

# LP22 – RÉTROACTION ET OSCILLATIONS

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : PSI

## Bibliographie

- ⚡ *Électromagnétisme, fondements et applications*, **Perez**
- ⚡ *Optique, une approche expérimentale et pratique*,  
**Houard**

## Prérequis

➤

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Le dipôle oscillant</b>	<b>2</b>
1.1	Cadre de l'étude et hypothèses . . . . .	2
1.2	Calcul du champ rayonné . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Point de vue énergétique</b>	<b>4</b>
2.1	Vecteur de Poynting et puissance rayonnée . . . . .	4
2.2	Réflexion sur un diélectrique : angle de Brewster . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Rayonnement de la matière</b>	<b>6</b>
3.1	Modèle de l'électron élastiquement lié . . . . .	7
3.2	Diffusion Rayleigh . . . . .	7

## Remarques sur les leçons précédentes

- **2017** : La leçon ne doit pas se réduire à une suite de calculs.
- **2015** : Le sens physique des approximations réalisées, ainsi que les propriétés de symétrie des champs électrique et magnétique rayonnés, doivent être discutés. Cette leçon peut également être l'occasion de réfléchir à la stabilité de la matière.
- **2014** : Certains candidats utilisent un modèle faisant intervenir une charge électrique variable, ce qui ne semble pas très réaliste. Cette leçon ne doit pas être exclusivement technique et doit être l'occasion de discussions physiques poussées.

Pas beaucoup de retours sur cette leçon mais ce qui revient souvent c'est que c'est une leçon très calculatoire et que ça manque de contextualisation et de physique. Pas hésiter à sauter certains calculs et à juste donner le résultat. Perso j'aime bien l'idée de parler de l'angle de Brewster et de la diffusion Rayleigh, c'est quand même plus marrant que le rayonnement d'antenne.

## 1 Le dipôle oscillant

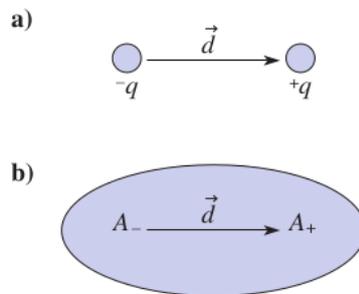
### 1.1 Cadre de l'étude et hypothèses

*Hprépa pour le tout début et sinon c'est bcp le calcul de la leçon de Coentini un peu remanié, mais globalement toruuable soit dans le poly de Jérémy soit dans le Pérez*

On peut voir un dipôle comme un couple de charges  $q$  ponctuelles opposées et séparées d'une distance  $d$ . Le cas de l'atome d'hydrogène avec le noyau chargé positivement et l'électron chargé négativement en est un parfait exemple. Son moment dipolaire est alors :

$$\vec{p} = q\vec{d} \quad (1)$$

Il est orienté de la charge négative vers la charge positive. Un peu plus généralement, une entité neutre possédant deux barycentres de charges positives et négatives disjoints possèdent de la même manière un moment dipolaire. Enfin, on peut aussi définir un moment dipolaire pour tout ensemble discret de charges globalement neutre.



Même si de nombreux systèmes physiques correspondent déjà à l'une de ces trois descriptions, l'intérêt de l'étude des dipôles est encore plus grand car comme on l'a vu dans le cadre du développement multipolaire, toute répartition de charge peut être approchée par un développement dont le deuxième terme est un dipôle. Pour rester général, on considèrera dans la suite un système modèle entièrement caractérisé par son moment dipolaire  $\vec{p}(t)$

On utilisant les équations de Maxwell et la jauge de Lorenz (à ne pas faire mais à savoir faire), on peut montrer que le potentiel vecteur associé à une distribution de courant  $\vec{j}$  obéit à l'équation suivante :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (2)$$

De la même manière que dans le cas du potentiel scalaire, il est possible de résoudre cette équation grâce à la fonction de Green du d'Alembertien et on obtient alors l'équation des potentiels dits retardés :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (3)$$

Montrer pourquoi retardé. C'est une expression totalement générale tant que l'on suppose que les charges ont un mouvement non relativiste, ce qui constitue notre première hypothèse. On se propose de la simplifier dans la suite pour étudier le champ rayonné par un dipôle.

