

Énoncé – TD n°1

Sommaire

ÉLECTROSTATIQUE - MAGNÉTOSTATIQUE	1
Exercice 1 Généralités	1
Exercice 2 Sphère sous influence	1
Exercice 3 Interaction molécule-paroi	1
ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES	2
Exercice 4 Épaisseur de peau	2
Exercice 5 Ondes évanescentes	2
Exercice 6 Pression de radiation	2
Exercice 7 Polarisation et photon	3
Exercice 8 Rayonnement d'une antenne demi-onde	4
Exercice 9 Aspects électromagnétiques de la propagation d'ondes sur une ligne coaxiale	5

Légende

- ♣ : Question ou exercice important ou plus délicat.
- * Question «facultative», qu'on pourra sauter en première lecture, mais à laquelle il faudra pouvoir répondre après quelques temps. *

Partie 1 : Électrostatique - Magnétostatique

Exercice 1 Généralités ♣

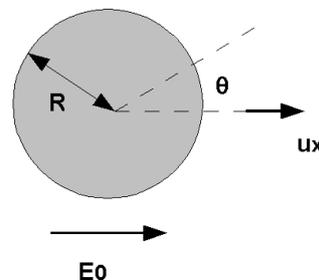
1. Rappeler les expressions des équations de Maxwell, et les expressions des potentiels vecteur \vec{A} et électrique V en fonction des champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} . Dédire des équations de Maxwell les équations de propagation vérifiées par les potentiels en prenant la jauge de Lorenz $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$.
 (* Que deviennent ces équations dans la jauge de Coulomb $\text{div } \vec{A} = 0$? *)
2. Rappeler l'expression des potentiels $V(\vec{r}, t)$ et $\vec{A}(\vec{r}, t)$ en fonction des sources de champ électromagnétique : $\rho(\vec{r}, t)$ et $\vec{j}(\vec{r}, t)$. En déduire les formules donnant les champs \vec{E} et \vec{B} dans le cas statique. (* Que deviennent ces équations dans le cas non statique ? *)

Exercice 2 Sphère sous influence

On considère une boule conductrice de rayon R maintenue au potentiel nul et plongée dans un champ électrique extérieur uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$. Il se produit un phénomène d'influence qui amène un déplacement des charges dans le conducteur et la production d'un champ par la sphère, qui s'ajoute au champ extérieur. On recherche l'expression du potentiel et du champ électrique total en tout point à l'extérieur, ainsi que la distribution des charges sur la sphère, à l'équilibre. (* *Quid des charges en volume dans le conducteur ? Quel est le temps caractéristique d'évolution de ces charges ?* *)

Équivalence de deux problèmes de Laplace ;
 Approximation dipolaire

1. Déterminer qualitativement la nature (signe) des charges sur la sphère.
- ♣ 2. Proposer une superposition de deux champs simples décrivant le champ total à l'extérieur de la sphère.
3. Déterminer la densité de charge sur la sphère.
4. Tracer les lignes de champs.
 (* Comment calculer leurs équations ? *)



Exercice 3 Interaction molécule-paroi

1. Une particule de charge q est située en un point A à distance z d'un plan métallique maintenu au potentiel nul. Justifier que le potentiel et le champ dans le demi-espace où se trouve la charge peuvent être calculés comme ceux créés dans le vide par deux charges : q en A et $-q$ en A', symétrique de A par rapport au plan (particule image).
- ♣ 2. Déterminer la charge portée par la surface. Interpréter.
3. On remplace la charge précédente par un dipôle permanent \vec{p} . Calculer l'énergie d'interaction du dipôle avec la paroi. En moyennant sur les différentes directions possibles du dipôle, supposées équiprobables, montrer que l'énergie d'interaction molécule - paroi se met sous la forme $-K/z^3$.

Méthode des images

Moyenne angulaire

Partie 2 : Ondes électromagnétiques

Exercice 4 Épaisseur de peau

Un conducteur de conductivité σ occupe le demi-espace $z > 0$. Une onde électromagnétique de pulsation ω est envoyée depuis le vide vers le métal. On la suppose polarisée selon \vec{u}_y .

1. Pour quelle gamme de fréquence peut-on négliger le courant de déplacement ?
2. Pour quelle gamme de fréquence peut-on affirmer qu'un métal soumis à une onde électromagnétique reste électriquement neutre ?
3. Dans l'ARQS, établir alors l'équation vérifiée par le champ $\vec{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \vec{u}_y$. Trouver la forme générale des solutions pour une onde en incidence normale et faire apparaître une longueur caractéristique d'absorption appelée *épaisseur de peau*. Application numérique pour le cuivre et une onde de fréquence 50 Hz, 10^9 Hz et $5 \cdot 10^{14}$ Hz. (* À quoi correspondent ces fréquences ? *)

Exercice 5 Ondes évanescentes

On considère un milieu diélectrique occupant le demi-espace $z < 0$, d'indice n . Une onde électromagnétique de pulsation ω est envoyée depuis ce milieu vers le vide (ou l'air). On la suppose polarisée selon \vec{u}_y et on se place maintenant dans la situation où l'onde arrive avec une incidence θ_i par rapport à la normale au dioptre telle qu'il y ait *réflexion totale*.

1. Montrer tout d'abord que, pour le vecteur d'onde transmis dans le vide, $k_{tx} > |k_t|$ (oui oui vous avez bien lu). Que peut-on en déduire ?
2. En déduire la structure de l'onde dans le milieu. On s'intéressera plus particulièrement au vecteur de Poynting : quelle puissance instantanée passe à travers une surface de normale \vec{u}_z ? Y a-t-il propagation ? Où l'onde réfléchie est-elle restituée ?
3. Que se passerait-il si le milieu n'occupait qu'une tranche finie de l'espace ? (* À quel phénomène quantique cela vous fait-il penser ? *)

Exercice 6 Pression de radiation

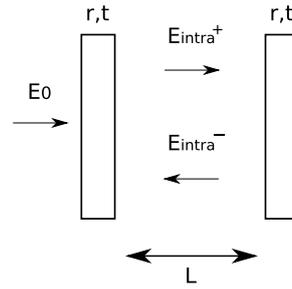
Un milieu métallique occupe le demi-espace infini $x > 0$. On envoie à la surface de ce métal une onde électromagnétique plane monochromatique, polarisée selon \vec{u}_y et notée $\vec{E}_i = \Re(\vec{E}) = E_0 \Re(e^{i(kx - \omega t)}) \vec{u}_y$.

1. Exprimer le champ magnétique incident. Expliquer qualitativement comment cette onde incidente peut exercer une force sur le métal.
2. Donner la densité volumique de force $\langle \vec{f} \rangle_t$ moyenne¹, en fonction des champs $\vec{E}_m = E_m(x, t) \vec{u}_y$ et $\vec{B}_m = B_m(x, t) \vec{u}_z$ dans le métal et de leurs dérivées. Calculer ensuite la force totale exercée sur le métal sur une tranche de section S et montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de la densité d'énergie électromagnétique à la surface du métal. Faire apparaître la pression de radiation.
3. Dans le cadre d'un modèle surfacique, relier la pression de radiation à la puissance du faisceau incident (* La difficulté est ici d'évaluer le champ à l'interface. Comment garder un modèle de courants surfaciques (interface d'épaisseur nulle) ? Comment peut-on faire autrement ? *). Quelle est la pression exercée par un faisceau laser de $10 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ sur un métal parfait ?
4. Interprétation corpusculaire. Exprimer la force en fonction du flux de photons incidents. Interpréter en terme de corpuscule. Quelle serait la valeur de la pression de radiation si le milieu était parfaitement absorbant ?

Approximation
surfacique et
calcul à
l'interface

1. moyenne temporelle

5. Mémoire optique. On considère un Fabry-Pérot de coefficients de réflexion et de transmission en amplitude r et t respectivement, supposés réels.



♣ (a) Exprimer le rapport de l'intensité intracavité sur l'intensité incidente $G = I_{\text{intra}}^+ / I_0$ et le représenter en fonction de $\varphi = 2kL$. Faire apparaître la finesse \mathcal{F} de l'appareil. (* *Ordre de grandeur de \mathcal{F} pour un interféromètre de (haute) précision ?* *)

♣ (b) Exprimer en fonction de \mathcal{F} la variation minimale δL de la longueur du Fabry-Pérot que l'on peut détecter avec un tel dispositif interférentiel. De même en fonction du facteur de qualité Q dont on rappellera la définition. Retrouver alors la relation entre facteur de qualité et finesse. Faire apparaître l'ordre d'interférence p . (* *À quel ordre travaille-t-on en laboratoire pour résoudre une raie atomique ? De quelle finesse a-t-on besoin ?* *)

(c) On suppose maintenant qu'un des miroirs est libre de se déplacer selon l'axe optique, par exemple s'il est relié à un ressort de raideur κ . Exprimer le déplacement ΔL du miroir sous l'effet de la pression de radiation.

(d) On suppose que la longueur de la cavité a été choisie pour être un minimum de G . Montrer qu'il y a bistabilité du système lorsque l'on fait varier la puissance incidente. Étudier la stabilité des points de fonctionnement. Comment peut-on utiliser ce système pour constituer une *mémoire optique* ?

Exercice 7 Polarisation et photon

Une onde électromagnétique a pour champ électrique en notations complexes

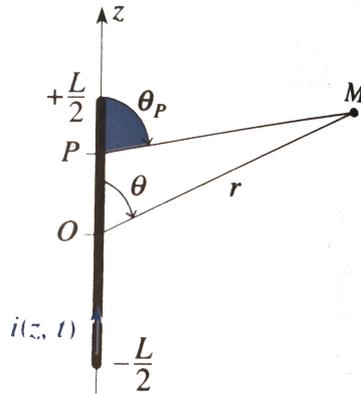
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} (\vec{u}_x + i\vec{u}_y).$$

1. Caractériser sa polarisation.
2. Cette onde interagit avec un atome dont le noyau est supposé fixe. On modélise cet atome par un électron élastiquement lié : la force de rappel vaut $-m\omega_0^2 \vec{r}$. Il est par ailleurs soumis à une force de frottement $-1/\tau m \dot{\vec{r}}$. Calculer sa mobilité μ définie par $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \mu \vec{E}$.
3. Calculer la puissance moyenne cédée à l'atome par l'onde.
4. Calculer le moment moyen de la force qu'exerce l'onde sur l'atome.
5. En adoptant le point de vue corpusculaire, déterminer le moment cinétique des photons propageant une telle onde. (* *Comment appelle-t-on ce «moment cinétique» ? Combien d'«états» différents lui sont associés ?* *)

Les questions suivantes sont facultatives, ne seront pas corrigées pendant le TD, et demandent des connaissances en mécanique quantique.

6. * *Quel formalisme peut-on alors utiliser pour représenter une telle onde ? Écrire l'état correspondant à une polarisation linéaire, circulaire et elliptique. Comment faire pour une onde partiellement polarisée ?*
7. *Dans ce même formalisme, écrire l'action d'un polariseur d'angle quelconque (commencer par un cas simple !). Comment appelle-t-on un tel objet ? Rapprocher cette action du concept de «mesure». En quoi l'analogie n'est-elle pas complète ? Quel autre appareil s'y prêterait mieux ? Retrouver la loi de Malus en lumière totalement ou partiellement polarisée.*
8. *Idem dans le cas d'une lame à faces parallèles et d'un milieu à pouvoir rotatoire. Dans ces deux derniers cas, comment écrirait-on une équation d'évolution ? **

Exercice 8 Rayonnement d'une antenne demi-onde



L'expression du champ de rayonnement ($r \gg \lambda$) d'un dipôle placé à l'origine d'un système de coordonnées sphériques est :

$$\vec{E} = c\vec{B}(\vec{r}, t) \wedge \vec{e}_r \tag{VIII.1}$$

avec

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \wedge \vec{e}_r}{rc} \tag{VIII.2}$$

où \vec{p} est l'expression du dipôle électrique. Une antenne est constituée d'un fil d'épaisseur négligeable, de centre O et de longueur L , coïncidant avec l'axe (Oz) , auquel un système électronique impose un courant oscillant :

$$i(z, t) = I_0 \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos(\omega t) \tag{VIII.3}$$

soit en notation complexe :

$$\underline{i}(z, t) = I_0 \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) e^{j\omega t} \tag{VIII.4}$$

On observe le rayonnement de cette antenne en un point M , repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ) .

1. Expliquer l'expression du courant $i(z, t)$ dans l'antenne. Indiquer la relation liant la longueur L de l'antenne et la longueur d'onde λ associée au courant $i(z, t)$.
2. Dans la zone de rayonnement, peut-on supposer aussi que la longueur d'onde est très grande devant les dimensions de la source, comme dans le cas du rayonnement dipolaire classique ? Déterminer le champ $d\vec{E}$ créé par en M par un élément de longueur dz situé en un point P d'abscisse z de l'antenne, puis son amplitude complexe $d\underline{E}$.
3. Calculer le champ électrique \vec{E} rayonné au point M .
4. Montrer que le vecteur de Poynting moyen peut se mettre sous la forme $Kf(\theta)\vec{r}/r^3$, où $f(\theta)$ (fonction dont la valeur maximale est 1) est appelée indicatrice de rayonnement de l'émetteur.
5. Donner l'allure du diagramme de rayonnement de l'antenne.
6. Calculer la puissance moyenne totale rayonnée $\langle \mathcal{P} \rangle$, ainsi que la résistance de rayonnement R de l'antenne, définie par $\langle \mathcal{P} \rangle = RI_0^2/2$. Calculer I_0 pour une antenne qui rayonne une puissance moyenne de 1 kW.

Exercice 9 Aspects électromagnétiques de la propagation d'ondes sur une ligne coaxiale

Théorèmes de Gauss et d'Ampère ; Relations de passage ; Impédance, Propagation guidée...

On propose dans ce problème d'examiner différentes représentations de la propagation d'ondes électromagnétiques dans une ligne coaxiale. La ligne est constituée de deux cylindres (1) et (2) de même axe Oz , et de rayons $R_1 = 0,43\text{mm}$ et $R_2 = 1,47\text{mm}$, assimilés à des surfaces parfaitement conductrices. L'isolant entre les conducteurs est un milieu non magnétique de permittivité diélectrique relative $\epsilon_r = 2,25$.

Partie 1 Étude électrostatique

Soit une portion de longueur h de la ligne ; on suppose que les deux conducteurs (1) et (2) sont en équilibre électrostatique et portent respectivement les charges Q et $-Q$ réparties uniformément sur leurs surfaces. (* Quelle information peut-on d'ores et déjà en tirer sur les lignes de champ électrique ? *)

1. Exprimer le champ électrique en tout point. Vérifier les relations de continuité à la traversée des surfaces. (* À partir de quelles équations de Maxwell dérive-t-on ces relations de continuité ? Que deviennent-elles dans le cas d'un milieu quelconque ? Et en régime variable ? *)
2. Exprimer la différence de potentiel entre ces deux conducteurs. En déduire la capacité de la portion de longueur h de la ligne, et la capacité linéique γ de la ligne. Application numérique.
3. Déterminer l'énergie électrostatique emmagasinée dans cette portion. Vérifier le résultat précédent.

Partie 2 Étude magnétostatique

Le conducteur central (orienté selon Oz) constitue le conducteur aller d'un courant électrique d'intensité I ; le conducteur extérieur est alors parcouru par un courant de même intensité circulant en sens inverse. Compte tenu de l'hypothèse d'épaisseur nulle pour les conducteurs, ces courants sont répartis surfaciquement : les densités correspondantes sont uniformes.

1. Exprimer le champ magnétique en tout point de l'espace. Vérifier les relations de continuité sur les surfaces. (* Mêmes questions qu'à la question 1 de la Partie 1 *)
2. Calculer de deux façons différentes l'inductance linéique λ de la ligne. On s'inspirera des questions 2 et 3 de la partie 1.
3. On constate que par rapport à une ligne bifilaire, la ligne coaxiale permet une meilleure indépendance entre des câbles mis côte à côte (diaphonie plus faible). Justifier cette propriété.
4. Les potentiels des conducteurs étant respectivement V_1 et V_2 , déterminer le champ électrique dans l'espace entre les cylindres, puis le vecteur de Poynting. En déduire la puissance transitant à travers une surface à z constant. Interpréter.

