

DM d'électromagnétisme - Correction

Pour toute question : nicolas.perez@ens-lyon.fr

I] Généralités:

($\rho, \vec{j} = 0$ dans le vide)

$$1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} (=0) \quad (1) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

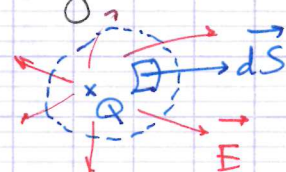
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = (\mu_0 \vec{j}) + c^{-2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

$\vec{E}$ vecteur champ électrique & $\vec{B}$ champ magnétique
 ($\vec{\nabla}$ est l'opérateur divergence, $\vec{\nabla} \wedge$ le rotationnel;
 en présence de charges et de courants, ρ est la densité de charge et $\vec{j}$ de courants, volumiques;
 ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide, μ_0 la perméabilité magnétique, $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ est la vitesse des ondes EM dans le vide;

* (1) donne une relation entre le flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée et la charge contenue à l'intérieur:

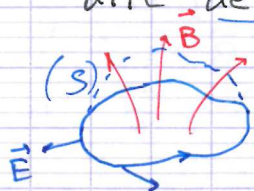
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

(théorème de Gauss)



* (2) stipule que le flux de $\vec{B}$ à travers une surface fermée est toujours nul, ce qui implique l'inexistence de monopôle magnétique.

* (3) résume de manière locale la loi d'induction dite de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S (\vec{B} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$


NB: comme $\text{div } \vec{B} = 0$ le flux ne dépend pas de la surface de contour C .

(contour fixe)

(Stokes) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

Ainsi, f.e.m(C) = $-\frac{d\Phi_S}{dt}$, la variation du flux à travers un circuit induit une force électromotrice dans celui-ci.

* (4) nous dit que les courants (même permanents) ou courants de déplacement ($\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$) produisent un champ magnétique qui "tourne" autour des lignes de courant.

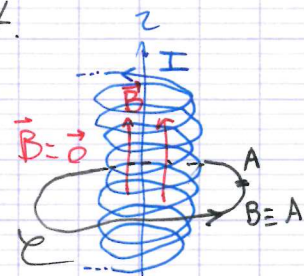
2) Bien que leur forme actuelle soit attribuée à Oliver Heaviside (Angleterre, 1850-1925) en 1884, on doit à James Clerk Maxwell (né en Écosse en 1831) d'avoir unifié en 1865 les lois connues de l'électromagnétisme, sous forme locale, et d'avoir pour cela introduit la notion de courant de déplacement, complétant ainsi la loi de Maxwell-Ampère. Les équations (1) et (2) sont toutes deux adaptées du théorème de Carl Friedrich Gauss (Allemagne, 1777-1855). L'équation (3) reflète la loi d'induction de Michael Faraday (Angleterre, 1791-1867) et la (4) le théorème d'André-Marie Ampère (né à Lyon en 1775 et mort en 1836). Avant ce dernier, la relation entre le champ magnétique et le courant électrique avait été démontrée par le physicien danois Hans Christian Ørsted, en 1820.

3) Comme $\text{div } \vec{B} = 0$, le lemme de Poincaré nous dit qu'on peut définir (au moins localement) $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. Ainsi par (3) on déduit $\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$, donc par le même lemme (pour des formes de degré différent) on peut également définir V tel que $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V$. Ce choix n'est pas unique, on peut facilement montrer que pour une fonction ϕ suffisamment

régulière, $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi$ et $V' = V - \frac{\partial\phi}{\partial t}$ donne les mêmes champs. On remarque par ailleurs que, si $\vec{A}$ et V respectent la jauge de Lorenz, alors $\vec{A}'$ et V' la respectent si et seulement si ϕ vérifie l'équation de d'Alembert !

4) Prenons une bobine idéale, infinie d'axe z , parcourue par un courant permanent.

On sait qu'elle produit un champ magnétique statique uniforme à l'intérieur du solénoïde, et nul à l'extérieur. Ainsi $\vec{B} \equiv \vec{0}$ dans tout



l'espace privé du domaine occupé par la bobine ! Par le théorème de Stokes, $\oint_e \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_e \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = S \cdot B \neq 0$, S étant la section du solénoïde et e un contour de l'extérieur qui passe autour. Ici on ne pourrait donc pas appliquer le lemme de Poincaré, sinon on aurait $\vec{A} = \vec{\nabla}\psi \Rightarrow \int_e \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \psi(B) - \psi(A) = 0$, ce qui est faux. C'est parce que le domaine considéré n'est pas simplement connexe.

5) En réalité, dans ce cas, $\vec{A}$ ne peut pas être défini continuellement sur le domaine. En mécanique quantique, deux électrons qui se propagent de part et d'autre du solénoïde pour être ensuite détectés au même point vont ressentir l'effet de $\vec{A}$, et même sans passer dans le champ magnétique, leurs fonctions d'onde respectives vont subir un déphasage égal à $\frac{e}{\hbar} \oint_e \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \frac{e}{\hbar} BS$, donnant lieu à des interférences. Il s'agit de l'effet Aharonov-Bohm.

6) * avec $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ et $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V$, il vient
 $-\frac{\rho}{\epsilon_0} = +\Delta V + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A}$, or comme $\text{div } \vec{A} + c^{-2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$,
 on obtient $\boxed{\Delta V - c^{-2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$

* On rappelle dans le formulaire que
 $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$, donc
 $\mu_0 \vec{j} + c^{-2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \mu_0 \vec{j} - c^{-2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - c^{-2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} V = -\vec{\text{grad}}(c^{-2} \frac{\partial V}{\partial t}) - \Delta \vec{A}$.
 Pourvu que V et $\vec{A}$ soient au moins $\mathcal{C}^2$ (théorème de Schwarz), on obtient $\boxed{\Delta \vec{A} - c^{-2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}}$

7) On donne ici la Formule du potentiel retardé,
 qui dit que ce qui se passe en $\vec{r}$ à l'instant t
 est produit par ce qu'il y a en $\vec{r}'$ à un
 instant antérieur $t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$, correspondant
 au temps de trajet de la lumière dans le vide.
 La même formule avec la source du "futur"
 ($t' = t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$) est correcte mathématiquement
 mais ne respecte pas la causalité !

8) Soit un tel dipôle formé de deux charges : z

Son moment dipolaire vaut $\vec{p} = -qz(t)\hat{e}_z$.