**Approximation dipolaire** On considère que l'on observe le champ à une distance du dipôle très grande devant la taille de ce dernier, soit  $a \ll r$ . Pas étonnant, c'est ce qu'on a toujours fait dans le cas de l'étude d'un dipôle. Dans l'expression intégrale du potentiel on a donc  $r \ll r'$  :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2} \simeq r \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right) \quad (4)$$

Si on passe en description discrète, et qu'on développe ce dénominateur à l'ordre 1 on a alors simplement (comme en optique avec la diffraction) :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_{i \in \mathcal{D}} q_i \mathbf{v}_i \left( \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \quad (5)$$

**ARQS des sources** Il s'en suit, d'après le DVL précédent :

$$\mathbf{v}_i \left( t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) = \mathbf{v}_i \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \left( t - \frac{r}{c} \right) \frac{|\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'|}{rc}$$

En ordre de grandeur, si on compare les deux termes, on a  $\sim V + \frac{V}{T} \frac{a}{c}$  donc il faut faire l'hypothèse ARQS des sources :  $a \ll cT$ . L'hypothèse d'ARQS des sources, c'est supposer que les retards pour les différents points de la source sont identiques (c'est de la cohérence spatiale en gros nan ?) En posant  $t' = t - \frac{r}{c}$  :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_{i \in \mathcal{D}} q_i \mathbf{v}_i(t')$$

On reprend alors la définition du moment dipolaire vu en électrostatique :  $\mathbf{P} = \sum_{i \in \mathcal{D}} q_i \mathbf{r}'_i(t')$ , soit :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{P}} \quad \dot{\mathbf{P}}(t') = \frac{d\mathbf{P}(t')}{dt'}$$

Faire un rapide résumé des trois hypothèses pour récupérer les esprits après ce calcul.

⚡ Le potentiel vecteur c'est bien mais bon nous on est comeme plus à l'aise avec les champs

## 1.2 Calcul du champ rayonné

*Pérez p. 375 ou poly de Jeremy si on veut des précisions mais moi j'aime bien comme ça*

On obtient  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$  puis on obtient  $\mathbf{E}$  par Maxwell-Faraday, ou par la jauge de Lorenz. Pour fixer les notations, on prend le dipôle selon  $e_z$  :

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} = \nabla \wedge \left( \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{P}} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \wedge \left( \frac{1}{r} \dot{P} \mathbf{e}_z \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_r \left( \frac{1}{r} \dot{P} \right) \wedge \mathbf{e}_z$$

On change les variables du gradient (je pense que c'est pas à présenter, juste donner le résultat sinon ça devient lourd) :

$$\nabla_r = \begin{pmatrix} \partial_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } t' = t - \frac{r}{c} \Rightarrow r = c(t - t') \Rightarrow \partial_r = \frac{-1}{c} \partial_{t'} \quad \text{donc} \quad \partial_r \dot{P} = -\frac{1}{c} \partial_{t'} \dot{P}(t') = -\frac{1}{c} \ddot{P}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{r^2} \dot{P} - \frac{1}{rc} \ddot{P} \right\}_{t'} \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_z$$

Finalement, en coordonnées sphériques on a :

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sin \theta \left\{ \frac{\dot{P}}{r} + \frac{\ddot{P}}{c} \right\} (t') \mathbf{e}_\Phi$$

$$\mathbf{E}(t) = \frac{\cos \theta}{2\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{P}{r^3} + \frac{\dot{P}}{r^2 c} \right\} (t') \mathbf{e}_r + \frac{\mu_0}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{P}{r^3} + \frac{\dot{P}}{r^2 c} + \frac{\ddot{P}}{rc^2} \right) (t') \mathbf{e}_\theta$$

Les expressions obtenues sont complexes, on va donc considérer un cas limite en champ lointain lorsque l'on se situe dans la zone de rayonnement i.e.  $a \ll c\tau \ll r$ . La distance d'observation est alors très grande et donc on ne peut plus négliger le retard induit par la propagation :

$$\mathbf{B}(M, t) \simeq \frac{\mu_0 \ddot{p}(t') \sin \theta}{4\pi cr} \mathbf{e}_\varphi \quad , \quad \mathbf{E}(M, t) \simeq \frac{\mu_0 \ddot{p}(t') \sin \theta}{4\pi r} \mathbf{e}_\theta \quad (6)$$

NB : je trouve inutile de présenter le résultat en champ proche car c'est rajouter des formules compliquées en plus pour ne rien dire dessus, mais si souhaité on peut les retrouver p105 du poly de Jérémy.