Partie 3 Étude en régime variable

On conserve les notations précédentes, mais le courant i dans un conducteur ne présente plus l'uniformité supposée précédemment : les densités surfaciques de courant deviennent fonctions de z et du temps t . On notera donc $i(z, t)$ l'intensité du courant pour le conducteur (1) à la cote z . Les champs électrique et magnétique sont recherchés sous la forme d'une fonction de r , z et du temps t et ont même direction que ceux déterminés dans les études en régime stationnaire.

1. Rappeler l'équation de Maxwell-Gauss. Exprimer alors le champ électrique en fonction de la densité surfacique de charge sur le conducteur intérieur $\sigma_1(z, t)$.
- ♣ 2. À l'aide du théorème d'Ampère (* justifier sa validité *), déterminer l'expression du champ magnétique.
3. Quelles relations fournissent les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday ? En déduire une équation différentielle vérifiée par ces champs. Idem pour $i(z, t)$.
- ♣ 4. Quelle est la forme générale des solutions de cette équation ? Comment appelle-t-on le mode de propagation considéré ? Comparer au cas d'un guide d'onde « creux » (pas de conducteur intérieur), rectangulaire par exemple. Quid de la dispersion ?
5. Retrouver la loi de conservation de la charge.
- ♣ 6. Montrer qu'il est possible de définir une différence de potentiel $u(z, t)$ entre les deux conducteurs à la cote z . Exprimer $u(z, t)$ en fonction de $\sigma_1(z, t)$.
7. Montrer que la puissance rayonnée par le champ électromagnétique s'exprime simplement en fonction de $u(z, t)$ et $i(z, t)$. Commenter.

Partie 4 Modèle à constantes réparties

Une autre description de la propagation des signaux électriques consiste en l'application des lois de l'électrocinétique à une portion de ligne située entre les cotes z et $z + dz$. On modélise alors cet élément comme indiqué figure 9.1. La capacité et l'inductance linéiques ont été calculées dans les deux premières parties.

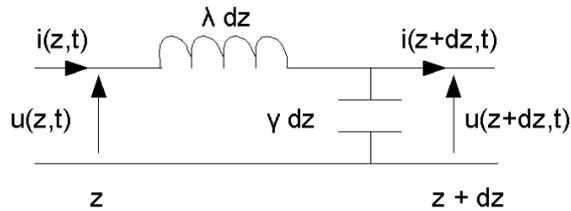


FIGURE 9.1 – Modèle à constantes réparties

1. Relier les dérivées partielles de la tension $u(z, t)$ et du courant $i(z, t)$ par rapport au temps et à la cote z .
2. En déduire l'équation de propagation vérifiée par ces deux signaux et exprimer la célérité des ondes en fonction de l'inductance et de la conductance linéiques. Application au cas d'une ligne coaxiale. Interpréter.
3. La solution générale de l'équation pour $u(z, t)$ s'écrit $u(z, t) = U_i(t - z/c) + U_r(t + z/c)$. Montrer que $i(z, t)$ s'exprime en fonction des mêmes termes et d'une résistance caractéristique R_c que l'on exprimera, puis calculera. (Cette question peut aussi être faite à partir des résultats de la Partie 3 uniquement.)

Partie 5 Réflexion des ondes

On place à l'extrémité de la ligne de cote $z = L$ une charge de résistance R entre les conducteurs (1) et (2), *i.e.* en parallèle de la capacité sur la figure 9.1. On souhaite déterminer le rapport entre les amplitudes instantanées de l'onde réfléchie et de l'onde incidente.

1. À l'aide de la question 4.3, exprimer en fonction de R et R_c le coefficient de réflexion

$$\rho = \frac{U_r(t + L/c)}{U_i(t - L/c)}.$$

2. Déterminer le coefficient de réflexion dans le cas d'un circuit ouvert ($R = \infty$), d'un court-circuit ($R = 0$) et d'une charge *adaptée* ($R = R_c$). Interpréter.
3. On suppose maintenant qu'une seconde ligne coaxiale, semi-infinie, de résistance caractéristique $R_c^{(2)}$, est branchée après la résistance R .
 - (a) Calculer à nouveau le coefficient de réflexion, ainsi que le coefficient de transmission à travers cette résistance. Faire un bilan de puissance.
 - (b) Que se passe-t-il quand $R = \infty$? Commentaires. Analogie optique? (Pour d'autres exemples, cf TP)
4. On revient à la situation de la question 2 et on suppose R nulle. Exprimer $u(z, t)$ et $i(z, t)$ dans le cas d'une onde incidente sinusoïdale d'amplitude A . Comment varient les valeurs efficaces de u et i le long de la ligne à un instant t donné?
5. On suppose $kL \ll 1$. L'approximation semble-t-elle raisonnable? Montrer alors que, vu depuis $z = 0$, le câble se comporte comme une capacité dans le cas d'un circuit ouvert en bout de ligne, comme une inductance dans le cas d'un court-circuit. (* Retrouver ces résultats qualitativement. Analogie mécanique? *)
6. On définit le *taux d'ondes stationnaires* (TOS) comme le rapport des amplitudes du champ électrique aux ventres et nœuds de l'onde, soit

$$\text{TOS} = \frac{|E_{\max}|}{|E_{\min}|}.$$

Calculer le TOS pour les différentes charges étudiées ci-dessus. Exprimer le TOS en fonction de ρ .

Bibliographie concernant l'intérêt des câbles coaxiaux et plus généralement de la propagation guidée :

1. *Physique des ondes, cours et exercices corrigés*, Catherine Botet, AG PhF5 BOT (introduction p.167)

FORMULAIRE RELATIF AUX OPÉRATEURS

Soient U et V deux champs scalaires et \vec{a} et \vec{b} deux champs vectoriels.

1. Formules portant sur un seul champ:

1. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} U) = \vec{\nabla}^2 U$	soit $\vec{\text{div}}(\vec{\text{grad}} U) = \Delta U$
2. $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} U) = \vec{0}$	soit $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} U) = \vec{0}$
3. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) = \vec{0}$	soit $\vec{\text{div}}(\vec{\text{rot}} \vec{a}) = \vec{0}$
4. $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{\nabla}^2 \vec{a}$	soit $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{a}) = \vec{\text{grad}}(\vec{\text{div}} \vec{a}) - \Delta \vec{a}$

2. Formules portant sur deux champs:

5. $\vec{\nabla}(UV) = V\vec{\nabla}(U) + U\vec{\nabla}(V)$	soit $\vec{\text{grad}}(UV) = V\vec{\text{grad}} U + U\vec{\text{grad}} V$
6. $\vec{\nabla} \cdot (U\vec{a}) = \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} U) + U(\vec{\nabla} \cdot \vec{a})$	soit $\vec{\text{div}}(U\vec{a}) = \vec{\text{grad}} U \cdot \vec{a} + U\vec{\text{div}} \vec{a}$
7. $\vec{\nabla} \wedge (U\vec{a}) = (\vec{\nabla} U) \wedge \vec{a} + U(\vec{\nabla} \wedge \vec{a})$	soit $\vec{\text{rot}}(U\vec{a}) = \vec{\text{grad}} U \wedge \vec{a} + U\vec{\text{rot}} \vec{a}$
8. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{b})$	soit $\vec{\text{div}}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{b}$
9. $\vec{\nabla} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{a})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b}$	
soit $\vec{\text{rot}}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{\text{div}} \vec{b})\vec{a} - (\vec{\text{div}} \vec{a})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{b}$	
10. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b}$	
soit $\vec{\text{grad}}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \wedge (\vec{\text{rot}} \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\vec{\text{rot}} \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{b}$	

3. Expressions des opérateurs dans divers systèmes de coordonnées:

a. Gradient:

* cartésiennes: $\vec{\text{grad}} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\vec{e}_z$

* cylindriques: $\vec{\text{grad}} U = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\vec{e}_z$

* sphériques: $\vec{\text{grad}} U = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta}\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_\varphi$

b. Divergence:

* cartésiennes: $\vec{\text{div}} \vec{a} = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$

* cylindriques: $\vec{\text{div}} \vec{a} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r a_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$

* sphériques: $\vec{\text{div}} \vec{a} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r^2 a_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r \sin \theta}\left(\frac{\partial a_\theta \sin \theta}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r \sin \theta}\left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right)$

c. Rotationnel:

* cartésiennes: $\vec{\text{rot}} \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$

* cylindriques: $\vec{\text{rot}} \vec{a} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$

* sphériques:

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (a_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r a_\phi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\phi$$

d. Laplacien:

* cartésiennes: $\Delta U = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)$

* cylindriques: $\Delta U = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)$

* sphériques: $\Delta U = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right)$

4. Action des opérateurs sur le trièdre de base:

a. coordonnées cylindriques:

$$\vec{\text{rot}} \vec{e}_r = \vec{0}; \quad \vec{\text{rot}} \vec{e}_\theta = \frac{\vec{e}_z}{r}; \quad \vec{\text{rot}} \vec{e}_z = \vec{0} \quad \text{pour le rotationnel}$$

$$\text{div} \vec{e}_r = \frac{1}{r}; \quad \text{div} \vec{e}_\theta = 0; \quad \text{div} \vec{e}_z = 0 \quad \text{pour la divergence}$$

b. coordonnées sphériques:

$$\vec{\text{rot}} \vec{e}_r = \vec{0}; \quad \vec{\text{rot}} \vec{e}_\theta = \frac{\vec{e}_\phi}{r}; \quad \vec{\text{rot}} \vec{e}_\phi = \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \vec{e}_r - \frac{\vec{e}_\theta}{r} \quad \text{pour le rotationnel}$$

$$\text{div} \vec{e}_r = \frac{2}{r}; \quad \text{div} \vec{e}_\theta = \frac{1}{r \tan \theta}; \quad \text{div} \vec{e}_\phi = 0 \quad \text{pour la divergence}$$

Corrigé – TD n°1

Sommaire

ELECTROSTATIQUE - MAGNÉTOSTATIQUE	C-1
Exercice 1 Généralités	C-1
Exercice 2 Sphère sous influence	C-3
Exercice 3 Interaction molécule-paroi	C-5
ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES	C-8
Exercice 4 Épaisseur de peau	C-8
Exercice 5 Ondes évanescentes	C-11
Exercice 6 Pression de radiation	C-12
Exercice 7 Polarisation et photon	C-18
Exercice 8 Rayonnement d'une antenne demi-onde	C-21
Exercice 9 Aspects électromagnétiques de la propagation d'onde sur une ligne coaxiale . . .	C-23

Partie 1 : Electrostatique - Magnétostatique

Exercice 1 Généralités

1. Les équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & (\text{Maxwell-Gauss}) & & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (\text{Maxwell-Faraday}) \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & (\text{Maxwell-flux}) & & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (\text{Maxwell-Ampère}) \end{aligned}$$

La contribution de Maxwell a été de rassembler et mettre en forme les résultats de ces prédécesseurs et de rajouter le second terme dit de courant de déplacement à l'équation de Maxwell-Ampère.

De l'équation de Maxwell-flux, on en déduit qu'il existe un vecteur \vec{A} qui vérifie $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ puisque $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$. Ensuite si on étudie l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \operatorname{rot} \vec{A}}{\partial t} \Leftrightarrow \operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} V = \vec{0}$$

où V est une fonction scalaire qu'on a le droit d'introduire puisque $\operatorname{rot} \operatorname{grad} = \vec{0}$. Les deux fonctions \vec{A} et V sont deux quantités appelées respectivement potentiel vecteur et potentiel électrique. Les champs physiques \vec{E} et \vec{B} se déduisent de ces deux fonctions par :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} \end{aligned}$$

À partir de l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{A}) &= \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \operatorname{grad} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}, \\ \text{soit} \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A} &= \mu_0 \vec{j} - \operatorname{grad} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} \right). \end{aligned}$$

A partir de l'équation de Maxwell-Gauss, on obtient

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = -\Delta V - \operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ soit } -\Delta V - \frac{\partial \operatorname{div} \vec{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{I.1})$$

L'opérateur vectoriel Δ renvoie le Laplacien scalaire de chacune des coordonnées du vecteur analysé. Dans la jauge de Lorenz : $\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0$, et donc : $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$.

En appliquant l'opérateur divergence à la relation entre \vec{E} , \vec{A} et V , on obtient l'équation de propagation :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) V = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Complément : transformations de jauge Les transformations de jauge sont des transformations que l'on peut appliquer à un couple de solutions pour les potentiels (V, \vec{A}) sans que cela modifie le couple de solutions (\vec{E}, \vec{B}) correspondants. Cherchons la forme que doit prendre cette transformation (évidemment n'importe quelle transformation mathématique des potentiels ne fonctionne pas). Posons $\vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) +$

$\vec{\alpha}(\vec{r}, t)$ et $V'(\vec{r}, t) = V(\vec{r}, t) + \beta(\vec{r}, t)$ où $\vec{\alpha}$ et β sont des fonctions dont nous allons déterminer la forme pour qu'elles respectent la transformation de jauge. On doit avoir d'une part

$$\vec{B}'(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}'(\vec{r}, t) \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\alpha}(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

donc $\vec{\alpha}$ peut s'écrire sous la forme $\vec{\alpha}(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\text{grad}} \phi(\vec{r}, t)$ puisque $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} = \vec{0}$. Et d'autre part

$$\vec{E}'(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) = -\overrightarrow{\text{grad}} V'(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}'(\vec{r}, t)}{\partial t} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} \beta(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{\alpha}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \vec{0}$$

On en déduit

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left[\beta(\vec{r}, t) + \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] = \vec{0}$$

en tout point de l'espace, dont une solution possible est

$$\beta(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

En résumé, toute transformation des potentiels par une fonction $\phi(\vec{r}, t)$ telle que

$$\begin{aligned} \vec{A}'(\vec{r}, t) &= \vec{A}(\vec{r}, t) + \overrightarrow{\text{grad}} \phi(\vec{r}, t) \\ V'(\vec{r}, t) &= V(\vec{r}, t) - \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

conduit à la même solution pour les champs (\vec{E}, \vec{B}) : c'est une transformation de jauge.

Les potentiels sont donc définis à une jauge près. Cette liberté dans la théorie électromagnétique peut être utilisée pour simplifier les équations en choisissant une jauge (un ϕ) qui nous arrange. Pour travailler sur la propagation des champs, le choix de condition de jauge de Lorenz est un choix judicieux car alors les deux potentiels obéissent à des équations de d'Alembert avec des termes sources ρ et \vec{j} simples. Ce choix de condition de jauge correspond à choisir une fonction ϕ telle que $\square \phi = 0$ (avec \square l'opérateur d'Alembertien).

Le choix de condition de jauge de Coulomb ($\text{div} \vec{A} = 0$) est judicieux pour l'électrostatique car on retrouve l'équation de Poisson $\Delta V = -\rho/\epsilon_0$, mais au prix de l'équation différentielle pour \vec{A} qui se complexifie et reste couplée à V . Dans ce cas on a $\Delta \phi = 0$.