* $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

Ici, $\vec{j}(\vec{r}, t) = -q\dot{z}(t)\hat{e}_z \delta^{(3)}(\vec{r} - z\hat{e}_z) = \dot{\vec{p}}(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - z\hat{e}_z)$

donc $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\vec{r}' \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) \delta^{(3)}(\vec{r}' - z\hat{e}_z)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{|\vec{r} - z(t - \dots)\hat{e}_z|}{c})}{|\vec{r} - z(t - \frac{|\vec{r} - z(t - \dots)\hat{e}_z|}{c})\hat{e}_z|}$, ce qui est excessivement compliqué.

On fait donc l'approximation dipolaire,
 c'est-à-dire qu'on s'intéresse à la zone
 $r \gg \max |z|$, depuis laquelle le dipôle est comme
 ponctuel. On doit également supposer que les

charges vibrent moins vite que la lumière, ce qui revient à écrire que $|z| \ll c$. Or pour un mouvement harmonique, $|z| \sim |z| \cdot \frac{c}{\lambda}$. On suppose donc que $|z| \ll \lambda$ (approximation non-relativiste).

Alors

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \ddot{P}(t - \frac{r}{c})}{4\pi r}$$

9) L'onde émise, ici monochromatique, est sphérique, sous couvert des hypothèses précédentes. L'émission est anisotrope : à r fixé, le champ dépend de θ . Pour un champ statique, on retrouve l'expression du champ dipolaire en $\frac{1}{r^3}$ pour $\vec{E}$. À l'inverse, si on se place dans la zone de rayonnement ($r \gg \lambda$), c'est le terme en $\frac{1}{r}$ qui domine, et alors l'onde est transversale, car $\vec{E} \approx E_\theta \hat{u}_\theta$ et $\vec{B} = B_\phi \hat{u}_\phi$ sont tout deux orthogonaux à $\hat{u}_r$. On retrouve une structure d'onde ^{transverse} locale dans cette limite.

$$\vec{T} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \approx \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0} \sin^2 \theta \frac{\ddot{P}(t)^2}{r^2 c^3} \hat{u}_r$$

$$\longrightarrow P_{\text{ray}} = \oint_{\text{Sphère de rayon } R} \vec{T} \cdot d\vec{S} = \frac{\ddot{P}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta = \frac{\ddot{P}^2}{6\pi \epsilon_0 c^2}$$

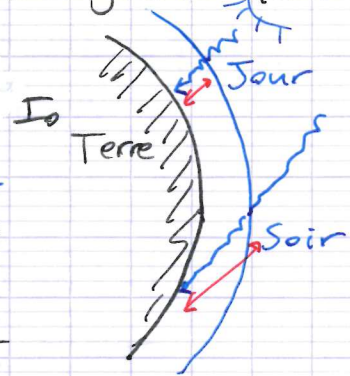
$$\sin^3 \theta = \sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta = \frac{d}{d\theta} \left(-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right)$$

10) Ce modèle décrit bien la diffusion Rayleigh.

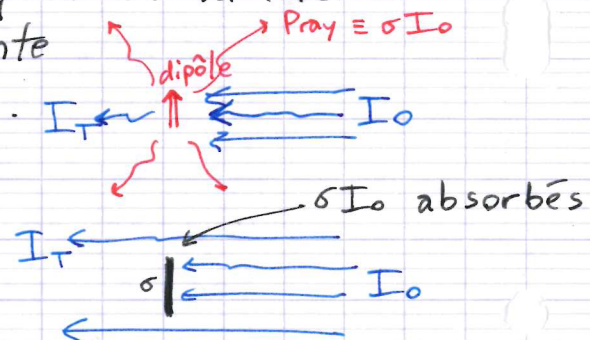
Les molécules de la couche d'ozone sont porteuses d'un moment dipolaire et diffusent la lumière solaire incidente selon la formule précédente. Pour de la lumière de longueur d'onde λ , $P_{\text{diff}} = \frac{\omega^4 P_0^2}{6\pi \epsilon_0 c^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \frac{c^2 P_0^2}{6\pi \epsilon_0}$: la lumière bleue est donc beaucoup plus diffusée, tandis que la rouge est mieux

transmise. Cela s'accroît lorsque la couche de diffusion est plus épaisse, c'est-à-dire en incidence rasante aux couchers et lever du jour : le ciel apparaît alors plus rouge.

Le rapport entre P_{ray} et I_0 est appelé section efficace de diffusion (Rayleigh), sa dimension est une surface et il s'agit de la superficie σ d'un objet totalement opaque qui bloquerait la même puissance de l'onde incidente que celle diffusée par le dipôle.



Outre la diffusion Rayleigh, on peut citer la diffusion multiple, la diffusion de Mie



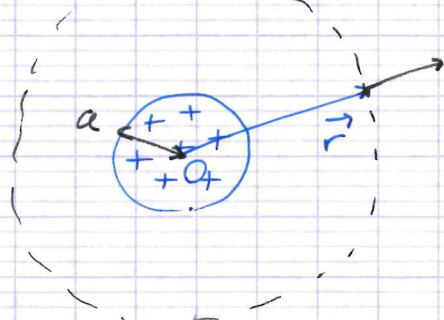
brouillard (linéaire également mais pour de plus grosses particules); la diffusion de la lumière libre par un électron, élastique (Thomson) ou inélastique (Compton); la diffusion Raman, inélastique à cause de l'absorption par les molécules, etc

II] Réponse optique de nano-objets métalliques:

I.1/ Il s'agit d'une distribution statique de charges à symétrie sphérique : $\vec{E}_+$ ne dépend donc que de r . De plus, tout plan passant par le centre de la boule étant plan de symétrie, $\vec{E}_+$ est contenu dans ce plan, par le principe de Curie. Ainsi $\vec{E}_+$ est nécessairement radial, puisque c'est l'intersection des plans de symétrie.

$$\vec{E}_+ = E_+(r) \hat{u}_r$$

On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon R : $4\pi R^2 E_+(R) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{eN}{\epsilon_0} & \text{si } R < a \\ \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{eN}{\epsilon_0} & \text{si } R > a \end{cases}$



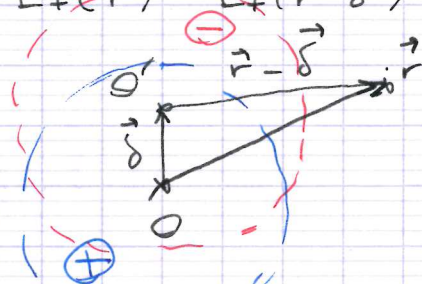
$$\Rightarrow E_+(r) = \begin{cases} \frac{eN}{3\epsilon_0} r, & \text{si } r < a \\ \frac{eN}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2}, & \text{si } r > a \end{cases}$$

De la même manière, $\vec{E}_-(\vec{r}) = -\vec{E}_+(\vec{r})$.