Bon voilà bcp de calculs, bcp d'approximations... Quelle est la physique du résultat ? Les champs rayonnés dans la zone de rayonnement possèdent des caractéristiques particulières et très intéressantes :

- Ils décroissent lentement en  $1/r$  là où le champ d'une charge ponctuelle décroît en  $1/r^2$ , hmmm ça peut télécommuniquer ça
- ils sont anisotropes, la propagation se fait dans une direction privilégiée orthogonale au dipôle (peut-être parler de l'anecdote de la voiture télécommandée, il faut placer l'antenne perpendiculaire à la direction télécommande-voiture mais ça nécessite d'avoir fait le rapprochement antenne-dipole avant.)
- On a une propagation à la vitesse de la lumière (contenue dans le  $t'$ )
- localement on a une structure d'onde plane (d'autant plus qu'on est loin de la source dans notre cadre d'étude)
- Si le dipôle est statique où évolue linéairement on a rien de rayonné, c'est l'accélération des charges qui rayonne !

## 2 Point de vue énergétique

### 2.1 Vecteur de Poynting et puissance rayonnée

*Perez p379*

Le vecteur de Poynting  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t)$  est défini comme le vecteur dont le flux à travers la surface  $d\mathbf{S}$  indique la puissance transmise à  $V$  à travers cette surface. Pour une onde plane il est défini par

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \quad (7)$$

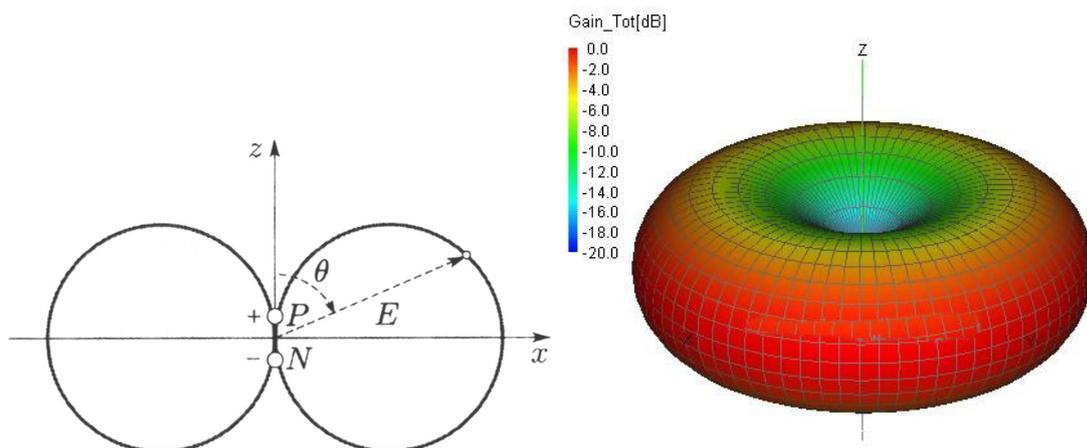
Dans le cas du rayonnement dipolaire à grande distance, on trouve directement

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) = \frac{\ddot{p}^2(t') \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \mathbf{e}_r \quad (8)$$

Ainsi  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t)$  varie comme  $\frac{1}{r^2}$  et  $\sin^2 \theta$  ; Le rayonnement est par conséquent nul suivant l'axe du dipôle et maximal suivant toute direction contenue dans le plan  $Oxy$ .

Le diagramme de rayonnement consiste à tracer la fonction :

$$F(\theta, \varphi) = \frac{\|\mathbf{\Pi}(r, \theta, \varphi, t')\|}{\|\mathbf{\Pi}_{\max}(r, \theta_{\max}, \varphi_{\max}, t')\|}$$



Utilisons l'expression de  $\Pi(\mathbf{r}, t)$  pour calculer la puissance  $\mathcal{P}$  rayonnée par le dipôle. Celle-ci correspond aux flux de  $\Pi$  à travers une sphère de rayon  $r$  centrée en  $O$ .

$$\mathcal{P}(t) = \oiint_{\text{sphère}} \Pi(\mathbf{r}', t') \cdot d\mathbf{S} = \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi r^2 \sin\theta \frac{\ddot{p}^2(t) \sin^2\theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} = \frac{\ddot{p}^2(t)}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \sin^3\theta \quad (9)$$

$$\mathcal{P}(t) = \frac{\ddot{p}^2(t)}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad (10)$$

Notons que  $\mathcal{P}$  ne dépend pas de  $r$ , ce qui était prévisible en raison de la conservation de l'énergie EM dans la vide. Cette puissance est une caractéristique du dipôle émetteur.