2. Dans la jauge de Lorenz, les solutions pour les potentiels s'écrivent :

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3 \vec{u} \frac{\rho(\vec{u}, t - |\vec{r} - \vec{u}|/c)}{|\vec{r} - \vec{u}|} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint d^3 \vec{u} \frac{\vec{j}(\vec{u}, t - |\vec{r} - \vec{u}|/c)}{|\vec{r} - \vec{u}|}.$$

Le calcul de ces solutions de propagation, long et complexe, est basé sur les fonctions de Green (voir *Electrodynamique classique*, Jackson, section 6.4). Dans la limite statique des potentiels retardés :

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3 \vec{u} \frac{\rho(\vec{u}, t)}{|\vec{r} - \vec{u}|} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint d^3 \vec{u} \frac{\vec{j}(\vec{u}, t)}{|\vec{r} - \vec{u}|}.$$

On utilise alors

$$\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{u}|} \right) = -\frac{\vec{r} - \vec{u}}{|\vec{r} - \vec{u}|^3}$$

pour calculer les champs dans le régime statique :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}} V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3 \vec{u} \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}} \left(\frac{\rho(\vec{u})}{|\vec{r} - \vec{u}|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3 \vec{u} \frac{\rho(\vec{u})}{|\vec{r} - \vec{u}|^2} \frac{\vec{r} - \vec{u}}{|\vec{r} - \vec{u}|}.$$

Pour le champ magnétique, on utilise en plus $\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{a}) = f\overrightarrow{\text{rot}}\vec{a} + \overrightarrow{\text{grad}}f \wedge \vec{a}$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{rot}}_{\vec{r}} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint d^3 \vec{u} \frac{\vec{j}(\vec{u}) \wedge (\vec{r} - \vec{u})}{|\vec{r} - \vec{u}|^3}.$$

car $\vec{\text{rot}}_{\vec{r}} \vec{j}(\vec{u}) = \vec{0}$.

Dans le cas de distributions surfaciques et linéiques, les expressions deviennent

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint d^2 \vec{u} \frac{\sigma(\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{u}|^2} \frac{\vec{r}-\vec{u}}{|\vec{r}-\vec{u}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int du \frac{\lambda(\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{u}|^2} \frac{\vec{r}-\vec{u}}{|\vec{r}-\vec{u}|},$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint d^2 \vec{u} \frac{\vec{j}_s(\vec{u}) \wedge (\vec{r}-\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{u}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l} \wedge (\vec{r}-\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{u}|^3}.$$

D'après les expressions ci-dessus, \vec{E} est proportionnel à ρ . Donc toute symétrie de ρ est une symétrie de \vec{E} . \vec{B} dépend de \vec{j} via un terme de la forme $\vec{j} \wedge \vec{u}$. Le produit vectoriel dépendant de l'orientation de l'espace, une symétrie négative¹ de \vec{j} est une antisymétrie de \vec{B} . Une symétrie positive de \vec{j} est en revanche une symétrie de \vec{B} .

Complément : cas non statique Si les termes sources dépendent du temps, alors le champ \vec{E} se réécrit

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

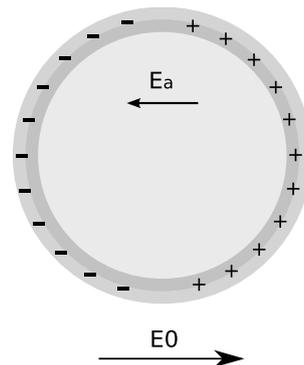
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3 \vec{u} \left[\frac{\vec{r}-\vec{u}}{|\vec{r}-\vec{u}|} \left(\frac{\rho(\vec{u}, t - |\vec{r}-\vec{u}|/c)}{|\vec{r}-\vec{u}|^2} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{u}|c} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{u}, t - |\vec{r}-\vec{u}|/c) \right) - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{u}|c^2} \frac{\partial \vec{j}(\vec{u}, t - |\vec{r}-\vec{u}|/c)}{\partial t} \right] \quad (\text{I.2})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\text{rot}}_{\vec{r}} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint d^3 \vec{u} \left[\frac{\vec{j}(\vec{u}, t - |\vec{r}-\vec{u}|/c)}{|\vec{r}-\vec{u}|^3} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{u}|^2 c} \frac{\partial \vec{j}(\vec{u}, t - |\vec{r}-\vec{u}|/c)}{\partial t} \right] \wedge (\vec{r}-\vec{u}) \quad (\text{I.3})$$

Ce sont les équations de Jefimenko. Dans la formule de \vec{E} , le second terme vient de la dérivée composée du terme de retard de $\rho(\vec{u}, t - |\vec{r}-\vec{u}|/c)$ (voir *Electrodynamique classique*, Jackson, section 6.5), et le troisième de la dérivée temporelle de \vec{A} . On s'aperçoit donc qu'une variation de courant peut générer un champ électrique. Ce fait est bien connu pour les particules chargées car on sait qu'une particule chargée accélérée émet un rayonnement synchrotron, or une variation de courant correspond justement à l'accélération de charges électriques.

Exercice 2 Sphère sous influence

1. En présence du champ électrique permanent \vec{E}_0 , les charges de la sphère conductrice se déplacent vers la surface du conducteur, jusqu'à créer un champ antagoniste \vec{E}_a tel que le champ électrique à l'intérieur du conducteur soit nul. Le système atteint alors son état d'équilibre. Les charges ne sont donc plus qu'en surface et sont réparties qualitativement comme montré sur la figure ci-contre. Elles assurent la transition entre le champ extérieur non nul et le champ intérieur nul.



Si l'on s'intéresse aux charges volumiques dans le conducteur, en écrivant la loi de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad (\text{II.1})$$

et en utilisant le fait que dans un conducteur $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho = 0.$$

1. Une isométrie négative transforme une base directe de l'espace en une base indirecte : symétrie par rapport à un plan ou un point par exemple ; une rotation est une isométrie positive.

ρ est donc une fonction exponentiellement décroissante du temps, avec une constante de temps $\tau = \epsilon_0/\sigma \approx 10^{-19}$ s. On ne peut donc manifestement pas imposer de densité volumique de charges dans le conducteur, et les seules charges à considérer sont en surface.

2. La distribution de charges telle que représentée nous fait songer à un dipôle électrique, placé au centre de la sphère. Nous allons donc essayer² de trouver un dipôle \vec{p} *ad hoc*, tel que le potentiel qu'il crée soit le même que celui de la sphère, en présence de \vec{E}_0 . Nous avons donc deux problèmes : une sphère conductrice maintenue au potentiel nul, dans le champ \vec{E}_0 ; et un dipôle \vec{p} inconnu dans le même champ électrique.

À quelle condition pourra-t-on dire que ces deux situations sont équivalentes, *i.e.* que le potentiel $V(\vec{r})$ à l'extérieur de la sphère est le même ? Il est, dans les deux problèmes, solution de l'équation de Poisson qui, à l'extérieur de la sphère, s'écrit

$$\Delta V(\vec{r}) = 0.$$

L'expression du potentiel ne dépend donc que des conditions aux limites du domaine, *i.e.* $r = R$ et $r = \infty$. Si elles sont identiques pour les deux situations envisagées, alors V aura même expression pour les deux problèmes.

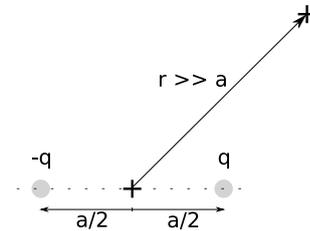
Dans le cas de la sphère conductrice, les conditions aux limites sont

$$V(r = R) = 0, \tag{II.2}$$

$$V(r \rightarrow \infty) = -\vec{r} \cdot \vec{E}_0 = V_0(\vec{r}). \tag{II.3}$$

avec $V_0(\vec{r}) = -\vec{r} \cdot \vec{E}_0$. Il faut donc trouver, si elle existe, la valeur du dipôle \vec{p} telle qu'en $r = R$, $V_{\text{dipôle}} + V_0(R) = 0$. À l'infini, le potentiel créé par un dipôle peut être choisi comme nul et la seconde condition aux limites est donc vérifiée quel que soit \vec{p} .

Calculons donc dans un premier temps le potentiel créé par un dipôle \vec{p} en tout point de l'espace. C'est par exemple celui créé par deux charges q et $-q$, séparées d'une distance a , dans l'approximation dipolaire : on se place dans la situation où a est très petite devant la distance r au point d'observation, et on ne garde que le terme de premier ordre en $r/a \ll 1$ (terme dipolaire, le terme de second ordre serait le terme quadripolaire. Rappelons par ailleurs qu'un dipôle est une distribution de charges $\{q_i\}$ telle que $\sum_i q_i = 0$ et $\sum_i q_i \vec{r}_i = \vec{p} \neq 0$).



On a donc

$$V_d(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{|\vec{r} + \vec{d}/2|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{d}/2|} \right).$$

Or,

$$|\vec{r} + \vec{d}/2|^2 = r^2 + a^2/4 + \vec{r} \cdot \vec{d} \approx r^2 \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^2} \right) \Rightarrow |\vec{r} + \vec{d}/2| \approx r \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{2r^2} \right) = r + \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{2r}$$

au premier ordre en r/a . En injectant cette relation dans l'expression de V , on obtient finalement

$$V_d(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \cdot \vec{d} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Au total, le potentiel électrique en $r \geq R$ est :

$$V_{\text{tot}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} - \vec{E}_0 \cdot \vec{r} = \frac{pr \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} - E_0 r \cos \theta$$

Vérifions alors que l'on peut imposer la condition aux limites $V_{\text{tot}}(r = R) = 0$:

$$V_{\text{tot}}(r = R) = \frac{pR \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} - E_0 R \cos \theta = 0$$

2. *A priori*, on ne peut pas être certain de trouver un dipôle qui vérifie les bonnes conditions. Ce n'est ici qu'une intuition...

qui a pour solution $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0\vec{E}_0R^3$.

On a alors l'expression du potentiel électrique en tout point en dehors de la sphère :

$$V_{\text{tot}}(\vec{r}) = E_0 \left[\left(\frac{R}{r} \right)^3 - 1 \right] r \cos \theta.$$

qui s'identifie bien à $V_0(\vec{r})$ en $r \rightarrow \infty$.

Il est donc possible de trouver un dipôle \vec{p} tel que les deux problèmes considérés aient la même solution, et ce dipôle doit avoir la valeur donnée ci-dessus.

3. Pour calculer la densité surfacique de charges, il suffit alors de calculer le champ électrique au niveau de la surface de la sphère. On obtient sans difficultés

$$\vec{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = E_0 \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \cos \theta \vec{u}_r + E_0 \sin \theta \left[\left(\frac{R}{r} \right)^3 - 1 \right] \vec{u}_\theta,$$

et finalement

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 \left(\vec{E}(r \rightarrow R^+) - \underbrace{\vec{E}(r \rightarrow R^-)}_{\vec{0}} \right) \cdot \vec{u}_r = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

On retrouve par ailleurs la relation $\sigma(\theta) = \vec{P} \cdot \vec{u}_r$.

On vérifie par la même occasion la continuité de la composante tangentielle du champ et le fait que le champ \vec{E} est orthogonal aux équipotentielles.

4. On peut tracer qualitativement les lignes de champ électrique en se plaçant dans les cas limites. Loin de la sphère, les lignes sont droites et parallèles à \vec{E}_0 . En sortant de la sphère, elles sont orthogonales à l'équipotentielle $V = 0$. Entre ces cas limites, il suffit de relier les points.

Pour calculer les équations des lignes de champ, tracées figure 2.1, il faut rechercher l'équation des lignes qui sont localement parallèle au champ. Soit $d\vec{\ell}$ un élément de longueur du fil, on cherche donc à avoir $d\vec{\ell} = C\vec{E}$ avec C une constante. On en déduit en coordonnées cartésiennes par exemple

$$C = \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

qui donnent des équations différentielles à intégrer pour trouver les équations des lignes de champ. Une manière équivalente d'écrire cela est de considérer $d\vec{\ell} \wedge \vec{E} = \vec{0}$ qui redonne les mêmes équations. On choisit alors un jeu de coordonnées adapté à la symétrie du problème. Dans le cas étudié ici, l'intégration n'est pas très simple en raison de la présence du champ externe. On arrive, en coordonnées sphérique à l'équation

$$\frac{R^3 - r^3}{2R^3 + r^3} \frac{dr}{r} = \frac{d \sin \theta}{\sin \theta}$$

Exercice 3 Interaction molécule-paroi

1. Comme pour l'exercice précédent, montrer que deux situations sont équivalentes revient à montrer que les conditions aux limites du domaine sont les mêmes, l'équation sur le potentiel étant identique dans les deux cas (équation de Laplace). Dans le cas d'une particule chargée et d'un plan infini conducteur maintenu au potentiel nul, il faut trouver une distribution de charge pour laquelle le potentiel est nul à l'endroit où se trouve le plan dans le problème initial. Si l'on considère deux charges opposées, symétriques l'une de l'autre par rapport au plan (qui n'existe plus maintenant), l'une en A, l'autre en A', le potentiel créé par les deux charges en tout point M du plan est

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{A'M} \right) = 0,$$

car M est sur le plan médiateur de [AA'].

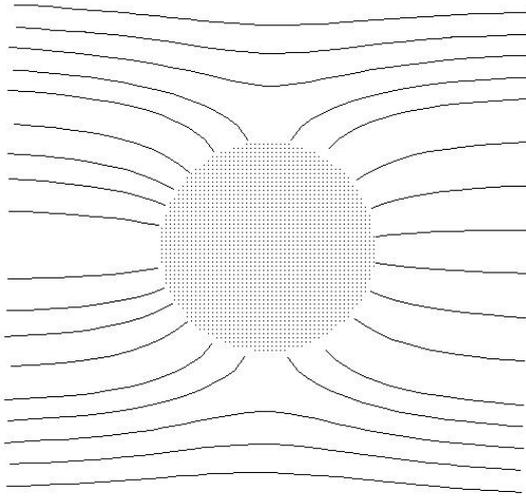


FIGURE 2.1 – Lignes de champ

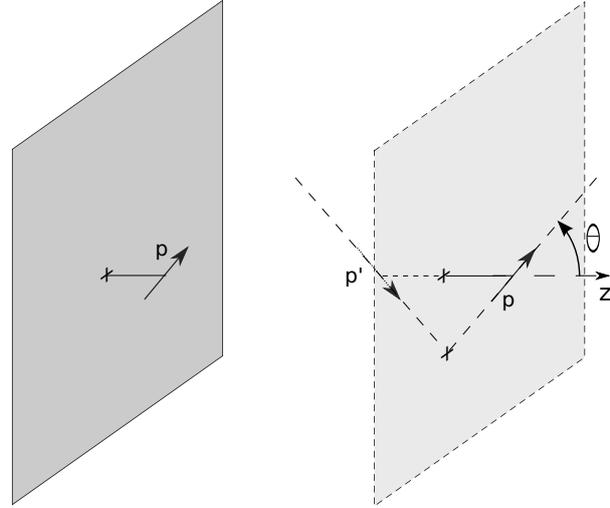


FIGURE 2.2 – Méthode des images

2. Regardons d'abord comment décroît le champ à l'infini. On vient de montrer que le problème est équivalent à deux particules de charges opposées. Elles forment un dipôle électrique pour lequel E varie comme $1/r^3$. Considérons alors une surface Σ quelconque (par exemple une sphère), de taille caractéristique R , englobant la particule q , et intersectant le plan. D'après le théorème de Gauss, le flux du champ électrique à travers $\Sigma(R)$ est

$$\Phi(R) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{q + Q_{\text{plan}}(R)}{\epsilon_0},$$

où $Q_{\text{plan}}(R)$ est la charge contenue dans la surface du plan interceptée par $\Sigma(R)$. Si l'on fait tendre R vers l'infini, alors

$$\Phi \rightarrow \frac{q + Q_{\text{plan}}(R \rightarrow \infty)}{\epsilon_0} = \frac{q + Q_{\text{plan}}}{\epsilon_0},$$

où Q_{plan} est la charge contenue sur tout le plan.

Or, l'aire de la surface $\Sigma(R)$ croissant en R^2 , tandis que le champ électrique décroît en $1/R^3$ (du côté de la charge, dans le conducteur il est carrément nul !), le flux $\Phi(R)$ tend vers 0 quand R tend vers l'infini. On en déduit immédiatement que le conducteur porte la charge $Q_{\text{plan}} = -q$!