I.2.1/ La boule ionique est fixe mais chaque électron subit une force $-e\vec{E}_s$ et la force du champ produit par le nano-objet pour équilibrer cette action extérieure: pour que ce champ soit non-nul, il faut que le nuage électronique se déplace par rapport aux ions, suivant $\vec{u}_z$ par symétrie.

I.2.2/ $\vec{E}_d(\vec{r}) = \vec{E}_+(\vec{r}) + \vec{E}_-(\vec{r}) = \vec{E}_+(\vec{r}) - \vec{E}_+(\vec{r} - \vec{\delta})$
 $= \frac{eN}{3\epsilon_0} \vec{r} - \frac{eN}{3\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{\delta}) = \frac{eN}{3\epsilon_0} \vec{\delta}$

$\vec{E}_d(\vec{r}) = \frac{eN}{3\epsilon_0} \vec{\delta}$ si $\vec{r}$ est à l'intérieur des deux boules



$\Rightarrow$ un électron de conduction subit une force de rappel $-e\vec{E}_d = -\frac{e^2 N}{3\epsilon_0} \vec{\delta}$

I.2.3/ L'électron subit $-e(\vec{E}_s + \vec{E}_d)$, il y a donc une position d'équilibre lorsque $\vec{E}_d = -\vec{E}_s$, c'est-à-dire $\frac{eN}{3\epsilon_0} \vec{\delta} = -\vec{E}_s$: $\vec{\delta}_s = -\frac{3\epsilon_0}{eN} \vec{E}_s$

NB: si $|\delta| \ll a$, on peut supposer en effet que presque tous les électrons

de conduction subissent la force calculée précédemment.

D'une part le déplacement du nuage électronique est bien uniforme et dirigé selon z. On doit vérifier d'autre part l'hypothèse $|\delta| \ll a$
 $\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{0}$ à l'intérieur des deux boules
 (champ dipolaire statique à l'extérieur).

I.2.4/ On trouve $|\delta| \approx 6,6 \cdot 10^{-13} \text{ m}$, ce qui est de l'ordre de la taille d'un noyau !

I.2.5/ La charge des boules vaut $\pm \frac{4}{3}\pi a^3 eN$ et la distance entre leurs centres est $\vec{\delta}$, donc
 $\vec{p} = -\frac{4}{3}\pi a^3 eN \vec{\delta} \Rightarrow \vec{p}_0 = \frac{3\epsilon_0}{eN} \vec{E}_s \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 eN = 4\pi a^3 \epsilon_0 \vec{E}_s$
 On voit immédiatement que $\alpha_0 = 4\pi a^3$ a la dimension d'un volume, ce que l'on peut aussi vérifier à partir de sa définition :

$$[\alpha_0] = \frac{[\vec{p}_0]}{[\epsilon_0][\vec{E}_s]} \rightarrow \frac{\text{C.m}}{\text{C.m}^{-2}} \rightarrow [\alpha_0] = \text{L}^3$$

par la formule de Coulomb $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

I.3.1/ $m \ddot{\delta} = -e(\vec{E}_0 + \vec{E}_d) = -e\vec{E}_0 - \frac{e^2 N}{3\epsilon_0} \vec{\delta}$
 $\Rightarrow \ddot{\delta} + \omega_0^2 \vec{\delta} = -\frac{e}{m} \vec{E}_0$, avec $\omega_0 = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}}$

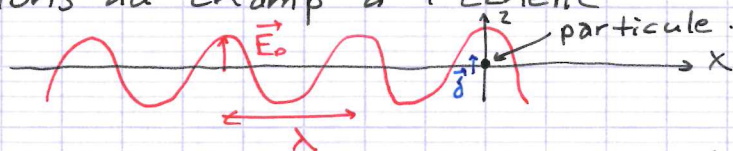
I.3.2/ $\vec{\delta}(t) = -\frac{e}{m} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ en régime permanent.

$\Rightarrow$ lorsque $\omega \rightarrow \omega_0$, la réponse $\vec{\delta}(t)$ diverge (résonance) mais on sort alors de l'hypothèse $|\delta| \ll a$, et puis ce n'est pas physiquement tolérable.

I.3.3/ Pour le sodium $\omega_0 \approx 5,1 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$,
 ou $8,2 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Cette fréquence appartient au domaine ultraviolet-proche visible ($\approx 385 \text{ nm}$).
 En réalité l'oscillateur est amorti, or on sait que pour

un facteur de qualité fini la fréquence de résonance est diminuée : $\omega_0^{\text{exp}} \leq \omega_0^{\text{théorique}}$.

I.4.1/ Dans le domaine visible on a $400\text{nm} < \lambda < 800\text{nm}$ environ, donc $\lambda \gg a$ et on peut donc négliger les variations du champ à l'échelle de la particule



I.4.2/ $[\gamma] = \text{T}^{-1}$; γ^{-1} est le temps typique de libre parcours moyen d'un électron, "entre deux collisions". En réalité l'électron ne subit pas de collision physique mais est diffusé via son interaction avec le réseau ionique et les autres électrons, ce qui, dans l'analyse semiclassique, revient à introduire la force effective $-m\gamma\dot{\delta}$.

$$\rightarrow \ddot{\delta} + \gamma\dot{\delta} + \omega_0^2\delta = -\frac{e}{m}E_0.$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_0 = \frac{-\frac{e}{m}E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}} \text{ en régime permanent.}$$

$$|\delta_0| = \frac{|\frac{e}{m}E_0|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \text{ est maximal lorsque } (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2 \text{ est minimale}$$

$$\Rightarrow \omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}} \approx \omega_0$$

$$\rightarrow |\delta_0|_{\text{max}} = \frac{\frac{e}{m}|E_0|}{\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} \approx \boxed{\frac{e|E_0|}{m\gamma\omega_0}}$$

attention à la conversion en $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

I.4.3/ Pour une OPPM, $I_0 = \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2$

$$\Rightarrow |\delta_0|_{\text{max}} = \frac{e}{m\gamma\omega_0} \sqrt{\frac{2I_0}{\epsilon_0 c}} \approx 9,9 \cdot 10^{-13} \text{ m pour le sodium.}$$

$\rightarrow$ l'hypothèse $|\delta_0| \ll a$ est toujours valide, même à la résonance.

$$\text{I.4.4/ } \vec{E}_{\text{int}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_d = -\frac{m}{e} (\ddot{\delta} + \gamma \dot{\delta}) \\ = -\frac{m}{e} (i\gamma\omega - \omega^2) \vec{\delta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\text{int}} = \left(\frac{i\gamma\omega - \omega^2}{\omega_0^2 + i\gamma\omega - \omega^2} \right) \vec{E}_0} \text{ dans la particule}$$

Formellement il faut vérifier que $\left| \frac{E_{\text{int}}}{E_0} \right|^2 = \frac{\omega^4 + \gamma^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$ a un maximum.