Par exemple pour une charge isolée

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{OP}(t)q \quad (11)$$

et en prenant une accélération unidirectionnelle

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) = q\ddot{z}(t)\mathbf{e}_z = qa(\mathbf{r}, t')\mathbf{e}_z \quad (12)$$

Ainsi une charge accélérée rayonne de la puissance et c'est pourquoi le modèle planétaire de Bohr ne peut pas marcher dans ce cas là.

↓ Utilisons

## 2.2 Réflexion sur un diélectrique : angle de Brewster

*Houard p266, Hecht p362* Soit une onde lumineuse plane incidente arrivant sur un interface séparant deux milieux transparents d'indices  $n_1$  et  $n_2$ . Il est possible d'éteindre le rayon réfléchi par un diélectrique si le champ électrique incident appartient au plan d'incidence. En revanche si le champ électrique du rayon incident est perpendiculaire au plan d'incidence, impossible d'éteindre le rayon réfléchi. On peut expliquer cette différence grâce au dipôle oscillant.

Le champ électrique incident excite les électrons du milieu 2, qui se mettent à osciller sous l'effet du champ électromagnétique, devenant des dipôles oscillant émettant le rayonnement étudié précédemment. Une partie de cette énergie réémise apparaît sous la forme d'une onde réfléchie. Les dipôles induits par  $\vec{E}_{t\perp}$  oscillent dans sa direction donc perpendiculairement au plan d'incidence. La puissance rayonnée dans la direction du rayon réfléchi, contenu dans le plan d'incidence n'est donc jamais nulle., et donc  $\vec{E}_{r\perp}$  n'est jamais nul. En revanche, les dipôles générés par  $\vec{E}_{t\parallel}$  oscillent dans le plan d'incidence dans lequel est contenu le rayon réfléchi et il existe un angle d'incidence appelé angle de Brewster pour lequel  $\vec{E}_{t\parallel}$  et  $\vec{E}_{r\parallel}$  sont colinéaires. Alors la puissance rayonnée par les dipôles générés par  $\vec{E}_{t\parallel}$  est nulle dans la direction du rayonnement incident, donc  $\vec{E}_{r\parallel}$  est nul.

On peut établir l'expression des coefficients de réflexion correspondant au cas où  $\vec{E}_i = \vec{E}_{i\parallel}$  ou  $\vec{E}_i = \vec{E}_{i\perp}$  grâce aux conditions de continuité données par les équations de Maxwell dans la matière et établir l'expression de l'angle de Brewster  $i_B$  en fonction des indices des milieux.

**Montrer les courbes du .py (à retoucher il actualise pas la transparence du rayon réfléchi en fonction de l'angle c'est dommage**