On aurait également pu remarquer que les deux charges du problème analogue sont en *influence totale* : toutes les lignes de champ partant de A arrivent en A' et inversement. Dans le problème initial, du côté de la charge, les lignes de champ sont inchangées. Toutes les lignes de champ partant de A arrivent donc nécessairement sur le plan, et inversement. Le plan et la charge sont aussi en influence totale, et portent donc des charges opposées : $Q_{\text{plan}} = -q$.

Complément : on peut faire le calcul de la densité de charge en un point P du plan. On utilise la relation de passage au voisinage du plan, en utilisant que le champ électrique est nul dans le conducteur, on obtient $\sigma(P) = \epsilon_0 \vec{E}(P) \cdot \vec{n}$ avec \vec{n} le vecteur normal à la surface. Le calcul du champ en P se fait sans difficulté grâce à la méthode des images :

$$\vec{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{AA}'}{AP^3}$$

En coordonnées cylindriques autour de l'axe perpendiculaire au plan passant par A , cela donne

$$\sigma(P) = -\frac{q}{2\pi} \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

qui s'intègre aisément entre $r \in [0, +\infty]$ pour redonner $Q_{\text{plan}} = \int_0^\infty 2\pi r dr \sigma(P) = -q$.

3. À partir de la question 1, il vient immédiatement que les deux situations Fig. 2.2 sont équivalentes, le dipôle \vec{p}' étant l'antisymétrique de \vec{p} par rapport au plan conducteur (considérer \vec{p} comme formé de deux charges opposées).

L'énergie électrostatique du dipôle pour une orientation donnée (fixée par les deux angles θ et ϕ des coordonnées sphériques, l'axe z étant choisi comme sur la FIG. 2.2) est donnée par³

$$\vec{E}' = -\vec{\text{grad}} V'_d = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{2p' \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ \frac{p' \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{array} \right) \quad (\text{III.1})$$

$$\mathcal{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E}' = -p \left(\begin{array}{c} \cos \theta \\ \sin \theta \end{array} \right) \cdot \frac{p'}{4\pi\epsilon_0 (2z)^3} \left(\begin{array}{c} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \end{array} \right) = -\frac{p^2}{32\pi\epsilon_0 z^3} (1 + \cos^2 \theta).$$

Il faut maintenant moyenner sur toutes les orientations possibles du dipôle :

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \mathcal{E}(\theta)}{\underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi}_{4\pi}} = -\frac{p^2}{24\pi\epsilon_0 z^3}.$$

3. Le dipôle \vec{p} n'interagit pas avec le champ qu'il crée, c'est donc bien \vec{E}' seulement qu'il faut mettre dans l'expression de l'énergie d'interaction. Le calcul de $-\vec{p} \cdot \vec{E}$ donnerait le même résultat.

Partie 2 : Ondes électromagnétiques

Exercice 4 Épaisseur de peau

1. Ordres de grandeur :

$$\begin{aligned} \text{Courant de déplacement : } & \left\| \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \approx \frac{\omega}{c^2} E, \\ \text{Courant de conduction : } & \left\| \mu_0 \vec{j} \right\| \approx \mu_0 \sigma E \end{aligned}$$

Rappelons l'expression de la conductivité électrique dans un régime sinusoïdal quelconque, à l'aide du modèle de Drude. Soit des électrons (masse m) dans un métal, de densité électronique n , soumis à un champ électrique \vec{E} en régime sinusoïdal. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un des électrons donne :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{\vec{p}}{\tau}$$

où τ est le temps de libre parcours moyen des électrons entre deux collisions avec des ions du réseau métallique. C'est donc le temps typique d'interaction entre le gaz d'électrons et son support, de l'ordre de 10^{-14} s. Après un passage en notation complexe, on obtient rapidement :

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{-e\tau}{1 + i\omega\tau} \vec{E}$$

Le courant électronique est donné par $\vec{j} = -ne\vec{v}$. En posant la conductivité statique $\sigma_0 = ne^2\tau/m$, on obtient la conductivité complexe $\underline{\sigma}(\omega)$ valable en régime sinusoïdal quelconque :

$$\underline{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}, \quad \vec{j} = \underline{\sigma}(\omega)\vec{E}$$

Comparons maintenant les courants de déplacement et de conduction. On est dans le régime de l'ARQS : tous les temps de propagation des différentes quantités électromagnétiques sont négligeables devant leurs périodes d'oscillation. En particulier, on a donc $\vec{j} = \sigma_0\vec{E}$ ce qui impose $\omega \ll 1/\tau$. Vérifions que dans ce régime, le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction :

$$\frac{\omega}{c^2} E \ll \mu_0 \sigma_0 E \Rightarrow \omega \ll \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \approx 10^{18} \text{ Hz}$$

ce qui est donc vérifié puisque $1/\tau \approx 10^{14}$ Hz. Dans le cas où $\omega \ll 1/\tau$, alors le courant de déplacement est négligeable.

Cependant, on peut montrer que le courant de déplacement peut être négligeable sur une plage de fréquence plus large :

$$\frac{\omega}{c^2} E \ll \mu_0 \sigma E \Rightarrow \omega \|1 + i\omega\tau\| \ll \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

Si on propose que $\omega \gg 1/\tau$, le courant de déplacement reste négligeable si $\omega^2 \ll \sigma_0/\epsilon_0\tau = \omega_p^2$ avec ω_p la pulsation plasma qui vaut de l'ordre de 10^{16} Hz⁴. Le courant de déplacement reste donc négligeable dans la gamme $1/\tau \ll \omega \ll \omega_p$, mais n'est donc plus négligeable dans la gamme des rayons X.

2. Rappelons également l'origine de l'électro-neutralité dans un conducteur en régime sinusoïdal : en écrivant la conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

4. De manière générale, pour les métaux on a $1/\tau = 0.01\omega_p$.

et en utilisant $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ et $\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0$ (deux équations valables dans tout régime sinusoïdal), on obtient en complexe :

$$\text{div } \vec{j} = \sigma \text{div } \vec{E} = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} &= 0 \Rightarrow j\omega \rho + \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \\ &\Rightarrow -\omega^2 \rho + \frac{i\omega}{\tau} \rho + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \tau} \rho = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p^2 \rho = 0 \text{ avec } \omega_p^2 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \tau} = \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \end{aligned}$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique amorti de pulsation propre ω_p , la pulsation plasma. On considère que le milieu est excité par une onde électromagnétique de pulsation ω , un milieu métallique initialement neutre électriquement peut-il encore rester neutre ? L'onde électromagnétique crée des courants de conduction dans le métal. Regardons comment évolue la densité de charge électrique en régime sinusoïdal forcé :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p^2 \rho = 0 \Leftrightarrow \left(\omega_p^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau} \right) \rho = 0$$

Cette dernière équation est vérifiée pour tout ω par $\rho = 0$, sauf lorsque le facteur de gauche s'annule. Dans ce cas l'électroneutralité du milieu peut être brisée par l'onde électromagnétique car $\rho \neq 0$ est solution. On a donc

$$\omega_p^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau} = 0 \Rightarrow \Delta = -\frac{1}{\tau^2} + 4\omega_p^2 \quad (\text{IV.1})$$

Or, en pratique on mesure que $\omega_p \approx 100/\tau$, donc la solution $\rho(\omega) \neq 0$ est possible pour les pulsations :

$$\omega_{\pm} = \frac{-\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\Delta}}{-2} \approx -\frac{i}{2\tau} \mp \omega_p \approx \mp \omega_p \quad (\text{IV.2})$$

Ainsi, on montre qu'un métal soumis à une onde électromagnétique peut être localement non neutre s'il est excité à sa pulsation plasma.

Considérons maintenant que pour une raison quelconque une perturbation vient localement charger le milieu. Si à l'instant $t = 0$, on a une distribution de charge électrique $\rho_0(\vec{r})$ non nulle, elle évoluera localement selon $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r})e^{-t/\tau} \cos(\omega_p t)$ d'après l'équation de l'oscillateur amorti. Pour des ondes électromagnétiques de basses pulsations $\omega \ll 1/\tau$, alors cette perturbation de charge se résorbe très rapidement en $e^{-t/\tau}$, donc le milieu reste neutre pour ces ondes basse fréquence. Dans le régime $1/\tau \ll \omega \ll \omega_p$, les collisions des électrons avec le matériau ne suffisent plus à rétablir la neutralité immédiatement à l'échelle de la période de l'onde électromagnétique. Toutefois, la fréquence d'oscillation d'une perturbation de charge lors de son retour à l'équilibre s'effectue à la pulsation ω_p . La moyenne temporelle de la densité de charge ρ à l'échelle de temps $1/\omega \gg 1/\omega_p$ reste donc nulle : le milieu est encore considéré neutre vis à vis de l'onde étudiée. Par contre, dans le cas $\omega \geq \omega_p$, les oscillations de densité de charge ρ sont à considérer aux échelles de temps $1/\omega$ étudiées.

Conclusion :

- (a) une onde électromagnétique préserve l'électroneutralité d'un métal ou d'un plasma si sa pulsation ω est différente de la pulsation plasma ω_p
- (b) si une perturbation locale de charge préexiste dans le milieu, on peut considérer le milieu neutre vis à vis de l'onde électromagnétique seulement tant que $\omega \ll \omega_p$

Les ordres de grandeur obtenus pour les courants de déplacement et de conduction nous suggèrent que nous travaillons dans le régime de l'ARQS magnétique à l'intérieur du conducteur (évidemment pas dans la région vide où l'onde se propage !). On pourra le vérifier a posteriori en évaluant l'ordre de grandeur du champ magnétique dans le conducteur par rapport au champ électrique. Physiquement, cela signifie que ce sont les courants induits par l'onde incidente qui vont dominer et dissiper son énergie, conduisant à son atténuation par effet Joule. Dans un diélectrique, la situation est différente, l'onde va continuer de se propager en faisant fluctuer la polarisation locale (ϵ_r) et les courants liés (μ_r) mais ces phénomènes ne sont pas dissipatifs (ou très peu).

En conclusion, il faut retenir qu'il existe trois régimes décrivant le comportement d'un métal soumis à une onde électromagnétique, car les métaux sont caractérisés par deux temps caractéristiques τ et $1/\omega_p$.

	$\omega \ll 1/\tau$	$1/\tau \ll \omega \ll \omega_p$	$\omega \gg \omega_p$
ARQS	oui	non	non
Neutralité	oui	oui	oui sauf à ω_p
Physique	Pénétration amortie de l'onde EM dans le métal : effet de peau	Le matériau ne suit plus, les électrons se comportent comme dans un plasma de fréquence de coupure ω_p : onde évanescente dans le métal et réflexion totale	Les électrons ne suivent plus non plus, le métal devient transparent à l'onde EM : propagation non amortie

3. Dans l'ARQS, on a $\sigma \approx \sigma_0$, et on écrit

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\vec{\text{rot}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \mu_0 \sigma \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\frac{\partial \mu_0 \sigma_0 \vec{E}}{\partial t}$$

d'où

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}.$$

On trouve les mêmes équations pour \vec{B} et \vec{j} . Il ne s'agit pas vraiment d'équations de propagation mais d'équations de diffusion.

Pour une onde plane progressive monochromatique en incidence normale, $\vec{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \vec{u}_y$. On obtient alors la relation de dispersion :

$$k^2 = i\mu_0 \sigma_0 \omega$$

On a deux solutions

$$k_{\pm} = \pm \sqrt{\mu_0 \sigma_0 \omega} e^{i\pi/4} = \pm(1+i)/\delta.$$

où

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}} = \sqrt{\frac{2c^2}{\omega_c \omega}} \quad (\text{IV.3})$$

est appelée *épaisseur de peau*. La solution générale pour le champ électrique s'écrit donc

$$E = E_+ e^{-z/\delta} e^{i(z/\delta - \omega t)} + E_- e^{z/\delta} e^{i(-z/\delta - \omega t)}. \quad (\text{IV.4})$$

Le champ est donc la somme d'une onde se propageant selon les z croissants et d'une onde se propageant selon les z décroissants, toutes deux étant absorbées sur une longueur δ dans leur sens de propagation.

	f (Hz)	δ
Pour $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, on obtient :	50 (secteur)	2 cm
	10^9 (GSM)	5 μm
	$5 \cdot 10^{14}$ (visible)	8 nm

Complément : structure de l'onde dans le conducteur – on peut attribuer une longueur d'onde effective $\lambda = 2\pi\delta \approx 6\delta$ ainsi qu'une vitesse de phase effective $v_\phi = \omega\delta$ à l'onde qui diffuse dans le conducteur. L'onde n'oscille quasiment pas avant d'être atténuée. En utilisant $\vec{B} = (\vec{k} \wedge \vec{E})/\omega$, on trouve pour le champ magnétique (en supposant qu'il n'y a pas d'onde venant de la droite) :

$$\vec{B} = -\frac{\sqrt{2}E_0}{v_\phi} e^{-z/\delta} \cos(kz - \omega t + \pi/4) \vec{u}_x$$

Le champ magnétique est donc déphasé de $\pi/4$, soit $\lambda/8$. Le vecteur de Poynting est dirigé selon \vec{u}_z mais avec un facteur $e^{-2z/\delta}$ qui traduit l'absorption de l'onde diffusant dans le milieu (la majorité de l'énergie est réfléchie). Enfin, on peut évaluer le rapport des ordres de grandeur des champs dans le milieu

$$\frac{\vec{E}}{c\vec{B}} \approx \frac{v_\phi}{c} = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_c}} \ll 1$$

ce qui semble corroborer les approximations initiales nous ayant suggéré une situation de l'ARQS magnétique.

Exercice 5 Ondes évanescentes

On rappelle tout d'abord que, pour qu'il y ait réflexion totale, il faut que l'indice du milieu d'incidence n_1 soit supérieur à celui du milieu de transmission $n_2 < n_1$. Alors, pour un angle d'incidence $\theta_1 > \theta_0 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$, les lois de Descartes donneraient $\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 > 1$. Il y a *réflexion totale*.

1. Regardons ce qui se passe plus précisément dans le milieu conducteur. On note E_i , E_r et E_t les ondes incidentes, réfléchies et transmises respectivement, et \vec{k}_i , \vec{k}_r et \vec{k}_t leurs vecteurs d'onde.

À l'interface en $z = 0$, le déphasage entre l'onde réfléchie et l'onde incidente s'écrit

$$\delta\phi = \vec{k}_r \cdot \vec{r} - \vec{k}_i \cdot \vec{r} = (k_{rx} - k_{ix})x$$

Or dans cet exercice on considère des ondes planes donc le problème est symétrique par translation selon x . Le déphasage doit donc être physiquement indépendant de x . On en déduit $k_{rx} = k_{ix}$.

De la même façon, on peut montrer que $k_{tx} = k_{ix}$.

Or, $k_{ix} = n \frac{\omega}{c} \sin \theta_i$. Dans le cas de la réflexion totale, on a $n \sin \theta_i > 1$, donc $k_{ix} > \frac{\omega}{c} = |\vec{k}_t|$. Il vient donc que $k_{tx} > |\vec{k}_t|$, qui se réécrit

$$k_{tx}^2 + k_{tz}^2 < k_{ix}^2 \quad \text{d'où} \quad k_{tz}^2 < 0.$$

Finalement, $k_{tz} = ik''$ où $k'' \in \mathbb{R}$.

2. En considérant une onde incidente polarisée selon \vec{u}_y et venant de la gauche, les champs transmis vont s'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 e^{i(k_{ix}x - \omega t)} e^{-k''z} \vec{u}_y \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow i\vec{k} \wedge \vec{E} = +i\omega \vec{B} \\ \vec{B} &= \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{\omega} e^{i(k_{ix}x - \omega t)} e^{-k''z} (k_{ix} \vec{u}_z - ik'' \vec{u}_x) \end{aligned}$$

On en déduit le vecteur de Poynting en repassant en notations réelles.