En dérivant, on vérifie que ω est racine de $\omega^4 - \omega_0^2 \omega^2 - \frac{\gamma^2 \omega_0^2}{2}$ à la résonance, ce qui donne:

$$\boxed{\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 2\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}}{2}}} \approx \omega_0 \text{ à la résonance.}$$

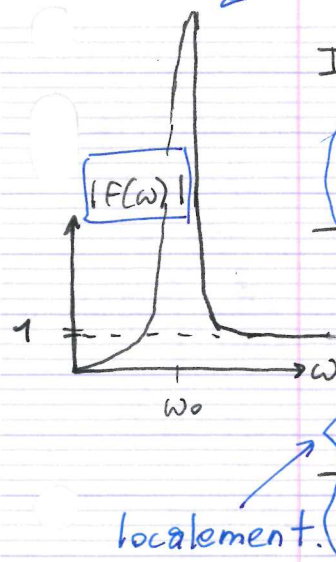
$\omega_0 \left[1 + O\left(\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right) \right]$

Pour $\omega \ll \omega_p$, $|E_{\text{int}}| \rightarrow 0$: on retrouve la réponse à un champ statique, pour laquelle les forces électrostatiques à l'intérieur de la nanoparticule s'équilibrent et le champ total est nul.

* Plus simple: $\left| \frac{E_{\text{int}}}{E_0} \right| \begin{cases} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 \\ \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 1 \\ = \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}} \text{ si } \omega = \omega_0 \end{cases} \Rightarrow \text{il y a résonance}$

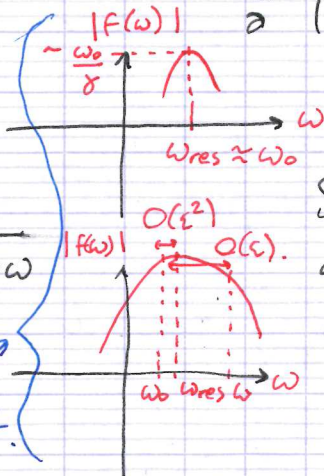
10/21

globalement



localement.

I.4.5/ Par ce qui précède, $\omega = \omega_0 + O(\frac{\delta^2}{\omega_0})$ à la résonance, et $|F(\omega_0)| \approx \frac{\omega_0}{\delta}$



J'ignore si on demande d'être plus précis. Si jamais, on pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\epsilon = \frac{\delta}{\omega_0}$, de telle sorte que $x_{res} = 1 + O(\epsilon^2)$. On définit alors le "voisinage" de ω_0 comme $x - 1 = O(\epsilon)$ et on note $x = 1 + \epsilon y$ avec $y = O(1)$.

$$\text{Il vient } |F(\omega)| = \left| \frac{x^2 - i\epsilon x}{x^2 - 1 - i\epsilon x} \right| = \left| \frac{1 + 2\epsilon y + \epsilon^2 y^2 - i\epsilon - i\epsilon^2 y}{2\epsilon y + \epsilon^2 y^2 - i\epsilon - i\epsilon^2 y} \right|$$

$$= \frac{1}{\epsilon} \left| \frac{1 + 2\epsilon y - i\epsilon + \epsilon^2 y^2 - i\epsilon^2 y}{2y - i + \epsilon y^2 - i\epsilon y} \right| \approx \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{1 + 4y^2} \right)$$

$$\Rightarrow |F(\omega)| \approx \frac{\omega_0}{\delta} \left(\frac{1}{1 + 4\left(\frac{\omega - \omega_0}{\delta}\right)^2} \right) \text{ au voisinage de } \omega_0$$

Il s'agit d'une fonction Lorentzienne.

→ Pour le sodium, $|F(\omega_0)| \approx \frac{\omega_0}{\delta} = \underline{\underline{170}}$!

I.5.1/ Hors de la particule, celle-ci peut être vue comme un dipôle de moment $\vec{p} = -\frac{4}{3}\pi a^3 e N \vec{\delta}$, oscillant à la fréquence ω .

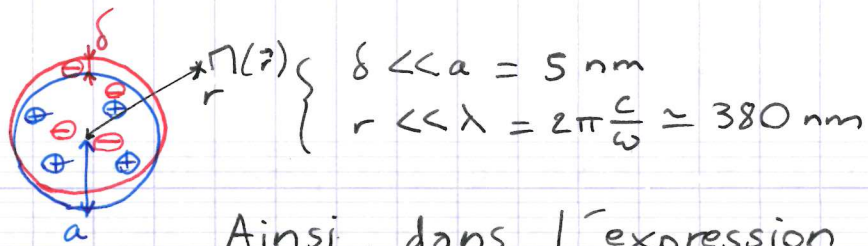
$$\text{Ainsi } \vec{p} = \frac{4\pi a^3 e^2 N}{3m} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right) \vec{E}_0 = \alpha_0 \epsilon_0 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right) \vec{E}_0$$

Pour $\omega = 0$, on retrouve $\vec{p}_0 = \alpha_0 \epsilon_0 \vec{E}_0$

$$\beta = \alpha_0 \epsilon_0$$

I.5.2/ Comme $a \gg |\vec{\delta}|$, l'approximation dipolaire est bien respectée. Tant que $\omega \ll \frac{c}{|\vec{\delta}|}$

