les simplexes dont le link n'est pas caractéristique d'une surface ;
- conserver le type d'homotopie du complexe ;
- on introduit l'opération de *collapse*.

Collapse

Collapse

Soit K un complexe simplicial. Un *collapse* dans K est la suppression d'un intervalle $[\tau, \sigma] = \{\gamma \in K \mid \tau \subset \gamma \subset \sigma\}$ non réduit à un singleton, c'est-à-dire pour lequel $\tau \neq \sigma$, et où σ est maximal.

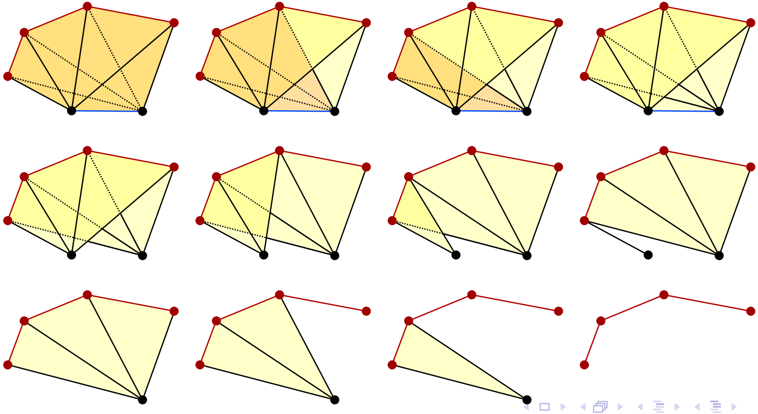
Lemme

Un collapse conserve le type d'homotopie.

Équivalence suppression/collapse

Lemme

La suppression de toutes les cofaces d'une arête dont le link est collapsible correspond à une séquence de collapses.



Algorithme d'élimination des slivers par collapses

Algorithm 1: Élimination des slivers par suppressions successives.

Q une file de priorité contenant les simplexes σ de K de link $\operatorname{Lk}_K \sigma$ collapsible;

while $Q \neq \emptyset$ **do**

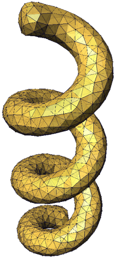
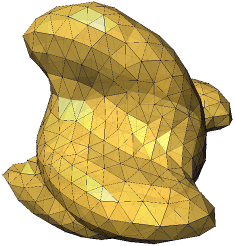
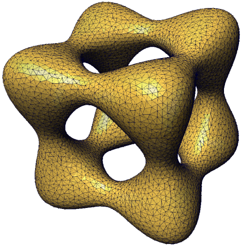
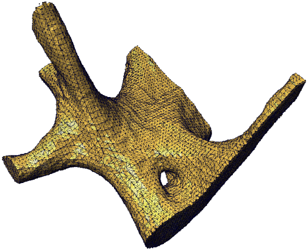
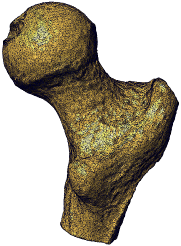
- $L = \operatorname{Lk}_K \sigma$;
- $S = \operatorname{St}_K \sigma$;
- supprimer de K tous les simplexes de S;
- supprimer de Q tous les simplexes de S;
- ajouter à Q tous les simplexes τ de L tels que $\operatorname{Lk}_K \tau$ est collapsible;

end

Remarques

- Pas de preuve qu'il fonctionne dans tous les cas.
- Nécessite une variété sans bord.
- Conserve le type d'homotopie lors de la suppression des slivers (équivalence avec les collapses) : si α est bien choisi en entrée, la type d'homotopie retourné est le bon.
- En pratique, fonctionne très bien sur les échantillons testés.

Tests sur des échantillons

État de l'art

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rips}(P,\alpha) \arrow[r, rightsquigarrow] & \check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}(P,\alpha) \arrow[r, hook] \arrow[d, rightsquigarrow] & \check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}_A(P,\alpha) \arrow[dr, leftrightarrow, bend left, "\simeq"] & \\
& K_\alpha(P) \arrow[r, rightsquigarrow, "?"] \arrow[d, leftrightarrow, "\simeq"] & \mathrm{triangulation}(A) \arrow[r, leftrightarrow, "\approx"] & A \\
& P^{\oplus\alpha} \arrow[urr, hook, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

Objectif

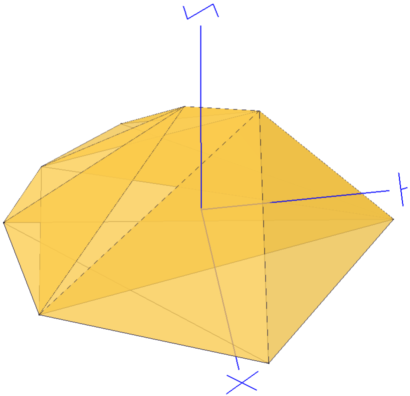
Question

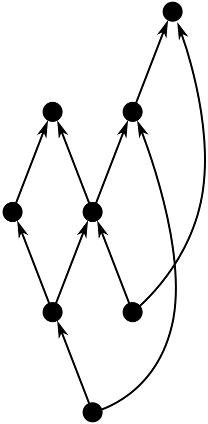
Trouver une valeur de α telle que $K_\alpha(P)$ se collapse en une triangulation de la surface.

Problème simplifié et très partiel

Soient P un ensemble de points presque cocycliques. Montrer que $\operatorname{Del} P$ se collapse en une triangulation du disque.

Preuve





Implémentation des méthodes et expérimentations

CGAL

गुढी GUDHI Geometry Understanding in Higher Dimensions

Conclusion