$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_x + \vec{\Pi}_z = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 \omega} \cos(k_{ix}x - \omega t) e^{-2k''z} [k_{ix} \cos(k_{ix}x - \omega t) \vec{u}_x - k'' \sin(k_{ix}x - \omega t) \vec{u}_z]$$

On obtient que

$$\langle \vec{\Pi} \rangle_t = \langle \vec{\Pi}_x \rangle_t = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega} k_{ix} e^{-2k''z} \vec{u}_x.$$

En moyenne, dans le vide l'énergie se propage donc uniquement le long de Ox , *i.e.* le long de la paroi, et vers les x croissants. Il n'y a pas de propagation selon Oz ce qui est normal car on étudie la réflexion totale. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \Pi_z &= -\frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega} k'' \sin[2(k_{ix}x - \omega t)] e^{-2k''z}, \\ \Pi_x &= \frac{E_0^2}{\mu_0 \omega} k_{ix} \cos^2[(k_{ix}x - \omega t)] e^{-2k''z}. \end{aligned}$$

Ainsi, alors que $\Pi_x \geq 0$ à tout instant, Π_z change de signe périodiquement, avec une période π/ω . L'échange d'énergie se fait donc successivement de l'onde au milieu ($\Pi_z < 0$) et du milieu à l'onde ($\Pi_z > 0$). Cela conduit à un effet de décalage du point de ré-émission de l'énergie réfléchie appelé *effet Goos-Hänchen*. Qualitativement, si un paquet d'onde arrive en un point x de l'interface (énergie de l'onde vers le milieu), son énergie est propagée le long de l'interface (selon x) avant d'être ré-émise (du milieu vers l'onde), correspondant à la réflexion totale du paquet d'onde. Ce déplacement dépend de l'angle d'incidence et de la longueur de pénétration dans le milieu $1/k''$.

3. Si le milieu n'occupait qu'une tranche finie de l'espace, l'onde évanescente au niveau de la seconde interface pourrait redonner naissance à une onde progressive dans le milieu extérieur. L'énergie incidente est alors partiellement transmise. Le coefficient de transmission sera naturellement en $e^{-k''d}$ où d est l'épaisseur du milieu d'indice n_2 . C'est une situation *classique* tout à fait analogue à l'*effet tunnel* bien connu de la physique quantique.

Exercice 6 Pression de radiation

Concernant la pression de radiation, il existe des façons beaucoup plus simples de poser le problème et de le résoudre (voir les nombreux ouvrages classiques d'électromagnétisme). Il m'apparaît néanmoins important de traiter le problème en mentionnant les forces volumiques de Laplace, puis de faire les approximations nécessaires pour simplifier le problème (ARQS, conducteur parfait, etc...). Dans la résolution qui va suivre, l'accent n'est pas mis sur la simplicité et la physique, mais sur les astuces de calculs qu'il est bon de se remémorer.

1. On décrit le champ électromagnétique dans le milieu comme une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_x$ et de pulsation ω , telle que $\vec{\mathcal{E}} = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \vec{u}_y$ (où k peut être complexe pour décrire la décroissance du champ dans le milieu).

L'équation de Maxwell-Faraday permet d'écrire, en notations complexes,

$$\vec{\text{rot}} \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \Leftrightarrow i\vec{k} \wedge \vec{\mathcal{E}} = i\omega \vec{\mathcal{B}} \quad (\text{VI.1})$$

$$\Leftrightarrow \vec{\mathcal{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{\mathcal{E}}}{\omega}. \quad (\text{VI.2})$$

La présence de ce champ variable dans le conducteur induit des courants qui, dans le champ magnétique, subissent une force, la force de Laplace \vec{f}_L . Si on décompose l'émergence de la force de Laplace (cf. figure), on voit que le champ électromagnétique pénètre de quelques longueurs d'épaisseur de peau dans le conducteur (en s'atténuant) mais engendre un courant électrique selon \vec{u}_y . La déviation du courant électronique par la présence du champ magnétique engendre un champ de Hall \vec{E}_H dû au dépeuplement de la surface par les électrons. Les ions de la surface subissent alors une force allant dans le sens du champ de Hall : le conducteur dans son ensemble subit une force allant dans le sens de \vec{k} .

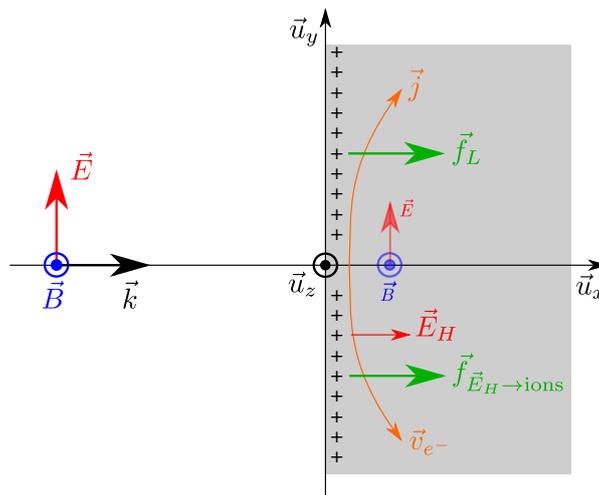


FIGURE 6.1 – Interprétation de la pression de radiation subie par un conducteur soumis à une onde électromagnétique.

2. On veut calculer ici la valeur moyenne de la densité de force dans le milieu, *i.e.*

$$\langle \vec{f} \rangle_t = \langle \vec{j} \wedge \vec{B} \rangle_t.$$

On fera ici tout le calcul en notations complexes. Le produit étant une opération non-linéaire, on ne peut pas calculer directement cette moyenne en notations complexes. On peut cependant calculer sa moyenne

temporelle par la formule bien connue,

$$\boxed{\langle \vec{j} \wedge \vec{B} \rangle_t = \frac{1}{2} \Re(\vec{j} \wedge \vec{\mathcal{B}}^*)} \quad (\text{astuce 1})$$

On utilise enfin l'équation de Maxwell-Ampère pour calculer \vec{j} en fonction de \vec{B} et \vec{E} :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} \quad \text{soit} \quad \mu_0 \vec{j} = i\vec{k} \wedge \vec{B} + i\frac{\omega}{c^2} \vec{E}.$$

Ici on pourrait par exemple se placer directement dans l'ARQS magnétique et négliger le courant de déplacement. Poursuivons quand même. En utilisant les formules du double produit vectoriel (astuce 2) :

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} \end{aligned}$$

et $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ puisque $\text{div} \vec{B} = 0$, il vient alors

$$\begin{aligned} \mu_0 \vec{j} \wedge \vec{\mathcal{B}}^* &= (i\vec{k} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{\mathcal{B}}^* + i\frac{\omega}{c^2} \vec{E} \wedge \vec{\mathcal{B}}^* = -i\vec{\mathcal{B}}^* \vec{k} + \frac{i}{c^2} \vec{E} \vec{\mathcal{B}}^* \vec{k} \\ 2\Re(\mu_0 \vec{j} \wedge \vec{\mathcal{B}}^*) &= -i\vec{\mathcal{B}}^* \vec{k} + i\vec{\mathcal{B}}^* \vec{k} + \frac{i}{c^2} \vec{E} \vec{\mathcal{B}}^* \vec{k} - \frac{i}{c^2} \vec{E} \vec{\mathcal{B}}^* \vec{k}. \end{aligned}$$

avec la formule bien connue $2\Re(z) = z + z^*$ (astuce 3) On utilise maintenant le fait que $i\vec{k}\vec{B} = \partial_x \vec{\mathcal{B}}$ et $-i\vec{k}\vec{\mathcal{B}}^* = \partial_x \vec{\mathcal{B}}^*$ (astuce 4), les mêmes relations étant valables pour \vec{E} . L'équation ci-dessus devient

$$2\Re(\mu_0 \vec{j} \wedge \vec{\mathcal{B}}^*) = \left[-(\partial_x \vec{\mathcal{B}}) \vec{\mathcal{B}}^* - (\partial_x \vec{\mathcal{B}}^*) \vec{B} - \frac{1}{c^2} (\partial_x \vec{E}) \vec{E} - \frac{1}{c^2} (\partial_x \vec{E}) \vec{E}^* \right] \vec{u}_x = -\partial_x \left(|\vec{\mathcal{B}}|^2 + \frac{1}{c^2} |\vec{E}|^2 \right) \vec{u}_x.$$

Finalement, la densité de force moyenne s'écrit

$$\langle \vec{f} \rangle_t = -\partial_x \left(\frac{1}{2\mu_0} \frac{|B|^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0 c^2} \frac{|E|^2}{2} \right) \vec{u}_x = -\partial_x \left(\frac{1}{2\mu_0} \langle B^2 \rangle_t + \frac{\epsilon_0}{2} \langle E^2 \rangle_t \right) \vec{u}_x = -\partial_x (\langle u_{EM}(x) \rangle_t) \vec{u}_x.$$

La force totale subie par le milieu se calcule alors simplement :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \iiint \langle \vec{f} \rangle_t d\tau = \iint dy dz \int dx (-\partial_x \langle u_{EM}(x) \rangle_t) \vec{u}_x = S \times (\langle u_{EM}(0) \rangle_t - \langle u_{EM}(\infty) \rangle_t) \\ &= S \langle u_{EM}(0) \rangle_t, \end{aligned}$$

et on retrouve donc l'expression de la pression de radiation,

$$\boxed{P_{\text{rad}} = \langle u_{EM}(0) \rangle_t.}$$

3. Dans le cadre d'un modèle surfacique, le champ magnétique est discontinu, et il apparaît donc difficile de calculer sa valeur en $x = 0$, *i.e.* à l'interface. Il faut en fait se rappeler que l'annulation du champ se fait sur une longueur appelée *épaisseur de peau*, d'autant plus petite que la conductivité du milieu est grande (voir l'exercice 4). La valeur du champ à calculer est donc sa valeur au «début» de sa décroissance, *i.e.* la valeur du champ en $x = 0^-$ dans un modèle surfacique. Notons toutefois que si l'on fait le calcul dans un modèle surfacique, tout se passe comme si le conducteur était parfait, *i.e.* de conductivité $\sigma \rightarrow \infty$. Le résultat obtenu ne sera donc valide *que pour un conducteur parfait* ($\sigma \gg \omega\epsilon$).

Dans le cadre même du modèle surfacique, le champ électrique, tangent à la surface, est continu à la traversée de la surface. Il est par ailleurs nul dans le conducteur parfait. On en déduit donc, qu'en $x = 0$,

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_r)(0^-) = \vec{E}_i(0^+) = \vec{0}$$

Pour le champ magnétique, on a alors :

$$\vec{B}_i(0^-) = \frac{1}{\omega} \vec{k}_i \wedge \vec{E}_i \Rightarrow |\vec{B}_i|^2 = \frac{1}{c^2} |\vec{E}_i|^2 \quad (\text{VI.3})$$

$$\vec{B}_r(0^-) = \frac{1}{\omega} \vec{k}_r \wedge \vec{E}_r = \frac{1}{\omega} (-\vec{k}_i) \wedge (-\vec{E}_i) = \vec{B}_i(0^-) \quad (\text{VI.4})$$

La relation de passage pour le champ magnétique à la traversée d'une surface métallique est donnée par :

$$(\vec{B}_i + \vec{B}_r)(0^-) - \vec{B}_t(0^+) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge (-\vec{u}_x) \neq \vec{0} \quad (\text{VI.5})$$

Les courants surfaciques ne sont pas nuls dans notre cas (l'intégrale sur le volume de \vec{j} calculé précédemment le montre). Il sont mêmes les moteurs de la génération de l'onde réfléchie. En revanche on a bien $\vec{B}_t(0^+) = \vec{0}$ avec l'hypothèse de conducteur parfait tout comme $\vec{E}_t(0^+) = \vec{0}$.

La pression de radiation prend alors la forme simple

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2\mu_0} \langle (\vec{B}_i + \vec{B}_r)^2(0^-) \rangle_t + \frac{\epsilon_0}{2} \langle (\vec{E}_i + \vec{E}_r)^2(0^-) \rangle_t = \frac{2 \langle \vec{B}_i^2 \rangle_t}{\mu_0} = \frac{|\vec{B}_i|^2}{\mu_0} = \epsilon_0 |\vec{E}_i|^2.$$

avec $k_i = \omega/c$ dans le vide. Dans le modèle surfacique, la pression de radiation semble donc dépendre uniquement des champs à l'extérieur du métal, en $x = 0^-$, et non des champs qui interagissent à l'intérieur. Ce n'est pas si étonnant car dans le cadre du conducteur parfait la réaction du métal se traduit entièrement par la génération de l'onde réfléchie en sens inverse de l'onde incidente. Par le principe d'action-réaction on imagine donc bien qu'une force de recul s'exerce en retour sur le métal.

Enfin, l'énergie arrivant sur la paroi de surface S en dt est l'énergie continue dans un cylindre d'axe \vec{u}_x , de longueur $c dt$ et de section S , *i.e.*

$$d\mathcal{E} = \mathcal{P}_{\text{inc}} dt = S c dt \left\langle \frac{B_i^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} E_i^2 \right\rangle = S c \left\langle \frac{B_i^2}{\mu_0} \right\rangle dt.$$

Des deux expressions ci-dessus, en identifiant les termes on déduit finalement

$$\boxed{P_{\text{rad}} = \frac{2\mathcal{P}_{\text{inc}}}{S c} = \frac{2\phi_{\text{inc}}}{c}},$$

où ϕ_{inc} est le flux surfacique incident. Notons que celui-ci peut directement se calculer à partir du vecteur de Poynting du champ incident :

$$\phi_{\text{inc}} = \left\| \langle \vec{\Pi}_i \rangle_t \right\| \quad (\text{VI.6})$$

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle_t = \frac{1}{2\mu_0} \Re (\vec{\mathcal{E}}_i \wedge \vec{\mathcal{B}}_i^*) = \frac{1}{2\mu_0 c} |\vec{E}_i|^2 \vec{u}_x \quad \text{avec } \vec{k}_i = \frac{\omega}{c} \vec{u}_x \in \mathbb{R} \quad (\text{VI.7})$$

L'application numérique pour un faisceau de $10\text{W} \cdot \text{cm}^{-2}$ donne une pression de $0,67 \text{ mPa}$.

Remarque : Pour un conducteur quelconque le déphasage de l'onde incidente à la réflexion n'est pas π . Les coefficients de Fresnel peuvent en fait être calculés en considérant que le conducteur est un milieu d'indice

$$n = \frac{k_m c}{\omega} = \frac{c}{\omega \delta} (1 + i) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}} e^{i\frac{\pi}{4}},$$

où δ est l'épaisseur de peau. Notons que $n \rightarrow \infty$ pour un conducteur parfait. Le coefficient de réflexion s'écrit :

$$r = \frac{1 - n}{1 + n},$$

qui ne vaut -1 que pour un conducteur parfait. Voir par exemple le Lorrain et Corson, *Champ et ondes électromagnétiques*.

4. Si l'on considère l'onde comme une assemblée de photons, et que l'on note Φ le flux incident de photons, on a la relation

$$\mathcal{P}_{\text{inc}} = \Phi \hbar \omega.$$

La force subie par le métal s'écrit alors simplement $\vec{F} = \frac{2\Phi \hbar \omega}{c} \vec{u}_x = \Phi 2\hbar \vec{k}$.

Si l'on considère par ailleurs les photons comme des particules d'impulsion $\pm \vec{p} = \pm p \vec{u}_x$ se réfléchissant sur la paroi, le bilan d'impulsion de la paroi, entre t et $t + dt$ s'écrit

$$\delta \vec{p}_{\text{paroi}} = \Phi dt \times [(+\vec{p}) - (-\vec{p})] = \vec{F} dt,$$

d'où l'on tire $\vec{F} = 2\vec{p}\Phi$. On retrouve alors le résultat bien connu : l'impulsion d'un photon est $\vec{p} = \hbar \vec{k}$.