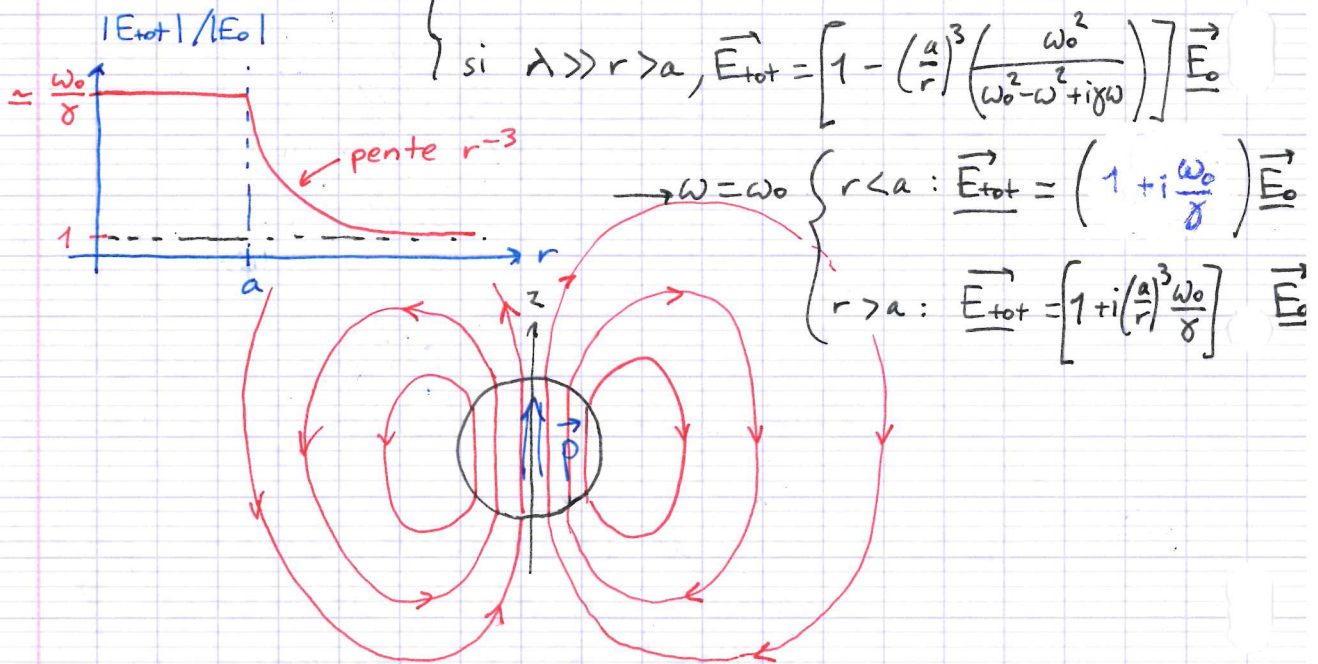
on reste également dans le cadre non-relativiste. Or, même à la résonance, $\frac{c}{|\vec{\delta}|} \approx 3 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}$, donc tout va bien. Par contre on ne se place pas dans la zone dite de rayonnement : ici, $r \ll \lambda$.



Ainsi, dans l'expression du champ émis par le dipôle, ce ne sont plus les termes de rayonnement en $\ddot{\mathbf{p}}$ qui dominent mais, au contraire, les termes "statiques": $\boxed{\vec{E}_e \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \hat{u}_r) \hat{u}_r - \vec{p}]}$

$$\rightarrow \vec{E}_e = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \underline{E}_0 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right) (2\cos\theta \hat{u}_r + \sin\theta \hat{u}_\theta)$$

Sur (Ox) ($\theta = \frac{\pi}{2}$) $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } r < a, \vec{E}_{\text{tot}} = \left(\frac{i\gamma\omega - \omega^2}{\omega_0^2 + i\gamma\omega - \omega^2} \right) \vec{E}_0 \\ \text{si } \lambda \gg r > a, \vec{E}_{\text{tot}} = \left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right) \right] \vec{E}_0 \end{array} \right.$



II.1.1/ On rappelle que $\vec{E}_d = \frac{eN}{3\epsilon_0} \vec{\delta}$ dans la particule
 $\left(\rightarrow \vec{E}_d = \frac{-\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \vec{E}_0 \right)$

II.1.2/ Rappelons que $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_{\text{met}} \vec{E}_{\text{tot}}$ et $\epsilon_{\text{met}} = \epsilon_0 (1 + \chi_{\text{met}})$
 où ϵ_{met} est la permittivité "diélectrique" du métal
 et χ_{met} sa susceptibilité (en fait c'est la question 4.)

Ici, $\boxed{\vec{P} = -eN\vec{\delta} = -3\epsilon_0 \vec{E}_d}$

II.1.3/ $\vec{E}_{\text{int}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_d = \boxed{\vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}}$

$$\text{II.1.4/ } \vec{P} = \epsilon_0 \chi_{\text{met}} \vec{E}_{\text{int}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{int}} = \vec{E}_0 - \frac{\chi_{\text{met}}}{3} \vec{E}_{\text{int}} \Rightarrow \vec{E}_{\text{int}} = \frac{3\epsilon_0}{3\epsilon_0 + \epsilon_0 \chi_{\text{met}}} \vec{E}_0$$

$$\text{Or } \epsilon_0 \chi_{\text{met}} = \epsilon_{\text{met}} - \epsilon_0 \Rightarrow \vec{E}_{\text{int}} = \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon_{\text{met}}} \vec{E}_0$$

$$\text{II.2.1/ Drude: } \vec{j} = -eN\vec{v}. \text{ Plus g\u00e9n\u00e9ralement, } \vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}; \text{ Loi d'Ohm locale: } \vec{j} = \sigma \vec{E}_{\text{int}} \Rightarrow \text{en r\u00e9gime sinuso\u00efdal, } \vec{P} = \frac{\sigma}{i\omega} \vec{E}_{\text{int}} \\ \Rightarrow \chi_{\text{met}} = \frac{\sigma}{i\omega\epsilon_0} \text{ \& } \epsilon_{\text{met}} = \epsilon_0 + \frac{\sigma}{i\omega}$$

$$\text{II.2.2/ PFD: } m\vec{\dot{v}} = -e\vec{E}_{\text{int}} - m\gamma\vec{v} \\ \Rightarrow \vec{j} = -eN\vec{v} = \frac{e^2 N}{m} \left(\frac{1}{\gamma + i\omega} \right) \vec{E}_{\text{int}} \rightarrow \sigma = \frac{\frac{e^2 N}{m}}{1 + i\frac{\omega}{\gamma}}$$

$$\text{II.2.3/ } \frac{\epsilon_{\text{met}}}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\sigma}{i\omega\epsilon_0} = 1 + \frac{\frac{e^2 N}{m\epsilon_0}}{i\omega\gamma - \omega^2} = 1 + \frac{\omega_p^2}{i\gamma\omega - \omega^2} \\ \Rightarrow \vec{E}_{\text{int}} = \frac{3}{2 + \frac{\epsilon_{\text{met}}}{\epsilon_0}} \vec{E}_0 = \frac{3}{3 + \frac{\omega_p^2}{i\gamma\omega - \omega^2}} \vec{E}_0 \\ = \left(\frac{i\gamma\omega - \omega^2}{i\gamma\omega - \omega^2 + \frac{\omega_p^2}{3}} \right) \vec{E}_0, \text{ ce qui bien s\u00fbr revient au m\u00eame que I.4.4;}$$