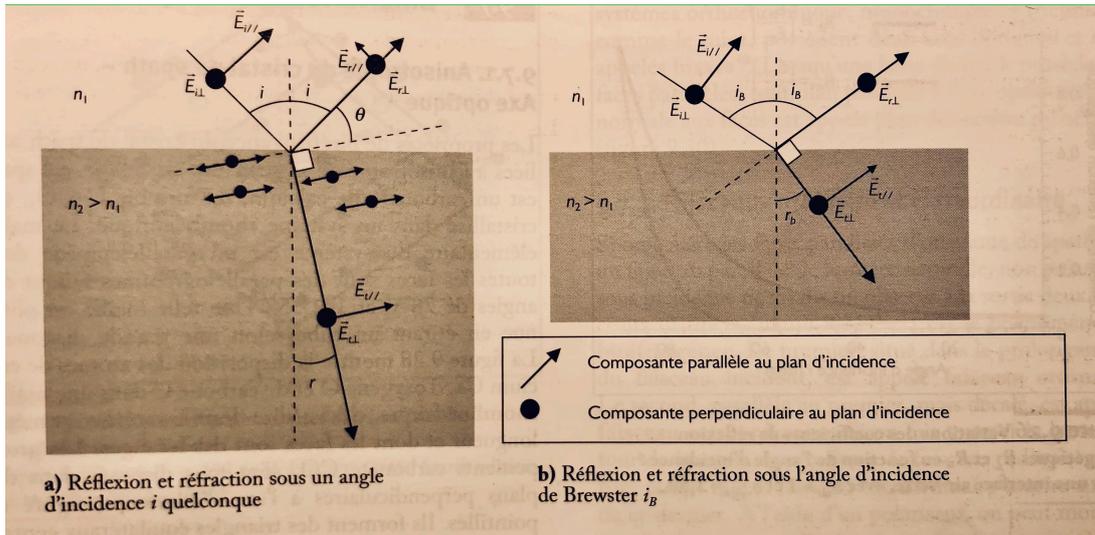


FIGURE 1 – Source : Houard.

Ça permet de parler de la polarisation de la lumière (du ciel par ex). On peut voir la réflexion comme un échange d'énergie entre l'onde et les électrons du diélectriques qui se mettent à osciller. On peut tenter l'expérience de la polarisation par réflexion.

↓  
*Décrire les électrons de la matière comme des dipôles oscillants nous a permis de comprendre l'existence de l'angle de Brewster. Nous allons préciser cette description pour expliquer la couleur du ciel et ses variations au cours de la journée.*

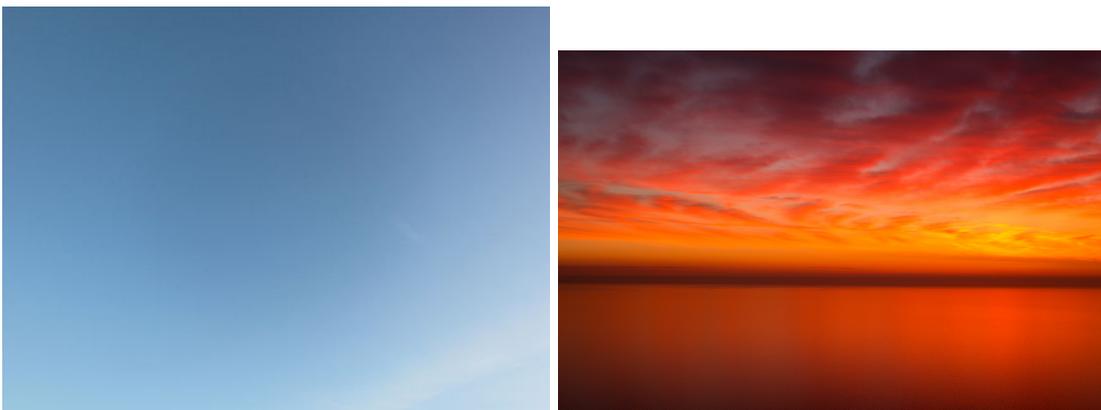
### 3 Rayonnement de la matière



**Expérience du Soleil couchant**

☞ Sextant page 273 ou Houard page 258 ☹

Rassemblons enfin tout ce que nous avons compris pour expliquer les couleurs du ciel :



### 3.1 Modèle de l'électron élastiquement lié

On considère un atome soumis à un champ  $\mathbf{E}$ . On suppose que :

- Le noyau est très lourd par rapport aux électrons : pas de mouvement du noyau
- On suppose que les électrons répartis de façon sphérique et on note  $Z$  le numéro atomique de l'atome donc le nombre d'électron ou de protons (modèle de Thompson)

donc le nombre d'électron ou de protons. Au repos les barycentres des charges positives et négatives sont confondus. Avec un champ électrique extérieur alors les barycentres ne sont plus confondus et on note

$$\mathbf{r} = \mathbf{PN} \quad (13)$$

avec  $\mathbf{P}$  le barycentre des charges positives et  $\mathbf{N}$  le barycentre des charges négatives. Appliquons le PFD pour la sphère électronique :

$$Zm_e\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{P/N} + (-Ze)\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{\text{magnétique}} + \mathbf{f}_{\text{dissip}} \quad (14)$$