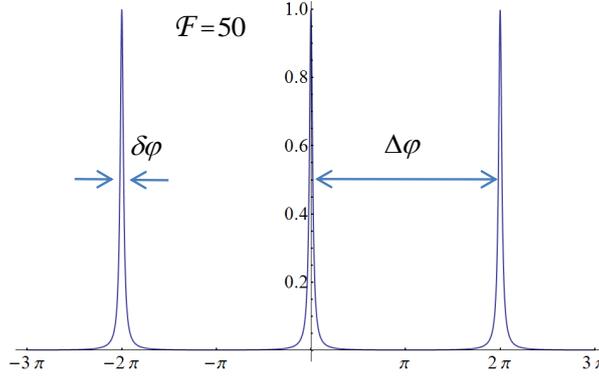


FIGURE 6.2 – Fonction de transmission normalisée d'un interféromètre de Fabry-Pérot de finesse $\mathcal{F} = 50$, en fonction de $\varphi = 2kL$

5. (a) On choisit l'origine des abscisses au niveau du premier miroir ($x = 0$), le second étant alors en $x = L$, et on écrit le terme de phase des champs sous la forme $e^{i(\pm kx - \omega t)}$. On a alors les relations

$$\begin{aligned} \text{En } x = 0 : \quad E^+ &= tE_0 + rE^-, \\ \text{En } x = L : \quad E^- e^{-ikL} &= rE^+ e^{ikL}, \\ E_t e^{ikL} &= tE^+ e^{ikL}. \end{aligned}$$

La deuxième équation peut aussi s'écrire $E^- = rE^+ e^{ik(2L)}$: l'onde «-» a même phase et amplitude que l'onde «+» après réflexion (facteur r) et après propagation sur $2L$, correspondant à l'aller-retour entre les deux miroirs (terme e^{2ikL}).

On en déduit finalement la relation

$$E^+ = \frac{t}{1 - r^2 e^{i\varphi}} E_0,$$

où l'on a posé $\varphi = 2kL$.

On montre alors sans problèmes que

$$G = \left| \frac{E^+}{E_0} \right|^2 = \frac{T}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

où $R = r^2$ et $T = t^2$. On représente $G(\varphi)$ FIG. 6.2 pour une finesse de 50. On note $\delta\varphi$ la largeur à mi-hauteur d'une résonance, et $\Delta\varphi$ la distance entre deux résonances. La finesse est alors donnée par

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\varphi}{\delta\varphi} = \frac{2\pi}{\delta\varphi}.$$

Par ailleurs, au voisinage de $\varphi = 0$, $\sin^2 \frac{\varphi}{2} \approx \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2$. Ainsi, en $\varphi = \delta\varphi/2$,

$$G\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right) = \frac{G_{\max}}{2} = \frac{G_{\max}}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \left(\frac{\delta\varphi}{4}\right)^2},$$

dont on déduit $\delta\varphi = 2 \frac{1-R}{\sqrt{R}}$ qui est bien très petit devant 1 pour les interféromètres d'intérêt. Finalement,

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}.$$

G peut alors être réécrit comme

$$G = \frac{T}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Remarque : Les interféromètres optiques de compétition peuvent atteindre des finesesses de l'ordre de $\mathcal{F} \approx 10^6$. Le record toutes gammes de fréquence confondues est cependant de $\mathcal{F} \approx 5 \cdot 10^9$!, obtenu avec une cavité microonde supraconductrice opérant à moins d'1 K.

- (b) En se plaçant au voisinage d'une résonance de l'interféromètre, la variation minimale détectable δL de la longueur de la cavité correspond à une variation de phase de l'ordre de $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi = 2k\delta L = \frac{\Delta\varphi}{\mathcal{F}} \quad \text{d'où} \quad \delta L = \frac{\pi}{k\mathcal{F}},$$

que l'on peut récrire

$$\frac{\delta L}{\lambda/2} = \frac{1}{\mathcal{F}}.$$

On définit par ailleurs le facteur de qualité Q comme le rapport $\frac{\nu}{\delta\nu}$, où $\delta\nu$ est la variation de fréquence correspondant à $\delta\varphi$, *i.e.* la variation minimale de fréquence détectable avec un tel interféromètre à L fixé :

$$\delta\varphi = 2L \frac{2\pi\delta\nu}{c} = 2L \frac{2\pi\nu}{c} \frac{1}{Q}.$$

À partir des expressions précédemment obtenues, on trouve finalement

$$Q = \frac{L}{\delta L}.$$

Par ailleurs, on trouve aussi $Q = (2L/c)\nu \mathcal{F}$. En remarquant alors que $(c/2L)$ est l'intervalle $\Delta\nu$ de fréquence correspondant à $\Delta\varphi$, *i.e.* la gamme de fréquence entre deux résonances de l'interféromètre, appelée *intervalle spectral libre*, et notée ISL, on retrouve la formule

$$Q = \mathcal{F} \frac{\nu}{\text{ISL}} = p\mathcal{F},$$

où p est l'ordre d'interférence :

$$p = \frac{\nu}{\text{ISL}} = \frac{L}{\lambda/2}.$$

Enfin, les résonances du Fabry-Pérot sont obtenues pour ν égal à un nombre entier d'ISL, ou encore L un nombre entier de demies longueur d'onde, soit pour $p \in \mathbb{N}$.

Pour résoudre une raie atomique de quelques MHz de large, avec un laser de quelques centaines de nanomètre de longueur d'onde, il faut un interféromètre de facteur de qualité $Q > 10^8$. Typiquement, un Fabry-Pérot a pour longueur 5 cm, d'où un ordre d'interférence $p \approx 2 \cdot 10^5$. Il faut donc, pour résoudre une telle raie atomique, une finesse $\mathcal{F} > 5 \cdot 10^2$.

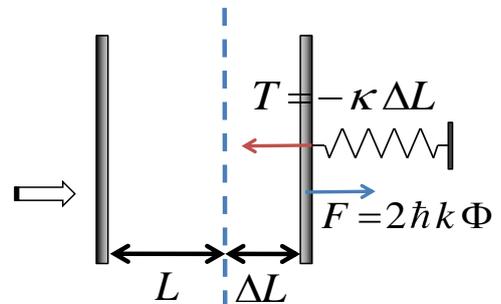
- (c) Le principe fondamental de la dynamique s'écrit simplement, en notant x l'écart algébrique du ressort à sa position d'équilibre, compté positivement pour un allongement de la longueur de la cavité,

$$F - \kappa x = 0 \quad \text{avec} \quad x = \Delta L.$$

On a alors

$$2\hbar k\Phi = \kappa\Delta L$$

$$\Delta L = \frac{2\hbar k}{\kappa}\Phi = (h\nu\Phi) \times \frac{2}{\kappa c} = I \times \beta = \beta G.$$



On en déduit donc $L = L_0 + \beta G I_0$ et les relations

- $L < L_0 + \beta G I_0 \Leftrightarrow PS > \kappa x$: la pression de radiation «domine» ;
- $L > L_0 + \beta G I_0 \Leftrightarrow PS < \kappa x$: la tension du ressort «domine».

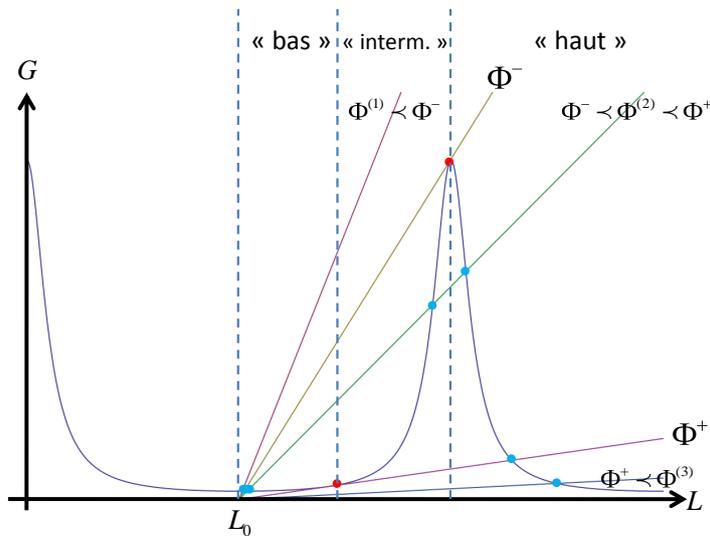


FIGURE 6.3 – Tracé de G en fonction de la longueur L de la cavité. Les droites correspondent à différentes valeurs du flux incident.

(d) On a donc deux relations liant G et L :

$$G = \frac{G_{\max}}{1 + \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2(kL)} = \frac{L - L_0}{\beta I_0},$$

où L_0 correspond à un minimum de G , $kL_0 = \pi/2$ par exemple.

On trace FIG. 6.3 ces deux fonctions, pour différentes valeurs du flux incident. Les points de fonctionnement du système correspondent alors aux points d'intersection des deux courbes. On voit apparaître deux valeurs particulières du flux, Φ^- et Φ^+ :

- Si $\Phi < \Phi^-$, alors il n'y a qu'un seul point de fonctionnement correspondant à une valeur faible de G , et à $L \approx L_0$;
- Si $\Phi^- < \Phi < \Phi^+$, alors il y a trois points de fonctionnement différents ;
- Si $\Phi > \Phi^+$ enfin, alors il n'y a plus qu'un seul⁵ point de fonctionnement, correspondant une nouvelle fois à une valeur faible de G .

On trace FIG. 6.4 la valeur de G en ces points en fonction de Φ . On distingue alors trois états différents de l'interféromètre :

- Un état «bas», accessible pour $\Phi < \Phi^+$ seulement, et atteint par exemple en augmentant progressivement le flux incident à partir d'une valeur nulle ;
- Un état «haut», accessible pour $\Phi > \Phi^-$ seulement, et atteint par exemple en diminuant progressivement le flux incident à partir d'une valeur élevée ($> \Phi^+$) ;
- Un état «intermédiaire» enfin, *a priori* accessible pour $\Phi^- < \Phi < \Phi^+$ seulement.

Étudions la stabilité de ces trois états possibles. Supposons qu'à partir d'une position d'équilibre, le flux incident augmente soudainement, *i.e.* sans modification de L . On se retrouve alors dans la situation où $L < L_0 + \beta G I_0$, et la pression de radiation a un effet plus important que le ressort, ce qui tend à faire augmenter L . Or :

- pour les états haut et bas, si le flux incident augmente, alors la longueur de l'interféromètre à l'équilibre L_{eq} augmente aussi ;
- pour l'état dit intermédiaire, en revanche, une augmentation du flux incident induit une diminution de la longueur d'équilibre.

Ainsi, dans l'état intermédiaire, la pression de radiation tend à faire s'éloigner l'interféromètre de sa position d'équilibre (L augmente alors que L_{eq} diminue), alors qu'elle l'en rapproche dans les deux autres états. Seuls les états haut et bas sont donc stables.

Le système présente donc ce que l'on appelle une *bistabilité* : à une valeur de Φ donnée peut correspondre deux réponses différentes (G) de l'interféromètre. Un tel système peut alors être utilisé

5. En oubliant les pics de résonances plus lointains.

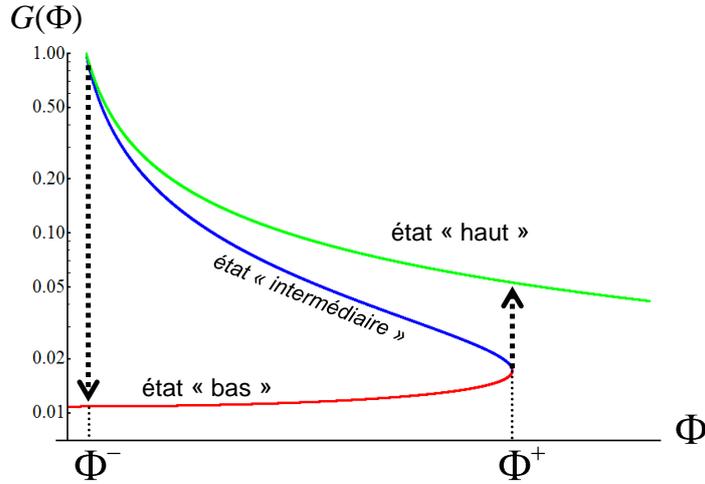


FIGURE 6.4 – Tracé de $G(\Phi)$ (échelle logarithmique). Les trois courbes correspondent à trois modes différents de fonctionnement de l'interféromètre. L'état dit « intermédiaire » est cependant instable.

comme bit d'information (0 pour l'état bas, 1 pour l'état haut par exemple) et donc constituer un élément d'une mémoire optique.

Exercice 7 Polarisation et photon

1. En notations réelles,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 [\cos(kz - \omega t)\vec{u}_x - \sin(kz - \omega t)\vec{u}_y].$$

Ainsi, $E_x^2 + E_y^2 = \text{cte} = E_0^2$: la polarisation est circulaire.

Par ailleurs, si à un instant t_0 et une position z_0 données, $E_x = E_0$ et $E_y = 0$, i.e. $kz_0 - \omega t_0 = 0$, à un instant $t_1 = t_0 + dt$, $kz_0 - \omega t_1 < 0$ d'où $0 < E_x, E_y$. Avec l'axe Oz pointant vers l'observateur, l'onde tourne donc dans le sens direct : l'onde est circulaire gauche.

De manière équivalente, $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 [\cos(kz - \omega t)\vec{u}_x + \cos(kz - \omega(t - \frac{\pi}{2}))\vec{u}_y]$, d'où l'on déduit que E_y est en retard sur E_x . On retrouve alors le fait que l'onde est circulaire gauche.

2. On suppose maintenant que l'onde interagit avec un électron en présence d'une force de rappel et d'une force de frottements visqueux. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2\vec{r} - \frac{1}{\tau}m\dot{\vec{r}} - e\vec{\mathcal{E}}.$$

En régime forcé, $\dot{\vec{r}} = -i\omega\vec{r}$ et on obtient finalement

$$\vec{r} = \frac{-e}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} \frac{1}{m} \vec{\mathcal{E}},$$

où $\Gamma = \tau^{-1}$. La mobilité μ définie par $\vec{v} = \mu\vec{\mathcal{E}}$ est alors

$$\mu = \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} \frac{e}{m}.$$

3. La puissance cédée par l'onde à l'atome est celle de la force de Lorentz :

$$\mathcal{P} = \vec{v} \cdot (-e\vec{E}).$$

Les notations complexes nous permettent de calculer facilement la valeur moyenne de cette grandeur :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{P} \rangle_t &= \frac{1}{2} \Re (\vec{v} \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) (-e) = \frac{-e}{2} \Re (\mu E_0^2 (\vec{u}_x + i\vec{u}_y) \cdot (\vec{u}_x - i\vec{u}_y)) \\ &= \frac{-e^2}{m} \Re \left(i\omega \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} \right) E_0^2 = \frac{e^2}{m} \frac{\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} E_0^2.\end{aligned}$$

4. On calcule de même le moment moyen de la force :

$$\begin{aligned}\langle \vec{M} \rangle_t &= -\frac{e}{2} \Re (\vec{r}^* \wedge \vec{E}) = -\frac{e}{2} \Re \left(\frac{-eE_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma} \frac{1}{m} (\vec{u}_x - i\vec{u}_y) \wedge (\vec{u}_x + i\vec{u}_y) \right) \\ &= \frac{e^2}{m} \frac{\omega\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} E_0^2 \vec{u}_z.\end{aligned}$$

Bien entendu on retrouve directement le fait que $\langle \mathcal{P} \rangle_t = \langle \vec{M} \rangle_t \omega$, mais il est bon de faire des calculs de temps en temps...

5. Adoptons maintenant le point de vue corpusculaire : l'atome absorbe un nombre N_γ de photons par unité de temps. La puissance moyenne cédée par l'onde à l'atome est donc $\langle \mathcal{P} \rangle_t = h\nu N_\gamma$. On en déduit l'expression de N_γ ,

$$N_\gamma = \frac{e^2}{mh\nu} E_0^2 \frac{\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}.$$

Le moment moyen qu'exerce l'onde sur l'atome peut alors s'écrire

$$\langle \vec{M} \rangle_t = \hbar N_\gamma \vec{u}_z.$$

Du point de vue corpusculaire, cela revient à dire que le photon a un moment cinétique $\sigma = \hbar \vec{u}_z$ qu'il cède à l'atome qui l'absorbe.