$$\text{II.3.1/ } \epsilon_{\text{met}} + 2\epsilon_{\text{ext}} = 2\epsilon_{\text{ext}} + \epsilon_0(1 + \chi_b) + \frac{\sigma}{i\omega} \\ = 2\epsilon_{\text{ext}} + \epsilon_0(1 + \chi_b) + \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{i\gamma\omega - \omega^2} \rightarrow \frac{-\omega_p^2}{\gamma^2\omega^2 + \omega^4} (i\gamma\omega + \omega^2) \epsilon_0 \\ \rightarrow \begin{cases} \text{Re}(\epsilon_{\text{met}} + 2\epsilon_{\text{ext}}) = 2\epsilon_{\text{ext}} + \epsilon_0(1 + \chi_b) - \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\gamma^2 + \omega^2} \\ \quad \approx 2\epsilon_{\text{ext}} + \epsilon_0(1 + \chi_b - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) \\ \text{Im}(\epsilon_{\text{met}} + 2\epsilon_{\text{ext}}) = \epsilon_0 \frac{-\gamma\omega_p^2/\omega}{\gamma^2 + \omega^2} \approx -\epsilon_0 \frac{\gamma\omega_p^2}{\omega^3} \end{cases}$$

$$\text{II.3.2/ La r\u00e9sonance a lieu plus ou moins quand } \text{Re}(2\epsilon_{\text{ext}} + \epsilon_{\text{met}}) = 0, \text{ soit pour } \omega_R \approx \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + 2\frac{\epsilon_{\text{ext}}}{\epsilon_0} + \chi_b}} \rightarrow \tilde{a} O\left(\frac{\gamma^2}{\omega_p^2}\right) \text{ pr\u00e9}$$

(en supposant $\chi_b, \epsilon_{ext} \approx \text{csttes}$ dans le domaine optique)

II.3.3/ On rappelle que $n^2 = \frac{\epsilon_{ext}}{\epsilon_0}$.

$$\Rightarrow \omega_R = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + 2n^2 + \chi_b}} \approx 4,4 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

$$\rightarrow \lambda_R = 2\pi \frac{c}{\omega_R} \approx 420 \text{ nm} \quad (\text{bleu-violet})$$

Il s'agit de la fréquence à laquelle les nanoparticules absorbent (et diffusent) le plus la lumière, donc par transparence on verra mieux les couleurs non absorbées : le milieu apparaît donc plutôt jaune par transparence.

$$\text{II.3.4/ } \lambda_R = \frac{2\pi c}{\omega_p} \sqrt{1 + 2n^2 + \chi_b} = \frac{2\pi c}{\omega_p} \sqrt{1 + 2\frac{\epsilon_{ext}}{\epsilon_0} + \chi_b}$$

On suppose que ω_p et χ_b restent fixes (quantités caractérisant les particules dispersées);

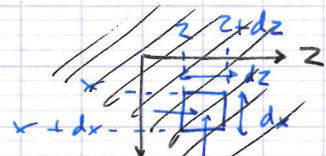
$$\frac{d\lambda_R}{\lambda_R} = \frac{d\epsilon_{ext}/\epsilon_0}{1 + \chi_b + 2\frac{\epsilon_{ext}}{\epsilon_0}} \quad (\text{dérivée logarithmique})$$

$\Rightarrow$ On détecte une variation

$$\frac{\Delta \epsilon_{ext}}{\epsilon_0} = (1 + \chi_b + 2n^2) \frac{\Delta \lambda_R}{\lambda_R} \approx 2,2 \cdot 10^{-3}$$

III] Les Plasmons de surface:

1/ Plan vu du dessus :



Conservation de la charge dans

$$\text{le plan infinitésimal : } (\sigma(x, z, t+dt) - \sigma(x, z, t)) dx dz \\ = dt dx \cdot (j_s^z(x, z, t) - j_s^z(x, z+dz, t)) + dt dz \cdot (j_s^x(x, z, t) - j_s^x(x+dx, z, t))$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\partial j_s^z}{\partial z} - \frac{\partial j_s^x}{\partial x} \quad (\text{ou } \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_s = 0)}$$

$$\rightarrow -i\omega\sigma = -\frac{\partial j_s^z}{\partial z} = -ik j_{sn} e^{i(kz-\omega t)} \Rightarrow \sigma(z,t) = \frac{k}{\omega} j_{sn} e^{i(kz-\omega t)}$$

2/ Tout plan orthogonal à (Ox) est un plan de symétrie de la distribution, donc $\vec{E}$ est toujours contenu dans le plan (y, z) (et est fonction de y et z).

3/ La relation de passage au voisinage du plan stipule que $\vec{E}(0^+, z, t) - \vec{E}(0^-, z, t) = \frac{\sigma(z, t)}{\epsilon_0} \hat{e}_y$.
Or les symétries imposées par le plan s'écrivent $\begin{cases} E_z(-y, z) = E_z(y, z) \\ E_y(-y, z) = -E_y(y, z) \end{cases}$ (miroir (y)).

$$\Rightarrow E_y(0^+, z, t) = \frac{\sigma(z, t)}{2\epsilon_0}$$

4/ Le vide occupe l'espace $y > 0$, où $\vec{E}$ vérifie donc l'équation d'onde de Helmholtz :

$$\vec{0} = \Delta \vec{E} - c^{-2} \partial_{tt} \vec{E} = \Delta \vec{E} + k^2 \vec{E}$$

$\rightarrow$ avec $\vec{E}(y, z, t) = \vec{E}(y) e^{i(kz-\omega t)}$ on a :

$$\boxed{\frac{d^2 \vec{E}}{dy^2} + (k^2 - K^2) \vec{E} = \vec{0}} : \text{les modes tels que } K > k \text{ sont donc évanescents.}$$

$$\rightarrow E_y(y, z, t) = \frac{\sigma(z, t)}{2\epsilon_0} e^{-\sqrt{K^2 - k^2} y} \quad \text{pour } y > 0.$$

$$\Rightarrow E_y(y, z, t) = \frac{K j_{sn}}{2\omega \epsilon_0} e^{-\sqrt{K^2 - k^2} y} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\text{div } \vec{E} = 0 \rightarrow iK E_z = -\frac{dE_y}{dy}$$

$$\Rightarrow E_z(y, z, t) = \frac{\sqrt{K^2 - k^2} j_{sn}}{2i\omega \epsilon_0} e^{-\sqrt{K^2 - k^2} y} e^{i(kz - \omega t)}$$

5/ L'onde décrite ci-dessus est évanescence de part et d'autre du plan (dans la direction y), se propage selon z et a une polarisation elliptique d'axes y et z .

$$6/ -im\omega \vec{v} = -e \vec{E}^z(y=0, z, t) \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{-e\sqrt{k^2 - k^2_1}}{2m\omega^2\epsilon_0} j_s n e^{i(kz - \omega t)} \hat{e}_z}$$

NB: * Attention aux conventions qui diffèrent de l'exercice précédent: ici $\partial_t = -i\omega$ et N est une densité surfacique.