- Le second terme correspond à la force électrique du champ sur les électrons. Si la longueur d'onde  $\lambda$  du rayonnement est grande devant la taille du nuage électronique  $a$  alors on peut supposer que le champ est uniforme sur la sphère électronique et donc  $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\text{ext}}(t)$  dans l'équation
- Le troisième terme est la partie magnétique de la force de Lorentz qui est négligeable si  $\|q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}\| \ll \|q\mathbf{E}\|$ . Or on peut écrire que  $\|\mathbf{E}\| \simeq v_\varphi \|\mathbf{B}\|$  avec  $v_\varphi$  la vitesse de phase de l'onde. On suppose alors que la vitesse des particules est très petite devant  $v_\varphi$  ce qu'il faudra vérifier par la suite. **Euh attention on l'a pas vérifié finalement.**
- Le quatrième terme est un terme de dissipation dont on ne connaît pas a priori la forme. On prend alors une forme linéaire et simple  $\mathbf{f}_{\text{dissip}} = -\frac{m_e}{\tau}\dot{\mathbf{r}}$  ce qui donne une puissance dissipée en  $\omega^2$
- On modélisera le premier terme qui est la force électrostatique du noyau positif sur la sphère négative par une force de rappel élastique  $-m\omega_0^2\mathbf{r}$  (on peut retrouver son expression en calculant le champ créé par une sphère chargée)

Le PFD s'écrit alors :

$$Zm_e\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2\mathbf{r} - Ze\mathbf{E}_{\text{ext}} - \frac{Zm_e}{\tau}\dot{\mathbf{r}} \quad (15)$$

on passe dans le domaine de Fourier pour étudier la réponse en régime harmonique :

$$-m\omega^2\mathbf{r} = -m\omega_0^2\mathbf{r} + i\frac{m\omega}{\tau}\mathbf{r} - e\mathbf{E} \quad (16)$$

Et on accède alors au moment dipolaire :

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{r} = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}\mathbf{E} \quad (17)$$

De nombreux atomes ou molécules de l'atmosphère ont un spectre électromagnétique essentiellement situé dans l'ultraviolet (on se convainc facilement que le ciel n'absorbe pas dans le visible). La lumière du spectre visible correspond donc à des pulsations  $\omega$  très inférieures à la pulsation caractéristique  $\omega_0 \approx 10^{-18}$  (située dans l'ultraviolet), on dit qu'on est dans le régime de Rayleigh. Dans ces conditions, le moment dipolaire prend la forme simplifiée :

$$\mathbf{p}(t) = \alpha\mathbf{E}(t) \quad \alpha = \frac{e^2}{m\omega_0^2} \quad (18)$$

### 3.2 Diffusion Rayleigh

- Le ciel est bleu (la lumière est bleue au début de la cuve) : puisque la lumière est diffusée en  $\omega^4$  (cf puissance rayonnée par le dipôle), les hautes fréquences sont diffusées avec plus d'intensité et donc le bleu sort mieux que le rouge... On devrait voir du violet mais le spectre du Soleil contient plus de bleu que de violet et l'oeil humain est également moins sensible à la lumière violette.
- Le ciel devient orangé au coucher du Soleil : puisque le bleu diffuse plus fortement au début, le spectre de la lumière incidente perd petit à petit ses hautes fréquences et visuellement, on la voit donc rougir. Au coucher du Soleil, la lumière est rasante donc parcourt une plus grande distance dans l'atmosphère avec de nous parvenir.

- La lumière est partiellement polarisée : il faut revenir à la forme du champ électrique donné en début de leçon. On remarque que dans le plan d'intensité maximale  $\theta = \pi/2$ , le champ  $\mathbf{E}$  est parallèle au dipôle :  $\mathbf{e}_\theta(\theta = \pi/2) \parallel \mathbf{p}$ . Ainsi si une onde plane se propage suivant  $z$ , le champ  $\mathbf{E}$  est dans le plan  $xy$ . Si on excite un dipôle selon  $x$ , la lumière qu'il va diffuser sera polarisée aussi suivant  $x$ . Donc regarder dans la direction  $y$  garantit que (puisque la lumière provient essentiellement des dipôles excités suivant  $x$ ) la lumière diffusée est polarisée suivant  $x$ .