Avec une onde circulaire droite, on aurait obtenu un moment cinétique $-\hbar \vec{u}_z$.

Avec une onde polarisée rectilignement, superposition d'une onde circulaire droite et d'une onde circulaire gauche, on aurait obtenu un moment cinétique moyen nul.

Remarque : Ce «moment cinétique» est bien sûr ce que l'on appelle la *spin* (du photon), de valeur 1 comme on peut le voir (valeurs propres $\pm\hbar$). Remarquons alors que contrairement à un spin 1 «usuel» auquel correspondent trois états de spin ($|\uparrow\rangle$ de spin 1 (*i.e.* état propre de \hat{S}_z de valeur propre $+\hbar$), $|0\rangle$ de spin 0 et $|\downarrow\rangle$ de spin -1), ici les deux seuls états de spin ± 1 suffisent à décrire l'ensemble des états de spin du photon⁶. Sans évidemment rentrer dans les détails, cela est lié au fait que le photon est de masse nulle.

6. On peut alors utiliser le formalisme quantique du spin 1/2 pour caractériser une telle onde. On peut par exemple noter $|+z\rangle$ et $|-z\rangle$ les états de polarisation linéaire selon \vec{u}_x et \vec{u}_y respectivement. L'onde circulaire gauche étudiée ci-dessus s'écrit alors

$$|\text{circ. G}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+z\rangle + i|-z\rangle) \equiv |+y\rangle.$$

$|+y\rangle$ correspond donc à l'état de polarisation circulaire gauche, de spin $+\hbar$. De même, l'état de polarisation circulaire droite, de spin $-\hbar$ est $|-y\rangle = 1/\sqrt{2} (|+z\rangle - i|-z\rangle)$.

On rappelle que $|\pm y\rangle$ est le vecteur propre de $\hat{\sigma}_y$ de valeur propre ± 1 . L'opérateur de spin s'écrit alors naturellement dans la base $\{|+z\rangle, |-z\rangle\}$

$$\hat{S} = \hbar \hat{\sigma}_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Le cas de la polarisation linéaire, de moment cinétique moyen nul, correspond à une superposition $|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle$ qui n'est pas état propre de \hat{S}_z .

De même, un état de polarisation linéaire quelconque s'écrit

$$|+\theta\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+_z\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |-_z\rangle,$$

état propre de

$$\hat{\sigma}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Un état de polarisation elliptique quelconque s'écrit enfin

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+_z\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |-_z\rangle.$$

En ce qui concerne une onde partiellement polarisée, la représentation en ket n'est plus suffisante, puisqu'il faut ici pouvoir représenter une superposition statistique de polarisations. On utilise donc la représentation de matrice densité $\hat{\rho}$ (égale à $|\psi\rangle\langle\psi|$ pour un état pur).

La lumière naturelle correspond à une lumière non polarisée, *i.e.* à une superposition à poids égaux des polarisations rectilignes \vec{u}_x et \vec{u}_y , ou encore des polarisations circulaires droite ou gauche, ... Finalement,

$$\hat{\rho}_{\text{nat.}} = \frac{1}{2} |+_z\rangle\langle+_z| + \frac{1}{2} |-_z\rangle\langle-_z| = \frac{1}{2} |+_y\rangle\langle+_y| + \frac{1}{2} |-_y\rangle\langle-_y| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une lumière partiellement polarisée peut alors s'écrire par exemple

$$\hat{\rho}_{\text{part.}} = (1-a)\hat{\rho}_{\text{nat.}} + a |+_z\rangle\langle+_z| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix},$$

où a est le taux de polarisation.

7. Un polariseur a pour rôle de ne sélectionner qu'une seule composante de polarisation : c'est en fait un projecteur sur une polarisation définie. De façon générale, un polariseur quelconque peut donc s'écrire comme le polariseur sur un état $|+\theta\rangle$,

$$\hat{\Pi}_\theta = |+\theta\rangle\langle+\theta| = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

En particulier, $\hat{\Pi}_0 = |+_z\rangle\langle+_z|$, rencontré ci-dessus, est le polariseur passant pour une onde polarisée selon \vec{u}_x .

Le passage par un polariseur, $\hat{\Pi}_0$ par exemple, pourrait être vu comme la mesure d'une composante de polarisation : si le photon passe, sa polarisation est \vec{u}_x , sinon c'est \vec{u}_y . Le problème est qu'un photon polarisé selon \vec{u}_y ... est détruit ! Et non projeté sur l'état $|-_z\rangle$ comme le demande une mesure décrite par la mécanique quantique. Un cube polariseur (associé à une détection non destructive (!) de photon) serait plus approprié.

Pour retrouver la loi de Malus, il suffit de regarder l'action du polariseur $\hat{\Pi}_\theta$ sur une onde polarisée selon \vec{u}_x par exemple, *i.e.* $|+_z\rangle$. On cherche en effet à mesurer la probabilité qu'a un photon dans l'état $|+_z\rangle$ d'être mesuré dans l'état $|+\theta\rangle$. Cette probabilité est donnée par

$$p(\theta) = \langle+_z|\hat{\Pi}_\theta|+_z\rangle = |\langle+\theta|+_z\rangle|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

On retrouve donc la loi de Malus !

Pour une lumière partiellement polarisée $\hat{\rho}_{\text{part.}}$, cette probabilité est donnée par

$$p_{\text{part.}}(\theta) = \text{Tr}(\hat{\Pi}_\theta \hat{\rho}_{\text{part.}}) = \frac{1+a}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1-a}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1+a \cos \theta}{2} = a \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1-a}{2}.$$

On retrouve bien un signal sinusoïdal de moyenne $1/2$, de contraste $a \leq 1$.

8. Une lame à faces parallèles, dont on suppose les axes neutres selon \vec{u}_x et \vec{u}_y , introduit un déphasage entre les deux composantes de polarisation linéaires $|\pm_z\rangle$. Son action peut donc s'écrire comme

$$\hat{\Phi}_\varphi = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'un tel opérateur peut en fait se récrire

$$\hat{\Phi}_\varphi = \cos \frac{\varphi}{2} - i\hat{\sigma}_z \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Il s'agit donc d'une rotation d'angle φ du spin autour de Oz .

Pour écrire une équation d'évolution, regardons comment le spin $|\psi(z)\rangle$ est transformé après une distance δz . Le déphasage pour un milieu de biréfringence Δn est $\delta\varphi = \Delta n k \delta z$:

$$|\psi(z + \delta z)\rangle = \hat{\Phi}_{\delta\varphi} |\psi(z)\rangle \approx \left(1 - i\hat{\sigma}_z \frac{\delta\varphi}{2}\right) |\psi(z)\rangle \approx e^{-i\hat{\sigma}_z \Delta n k \delta z / 2} |\psi(z)\rangle.$$

On retrouve donc une évolution hamiltonienne usuelle, en remplaçant le temps t par la coordonnée d'espace z , de hamiltonien

$$\hat{H} = \Delta n \frac{\hbar k}{2} \hat{\sigma}_z.$$

(Ce résultat correspond en fait au résultat usuel qui fait de $\hat{\sigma}_z$ le générateur des rotations autour de \vec{u}_z .)

De même, un milieu à pouvoir rotatoire fait tourner la polarisation d'un angle θ . Il transforme en fait $|+_z\rangle$ en $|+_{2\theta}\rangle$, et $|-_z\rangle$ en $|-_{2\theta}\rangle$ (s'en convaincre avec $\theta = \pi$). Il s'agit donc de l'opérateur

$$\hat{U}_{2\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \cos \theta - i\hat{\sigma}_y \sin \theta.$$

Cette fois la rotation du spin se fait autour de Oy et est d'angle 2θ . De même que précédemment, une évolution hamiltonienne décrit le passage par un milieu de pouvoir rotatoire α ($\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$), avec pour hamiltonien

$$\hat{H} = \hbar \alpha \hat{\sigma}_y$$

Exercice 8 Rayonnement d'une antenne demi-onde

1. Le courant $i(z, t) = I_0 \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos(\omega t)$ représente une onde de courant stationnaire sinusoïdale vérifiant les conditions aux limites ($i = 0$ aux extrémités) : ce courant peut donc parfaitement s'établir dans l'antenne. La longueur L et la longueur d'onde λ sont reliées par $L = \lambda/2$.
2. Dans ces conditions, on ne peut pas évidemment supposer $\lambda \gg L$ et on doit traiter le retard PM/c avec soin dans le calcul du champ rayonné par l'antenne. L'élément dz situé au voisinage de P est équivalent à un dipôle dp tel que $d\vec{p} = \frac{di}{dt} dz$. En voici une démonstration. Par définition d'un dipôle électrique, celui-ci est globalement neutre (premier terme d'un développement multipolaire) donc :

$$\iiint \rho d\tau = 0 = S \int_{z-dz/2}^{z+dz/2} \rho dz \quad (\text{VIII.1})$$

avec S la section du fil. Par la formule du trapèze on approxime l'intégrale par :

$$S \frac{\rho(z + dz/2) + \rho(z - dz/2)}{2} dz \Rightarrow \rho(z + dz/2) = -\rho(z - dz/2) \quad (\text{VIII.2})$$

ρ est donc une fonction antisymétrique des charges sur l'élément d'antenne. Calculons son moment dipolaire :

$$\begin{aligned} dp(z) &= \int_{z-dz/2}^{z+dz/2} S \rho(z')(z' - z) dz \\ &= S \frac{\rho(z + dz/2) dz/2 - \rho(z - dz/2) dz/2}{2} dz \\ &= \rho(z + dz/2) S dz/2 \times dz \end{aligned} \quad (\text{VIII.3})$$

On pose $q(z) = S\rho(z + dz/2)dz/2$ la charge contenue entre z et $z + dz/2$, annulée par la charge $-q$ située entre z et $z - dz/2$. D'où le moment dipolaire élémentaire :

$$dp(z) = q(z)dz \Rightarrow d\dot{p} = \ddot{q}dz = \frac{di}{dt}dz \quad (\text{VIII.4})$$

On peut donc écrire :

$$d\vec{B}(P\vec{M}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi PMc} I_0 \omega \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \sin\left(\omega t - \omega \frac{PM}{c}\right) \sin\theta_p \vec{u}_\phi dz \quad (\text{VIII.5})$$

$$d\vec{E}(P\vec{M}, t) = -\frac{\mu_0 I_0 \omega \sin\theta_p}{4\pi PMc} \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \sin\left(\omega t - \omega \frac{PM}{c}\right) \vec{u}_\theta dz \quad (\text{VIII.6})$$

On étudie le rayonnement de l'antenne en champ lointain $r \gg L$ donc $\theta_p \approx \theta$, $\vec{u}_{\theta_p} = \vec{u}_\theta$. En revanche on n'est pas dans le domaine de l'ARQS ($L \approx \lambda$) donc il faut traiter avec soin le terme de retard⁷ $PM \approx r - z \cos\theta$. Donc $d\vec{E} = dE\vec{u}_\theta$ et :

$$dE(M, t) = -\frac{\mu_0 I_0 \omega \sin\theta}{4\pi rc} \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\omega r}{c} + \frac{\omega z}{c} \cos\theta\right) dz \quad (\text{VIII.7})$$

$$d\underline{E}(M, t) = j \frac{\mu_0 I_0 \omega \sin\theta}{4\pi rc} \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} e^{j\frac{\omega z}{c} \cos\theta} dz \quad (\text{VIII.8})$$

3. L'amplitude complexe du champ électrique est :

$$\underline{E} = \int_{z=-L/2}^{z=L/2} d\underline{E} \quad (\text{VIII.9})$$

d'où :

$$\int_{z=-L/2}^{z=L/2} dz \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) e^{j\frac{\omega z}{c} \cos\theta} = \int_{z=-L/2}^{z=L/2} dz \cos\left(\frac{\omega z}{c}\right) e^{j\frac{\omega z}{c} \cos\theta} \text{ avec } \frac{\pi}{L} = \frac{\omega}{c} \quad (\text{VIII.10})$$

$$= \frac{1}{2} \int_{z=-L/2}^{z=L/2} dz \left[e^{j\frac{\omega z}{c} (\cos\theta+1)} + e^{j\frac{\omega z}{c} (\cos\theta-1)} \right] \quad (\text{VIII.11})$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{e^{j\frac{\omega z}{c} (\cos\theta+1)}}{j\frac{\omega}{c} (\cos\theta+1)} \right]_{z=-L/2}^{z=L/2} + \left[\frac{e^{j\frac{\omega z}{c} (\cos\theta-1)}}{j\frac{\omega}{c} (\cos\theta-1)} \right]_{z=-L/2}^{z=L/2} \right\} \quad (\text{VIII.12})$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{j\frac{\omega L}{2c} (\cos\theta+1)} - e^{-j\frac{\omega L}{2c} (\cos\theta+1)}}{j\frac{\omega}{c} (\cos\theta+1)} + \frac{e^{j\frac{\omega L}{2c} (\cos\theta-1)} - e^{-j\frac{\omega L}{2c} (\cos\theta-1)}}{j\frac{\omega}{c} (\cos\theta-1)} \right\} \quad (\text{VIII.13})$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} (\cos\theta+1)\right)}{\frac{\omega}{c} (\cos\theta+1)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} (\cos\theta-1)\right)}{\frac{\omega}{c} (\cos\theta-1)} \text{ avec encore } \frac{\pi}{L} = \frac{\omega}{c} \quad (\text{VIII.14})$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\frac{\omega}{c} (\cos\theta+1)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\frac{\omega}{c} (\cos\theta-1)} \quad (\text{VIII.15})$$

$$= \frac{-2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\frac{\omega}{c} (-\sin^2\theta)} \quad (\text{VIII.16})$$

$$= \frac{2L \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\pi \sin^2\theta} \quad (\text{VIII.17})$$

Finalement :

$$\underline{E} = j \frac{\mu_0 c I_0}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \vec{u}_\theta \quad (\text{VIII.18})$$

7. On rappelle que $PM^2 = \|\vec{PO} + \vec{OM}\|^2 = z^2 + r^2 - 2rz \cos\theta \Rightarrow PM \approx r - z \cos\theta$.

4. Comme on a $\vec{B} = \vec{u}_r \wedge \vec{E}/c$, on en déduit le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}^2}{\mu_0 c} \vec{u}_r \quad (\text{VIII.19})$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle_t = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2 \frac{\vec{u}_r}{r^2} \quad (\text{VIII.20})$$

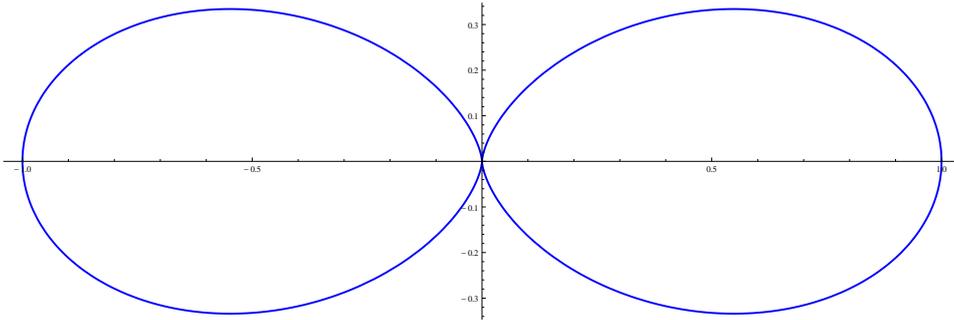
d'où :

$$f(\theta) = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2 \quad \text{et} \quad K = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} \quad (\text{VIII.21})$$

5. La puissance moyenne rayonnée par l'antenne par unité d'angle solide dans la direction (θ, ϕ) est :

$$\frac{\langle d\mathcal{P} \rangle_t}{d\Omega} = \frac{\langle \vec{\Pi} \rangle_t \cdot d\vec{S}}{d\Omega} = \langle \Pi \rangle_t r^2 = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2 \quad (\text{VIII.22})$$

Le diagramme de rayonnement correspondant à la puissance rayonnée ci-dessus est représentée dans la figure ci-après. La puissance rayonnée est maximal pour $\theta = \pi/2$, perpendiculairement à l'antenne.