* on néglige le "Frottement" (diffusion) des électrons dans le métal, ce qui revient à considérer ce dernier parfait. Bien sûr cela est discutable puisque l'on prend j_s fini et $\vec{E}$ aussi. En fait on fait la même hypothèse qu'avant ($\gamma \ll \omega$, ω_p), si bien que les électrons oscillent tellement vite qu'ils n'ont "pas le temps d'entrer en collision".

$$7/ \underline{j_s} = -eN \underline{v} = \frac{e^2 N}{2m\epsilon_0} \frac{\sqrt{k^2 - k^2_1}}{\omega^2} \underline{j_s},$$

$$\text{donc } \frac{c}{2} \Omega_s = \frac{\omega^2}{\sqrt{k^2 - k^2_1}} \Rightarrow \omega^4 = \frac{c^2}{4} \Omega_s^2 K^2 - \frac{\Omega_s^2 \omega^2}{4}$$

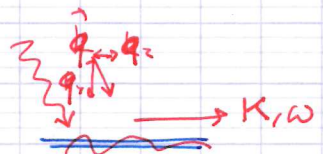
$$\Rightarrow \boxed{\left(1 + \frac{4\omega^2}{\Omega_s^2}\right) \omega^2 = c^2 K^2}$$

8/ Une onde plane incidente

de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{q} = q_1 \hat{e}_1 + q_2 \hat{e}_2$ vérifie la relation de dispersion $\omega^2 = c^2(q_1^2 + q_2^2)$.

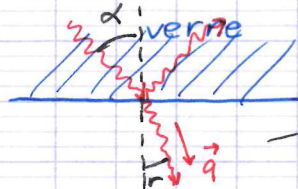
Si elle excite un plasmon, ce sera à la fréquence ω et avec $K = q_2$, car le champ excitateur en $y=0$ vaut $\vec{E}_0 e^{i(q_2 z - \omega t)}$.

→ alors $\left(1 + \frac{4\omega^2}{\Omega_s^2}\right) \omega^2 = c^2 K^2 = c^2 q_2^2 \leq \omega^2$,
ce qui est impossible!



9 / S'il y a réflexion totale alors l'onde réfractée est évanescente. Mathématiquement cela arrive car $n \sin \alpha > 1$. On propose alors d'adapter la loi de Snell-Descartes avec :

$$n \sin \alpha = \sin r = \sqrt{1 - \cos^2 r} = \sqrt{1 + \beta^2}$$



onde en $e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} = e^{iq[\cos r \cdot y + \sin r \cdot z]}$
avec $|q| = \frac{\omega}{c}$ (on prend ici $q > 0$)

→ le champ incident est
 $\vec{E}_0 e^{-q\beta y} e^{iq\sqrt{1+\beta^2}z} e^{-i\omega t}$

10 / Un plasmon de pulsation peut être excité avec $K = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \beta^2} \rightarrow q\beta = k\beta = \sqrt{K^2 - k^2}$: on retrouve bien les caractéristiques du plasmon.

11 / On a $c^2 K^2 = \omega^2 n^2 \sin^2 \alpha = \omega^2 \left(1 + \frac{k\omega^2}{\Omega_s^2}\right)$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\Omega_s}{2} \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}$$

12 / À ω fixé, lorsque l'on met le faisceau à l'angle α vérifiant la relation précédente, on excite alors le métal à la résonance plasmon de surface. L'excitation de cette onde va engendrer une perte d'énergie notable par la baisse d'intensité du rayon réfléchi en B.

13 / La distance entre le verre et la plaque métallique a l'effet d'une résistance dans un circuit électronique résonant. En effet le champ excitant le plasmon dépend de d comme

$\exp\left(-\frac{\omega}{c} \beta d\right) = \exp\left(-\frac{\omega}{c} d \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}\right)$. Dans un circuit résonant on sait que la fréquence de résonance réelle dépend de la résistance, et on observe ici la même chose : l'angle de résonance dépend de d , ainsi que la largeur de bande passante, d'autant plus grande que le facteur de qualité est faible, soit la "résistance" grande. La profondeur du pic résulte d'un compromis entre valeur réelle et de l'angle de résonance plasmon et atténuation avec d . Il semble que d_2 maximise l'énergie transmise au plasmon à la résonance, si bien que la réflexion est pratiquement nulle. Ce phénomène est similaire à l'adaptation d'impédances.

14/ Dans l'espace entre le verre et le métal, tout se passe comme si on pouvait remplacer c par $\frac{c}{n_0}$ (n_0 indice du liquide) dans l'expression du champ $\vec{E}$ pour $y > 0$ et $y < 0$, et ϵ_0 par $n_0^2 \epsilon_0$. On peut vérifier que la pulsation de résonance est déplacée à $\omega^2 = \frac{\gamma_s^2}{4n_0^4} (n^2 \sin^2 \alpha - n_0^2)$

On peut donc déduire une variation locale (puisque d est de l'ordre de la longueur d'onde dans le domaine visible) d'indice n_0 due à des impuretés de taille $\sim \lambda$.

* ici le métal est couplé au verre si $d \neq \infty$; la relation de la question n'est alors plus exacte.

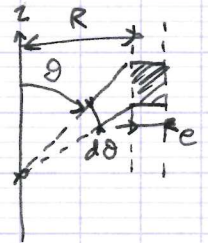
IV) Induction magnétique dans un cylindre:

1/ On prendra l'orientation trigonométrique autour de z pour exprimer l'intensité du courant $\vec{a}$ travers l'élément de cylindre.

Sa section vaut $e \times R [\cotan \theta - \cotan(\theta + d\theta)]$

$$= \frac{e R d\theta}{\sin^2 \theta}, \text{ sa longueur } 2\pi R.$$

$$\Rightarrow \delta I = \sigma \cdot \frac{e R d\theta / \sin^2 \theta}{2\pi R} e_{\text{fem}}$$

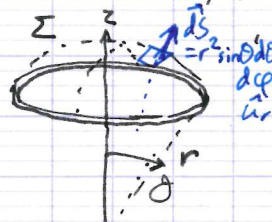


où e_{fem} est la force électromotrice induite dans le circuit. Pour calculer cette dernière, 2 méthodes sont possibles. $\rightarrow$ induction de Neumann.

* référentiel du cylindre : on applique la loi de Lenz-Faraday :

$e_{\text{fem}} = -\frac{d\Phi}{dt}$ où Φ est le flux du champ magnétique dipolaire $\vec{a}$ travers le circuit.

$\rightarrow$ On calcule ce flux à travers la calotte sphérique s'appuyant sur l'élément de cylindre (figure ci-contre), à distance r du dipôle.



$$\Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 \Gamma}{4\pi r^3} \iint_{\Sigma} (z \cos \theta' \vec{u}_r + \sin \theta' \vec{u}_\theta) \cdot r^2 \sin \theta' d\theta' d\phi \vec{u}_r$$

$$= \frac{\mu_0 \Gamma}{2r} \int_0^\theta 2 \sin \theta' \cos \theta' d\theta' = \frac{\mu_0 \Gamma}{2r} [\sin^2 \theta']_0^\theta = \frac{\mu_0 \Gamma}{2r} \sin^2 \theta.$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 \Gamma}{2R} \sin^3 \theta.$$

Le flux varie à mesure que l'élément se déplace :

$$e_{\text{fem}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\Phi}{d\theta} = -\dot{\theta} \cdot \frac{3\mu_0 \Gamma}{2R} \cos \theta \sin^2 \theta.$$

$$\text{Or } z = R \cotan \theta \Rightarrow v = \dot{z} = -\frac{R \dot{\theta}}{\sin^2 \theta}$$

$$\Rightarrow e_{\text{fem}} = \frac{3\mu_0 \Gamma v}{2R^2} \cos \theta \sin^4 \theta$$

$$\Rightarrow \delta I = \frac{3\mu_0 \Gamma \sigma e d\theta}{4\pi R^2} v \cos \theta \sin^2 \theta.$$

* référentiel fixe (cylindre en mouvement dans $\vec{B}$ stationnaire $\Rightarrow$ induction de ^{Lorentz.} ~~Neumann~~):

On intègre directement le champ électromoteur

$$\vec{E}_{\text{fem}} = \vec{V} \wedge \vec{B} = V \hat{u}_z \wedge \frac{\mu_0 \Gamma}{4\pi r^3} (2\cos\theta \hat{u}_r + \sin\theta \hat{u}_\theta)$$

$$= \frac{\mu_0 \Gamma V}{4\pi r^3} \cdot 3\sin\theta \cos\theta$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}_{\text{fem}} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}_{\text{fem}} = 2\pi R \frac{3\mu_0 \Gamma V}{4\pi \left(\frac{R}{\sin\theta}\right)^3} \sin\theta \cos\theta = \frac{3\mu_0 \Gamma V}{2R^2} \cos\theta \sin^4\theta$$

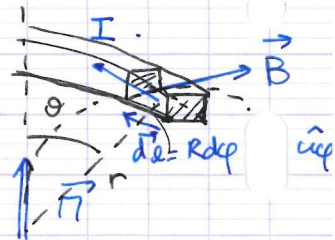
→ On retrouve le résultat donné par la loi de Lenz-Faraday, ici beaucoup plus rapidement!

2/ On calcule la Force de Laplace :

$$\delta \vec{F}_L = \int_0^{2\pi} \delta I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$= R \delta I \frac{\mu_0 \Gamma}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \hat{u}_\varphi \wedge (2\cos\theta \hat{u}_r + \sin\theta \hat{u}_\theta)$$

$$= \frac{\mu_0 \Gamma \delta I}{4\pi R^2} \sin^3\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi (2\cos\theta \hat{u}_\theta - \sin\theta \hat{u}_r)$$



Par symétrie, on sait que $\delta \vec{F}_L$ n'aura qu'une composante selon z .

$$\Rightarrow \delta F_L = \hat{u}_z \frac{\mu_0 \Gamma \delta I}{4\pi R^2} \sin^3\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (-2\sin\theta \cos\theta - \sin\theta \cos\theta)$$

$$= \frac{-3\mu_0 \Gamma \delta I}{4\pi R^2} \cos\theta \sin^4\theta \hat{u}_z 2\pi \Rightarrow \boxed{\delta \vec{F}_L = -2\pi \left(\frac{3\mu_0 \Gamma}{4\pi R^2} \right)^2 e\sigma V \cos^2\theta \sin^6\theta d\theta \hat{u}_z}$$

⇒ la résultante sur le cylindre, en considérant ce dernier infini, vaut

$$\vec{F}_L = \int_0^\pi -2\pi e\sigma V \left(\frac{3\mu_0 \Gamma}{4\pi R^2} \right)^2 \cos^2\theta \sin^6\theta d\theta \hat{u}_z$$

$$\boxed{= -\frac{45}{1024} \left(\frac{\mu_0 \Gamma}{R^2} \right)^2 e\sigma V \hat{u}_z}$$

$$3/ m \dot{\vec{v}} = \vec{F}_L + m\vec{g} \Rightarrow \dot{v} = -g - \frac{45}{1024} \left(\frac{\mu_0 \Gamma}{R^2} \right)^2 \frac{e\sigma}{m} V$$

$$\rightarrow \boxed{\dot{v} + \frac{v}{\tau} = -g} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{1024}{45} \left(\frac{R^2}{\mu_0 \Gamma} \right)^2 \frac{m}{e\sigma}}$$

Avec l'expression du champ créé par un dipôle, on sait que

$$\left[\frac{R^2}{\rho \pi} \right] = \left[\frac{1}{B \cdot R} \right] = m \cdot V^{-1} s^{-1},$$

ainsi $[\tau] = \underline{m^2} \underline{V^{-2}} \underline{s^{-2}} \cdot \underline{R_g} \cdot \underline{V} \underline{A^{-1}} = \underline{J} \underline{A^{-1}} \underline{V^{-1}} = \underline{J \cdot W^{-1}} = s.$

On aurait la même équation avec une bille tombant dans un fluide de façon laminaire (Frottement de Stokes), ou encore avec les électrons dans le modèle de Drude.

La solution est donnée par $v(t) = (v_0 + g\tau) e^{-t/\tau} - g\tau.$

h/ Quelle que soit sa vitesse initiale, le cylindre atteint la vitesse $-g\tau$ (ou 0 en l'absence de gravité). Plus τ est faible, plus vite et fortement le cylindre est freiné. Le champ magnétique crée des courants induits qui produisent une force s'opposant au mouvement, ce qui a pour effet de finalement limiter l'induction. Cela reflète la loi de Lenz.