6. Sachant que $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, il vient :

$$\langle d\mathcal{P} \rangle_t = K \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} f(\theta) \sin \theta d\theta \quad (\text{VIII.23})$$

Numériquement, on obtient $\langle d\mathcal{P} \rangle_t = 1,22 \frac{\mu_0 c I_0^2}{4\pi}$ d'où la résistance de rayonnement :

$$R = 1,22 \frac{\mu_0 c}{2\pi} \quad (\text{VIII.24})$$

AN : $R = 73 \Omega$ et $I_0 = 5,2A$

Exercice 9 Aspects électromagnétiques de la propagation d'onde sur une ligne coaxiale

Partie 1 Étude électrostatique

On suppose ici que $Q_1 = -Q_2$. Comme de plus toutes les lignes de champ partant du conducteur central arrivent sur le conducteur extérieur du fait de la géométrie du problème, on peut en déduire que la réciproque doit être vraie (les deux conducteurs sont en influence totale). En particulier, il n'y a aucune ligne de champ partant du conducteur extérieur et arrivant à l'infini. On doit donc s'attendre à trouver un champ électrique nul à l'extérieur du câble.

1. Le système est invariant par translation selon l'axe Oz et par rotation autour de ce même axe. Dans les coordonnées cylindriques usuelles, on a donc $\vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r)$.

Par ailleurs, tout plan contenant l'axe Oz et tout plan perpendiculaire à l'axe Oz sont plans de symétrie de la distribution de charges. Ce sont donc des plans de symétrie de \vec{E} . On en déduit que $\vec{E}(r) = E(r)\vec{u}_r$.

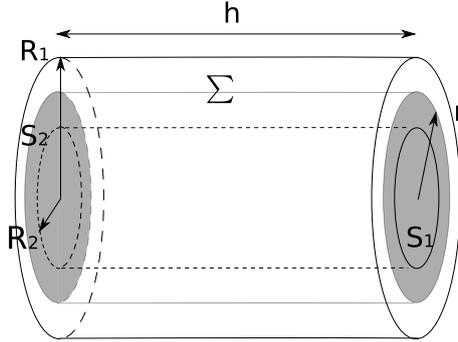


FIGURE 9.1 – Théorème de Gauss

Pour calculer le champ créé par la ligne en un point $M(r, \theta, z)$, on utilise le théorème de Gauss. La surface fermée choisie est un cylindre de même axe que la ligne, de rayon r , de longueur h (voir FIG. 9.1).

Les surfaces S_1 et S_2 sont orientées selon $\pm \vec{u}_z$ donc le flux de \vec{E} à travers elles est nul. La surface Σ est orientée selon \vec{u}_r donc le flux du champ est $\Phi(E) = \vec{E}(r) \cdot d\vec{\Sigma} = E(r) \times 2\pi r h$. Par le théorème de Gauss, on a par ailleurs

$$\Phi(E) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0 \epsilon_r}, \quad \text{d'où} \quad \begin{aligned} E(r) &= 0 \quad \text{pour} \quad r < R_1, \\ E(r) &= \frac{Q}{2\pi \epsilon_r h r} \vec{u}_r \quad \text{pour} \quad R_1 < r < R_2, \\ E(r) &= 0 \quad \text{pour} \quad R_2 < r. \end{aligned}$$

On vérifie alors les relations de passage à travers les surfaces latérales des deux conducteurs :

$$\begin{aligned} [\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}(r \rightarrow R_1^+) - \epsilon_0 \vec{E}(r \rightarrow R_1^-)] \cdot \vec{u}_r &= \frac{Q}{2\pi h R_1} = \sigma_1, \\ [\epsilon_0 \vec{E}(r \rightarrow R_2^+) - \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}(r \rightarrow R_2^-)] \cdot \vec{u}_r &= \frac{-Q}{2\pi h R_2} = \sigma_2. \end{aligned}$$

Remarque : La discontinuité de la composante normale de \vec{E} découle de l'équation de Maxwell-Gauss. Dans le cas d'un milieu quelconque, non isotrope en particulier, elle s'écrit $\text{div } \vec{D} = \rho$, et c'est donc la composante normale de \vec{D} qui est discontinue !

Au contraire, la continuité de la composante tangentielle de \vec{E} découle de l'équation de Maxwell-Faraday, inchangée lors du passage à un milieu quelconque. C'est donc toujours \vec{E} , et non \vec{D} qu'il faut prendre en compte pour l'équation de continuité.

En régime variable, ces relations de continuité sont inchangées⁸.

2.

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \int_{R_2}^{R_1} \nabla V(r) \cdot \vec{u}_r \, dr = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}(r) \cdot \vec{u}_r \, dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{Q}{C}, \\ \text{d'où} \quad \frac{C}{h} &= \gamma = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = 102 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}. \end{aligned}$$

Pour les lignes coaxiales utilisées en TP, on retient $\gamma = 100 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$.

3. L'énergie électrostatique contenue dans la portion de longueur h est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_e &= \iiint d\tau \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 = \int_{R_1}^{R_2} (2\pi r h \, dr) \frac{1}{2} \epsilon E(r)^2 \\ &= \frac{Q^2}{4\pi \epsilon h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{Q^2}{2C}. \end{aligned}$$

On retrouve la formule usuelle de l'énergie contenue dans une capacité.

8. Malgré le terme en $-\partial \vec{B} / \partial t$ qui apparaît dans l'équation de Maxwell-Faraday. Reprendre la démonstration pour se convaincre que ce terme ne modifie pas les relations ci-dessus.

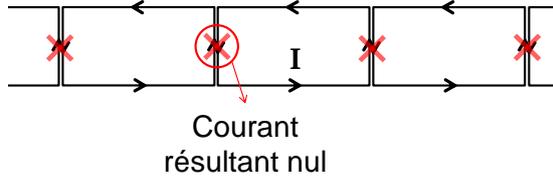


FIGURE 9.2 – Calcul de l'inductance linéique

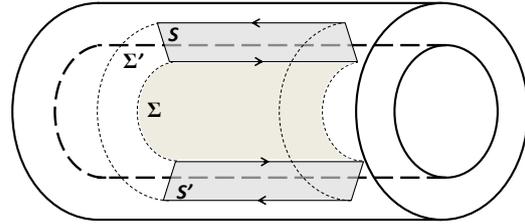


FIGURE 9.3 – Choix de la surface d'intégration

Partie 2 Étude magnétostatique

1. Par les mêmes arguments que pour \vec{E} , $\vec{B}(r, \theta, z) = \vec{B}(r)$.

Tout plan contenant Oz étant plan de symétrie de la distribution de courants, c'est un plan d'antisymétrie pour \vec{B} . Donc $\vec{B}(r) = B(r)\vec{u}_\theta$.

On utilise alors le théorème d'Ampère pour calculer le champ magnétique en tout point $M(r, \theta, z)$ de l'espace. Le contour fermé choisi est un cercle de rayon r centré sur l'axe Oz , et orienté dans le sens de \vec{u}_θ . Un courant enlacé est alors compté positivement s'il est dans le sens des z croissants (règle de la main droite). On a alors

$$C(B) = \oint \vec{B}(r) \cdot \underbrace{d\vec{l}}_{\vec{u}_\theta} = B(r) 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enlacé}},$$

$$\vec{B}(r) = 0 \quad \text{pour } r < R_1,$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad \text{pour } R_1 < r < R_2,$$

$$= 0 \quad \text{pour } R_2 < r.$$

On vérifie alors les relations de passage à travers les surfaces latérales des deux conducteurs :

$$\left[\vec{B}(r \rightarrow R_1^+) - \vec{B}(r \rightarrow R_1^-) \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} = \mu_0 \underbrace{\vec{j}_S}_{I/(2\pi R_1)\vec{u}_z} \wedge \underbrace{n_{\text{int} \rightarrow \text{ext}}}_{\vec{u}_r},$$

$$\left[\vec{B}(r \rightarrow R_2^+) - \vec{B}(r \rightarrow R_2^-) \right] = \frac{\mu_0(-I)}{2\pi R_2} = \mu_0 \underbrace{\vec{j}'_S}_{-I/(2\pi R_2)\vec{u}_z} \wedge \underbrace{n_{\text{int} \rightarrow \text{ext}}}_{\vec{u}_r}.$$

Remarque : Par les mêmes arguments que précédemment, dans le cas d'un milieu quelconque, c'est la composante tangentielle de \vec{H} qui est discontinue, tandis que la composante normale de \vec{B} est continue.

2. Il faut calculer le flux Φ du champ magnétique à travers une boucle de courant de longueur h . Bien que la ligne soit supposée infinie, on peut considérer qu'elle est la juxtaposition d'une infinité de boucles de courants de longueur h , parcourues par un courant I : le courant résultant dans les bras radiaux est nul (voir FIG. 9.2). Quelle forme doit-on maintenant choisir pour ces spires/pour la surface d'intégration ?

Φ ne dépend en fait pas du choix d'une telle surface. Considérons deux surfaces quelconques S et S' tel que sur la figure FIG. 9.3. Construisons à partir de ces deux surfaces une surface fermée à l'aide des surfaces Σ et Σ' , respectivement portées par les cylindres intérieur et extérieur, et des surfaces latérales (de normale \vec{u}_z). \vec{B} étant à flux conservatif (sa divergence est nulle), son flux Φ_{tot} à travers la surface fermée est nul :

$$\Phi_{\text{tot}} = \Phi_S - \Phi'_{S'} + \Phi_\Sigma + \Phi'_\Sigma + \Phi_{\text{latérales}} = 0.$$

Enfin, \vec{B} étant orthoradial, $\Phi_\Sigma = \Phi'_\Sigma = \Phi_{\text{latérales}} = 0$. Dont on déduit immédiatement $\Phi_S = \Phi'_{S'} = \Phi$.

Choisissons donc comme surface simple le rectangle de longueur h et de largeur $R_2 - R_1$, de vecteur normal \vec{u}_θ . Le flux à travers une tranche élémentaire de rayon r et d'épaisseur dr est

$$\delta\Phi(r) = \vec{B} \cdot \delta\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h dr.$$

Finalement, $\Phi = \int dr \delta\Phi(r) = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) I \equiv LI$.

On peut aussi retrouver L en calculant l'énergie magnétostatique de la portion :

$$\mathcal{E}_m = \iiint d\tau \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Or, pour une inductance L , l'énergie magnétique est donnée par $\mathcal{E}_m = 1/2 LI^2$. D'où l'inductance linéique de la ligne,

$$\frac{L}{h} = \lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 0,25 \mu\text{H} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Pour les lignes coaxiales utilisées en TP, $\lambda = 300 \text{ nH} \cdot \text{m}^{-1}$.

- Le champ magnétique créé à l'extérieur de la ligne est nul. Pour deux tels câbles placés côte à côte, il n'y aura donc pas de couplage par mutuelle inductance, phénomène que l'on observerait dans le cas de deux lignes bifilaires.
- On peut récrire \vec{E} , entre les conducteurs, sous la forme

$$\vec{E}(r) = \frac{V_1 - V_2}{r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \vec{u}_r.$$

Le vecteur de Poynting, entre les conducteurs (ailleurs, il est nul) est alors

$$\Pi(\vec{r}) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{(V_1 - V_2) I}{2\pi r^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \vec{u}_z.$$

La puissance transitant à travers une surface à z constant est enfin

$$P = \iint \Pi(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_{R_1}^{R_2} \Pi(r) (2\pi r dr) = (V_1 - V_2) I.$$

On retrouve donc les lois de l'électrocinétique !

Remarquons par ailleurs que l'énergie ne se propage pas dans les conducteurs mais entre les deux conducteurs, dans l'isolant, *i.e.* là où il y a du champ.

Partie 3 Étude en régime variable

- L'équation de Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon$ a la même forme que les champs soient variables ou stationnaires. Le théorème de Gauss est donc toujours valable et on retrouve les mêmes résultats que précédemment :

$$\vec{E}(r, z, t) = \frac{\sigma_1(z, t) R_1}{\epsilon r} \vec{u}_r.$$

- De façon générale, le théorème d'Ampère n'est valable en régime variable qu'en tenant compte du courant de déplacement. Reprenons sa démonstration pour vérifier qu'on peut s'en affranchir ici.

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

donc

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_{\Sigma} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S}}_{\mu_0 I_{\text{enlacé}}} + \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \frac{\partial \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\partial t}.$$

Or, le contour C que nous avons pris en compte a sa surface orientée selon \vec{u}_z , et l'on suppose que les champs ont même direction que dans le cas statique. Donc $\vec{E} \parallel \vec{u}_r \perp \vec{u}_z$ et le deuxième terme (flux du courant de déplacement) est nul. On retrouve alors la forme statique du théorème d'Ampère. Les résultats de la partie précédente sont donc encore valables, en remplaçant I par $i(z, t)$.

3. Par hypothèse, $\vec{B} \parallel \vec{u}_\theta$ et ne dépend que de r et z . De plus $r \times B(r, z, t)$ ne dépend pas de r . D'après le formulaire, on a alors entre les conducteurs, avec $c = (\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$,

$$\text{rot } \vec{B} = -\frac{\partial B(r, z, t)}{\partial z} \vec{u}_r = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(r, z, t)}{\partial t} \quad \text{et de même} \quad \text{rot } \vec{E} = \frac{\partial E(r, z, t)}{\partial z} \vec{u}_\theta = -\frac{\partial B(r, z, t)}{\partial t}.$$

On montre alors facilement que E et B vérifient la même équation,

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) B(r, z, t) = 0.$$

Par ailleurs, B étant proportionnel à i , $i(r, z, t)$ vérifie la même équation.

4. Il s'agit d'une équation de propagation à la vitesse de la lumière dans un milieu de permittivité ϵ_r , $c = (\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$. La forme générale des solutions est la somme d'un terme se propageant vers les z croissants $F(t - z/c)$ et d'un terme se propageant vers les z décroissants $G(t + z/c)$.

Si l'on s'intéresse à la structure du champ, on voit que \vec{E} et \vec{B} sont tous deux orthogonaux à la direction de propagation \vec{u}_z . L'onde considérée est donc *transverse électromagnétique*. On parle de mode TEM.

Si l'on compare à la situation «connue» du guide d'onde creux rectangulaire, la différence est frappante : il n'y a pas de modes TEM dans un tel guide, seulement des modes TE ou TM. Où se situe donc la différence ?

Tout réside dans le fait que le guide rectangulaire est un conducteur «creux»⁹. On peut en effet montrer, et on le fait ci-dessous dans notre exemple, que le champ électrique d'un mode TEM, dans un plan \mathcal{P} à z fixé, dérive d'un potentiel. Ce potentiel est par ailleurs nécessairement constant sur la surface des conducteurs. On se convainc alors aisément que pour le guide d'onde rectangulaire, et pour tout autre guide creux, le potentiel est uniforme sur ce plan \mathcal{P} , et donc le champ électrique nul : il n'y a pas de mode TEM.

La présence du conducteur intérieur dans le câble coaxial, qui n'est pas au même potentiel que le conducteur extérieur, autorise en revanche l'établissement d'un tel mode.

Remarquons enfin que le champ électrique est en tout point normal aux surfaces des conducteurs, et que le champ magnétique leur est tangentiel. Or ces surfaces sont le lieu de charges et de courants surfaciques. Le champ électrique (normal) et le champ magnétique (tangentiel) n'ont donc pas à s'annuler sur les parois ! Il n'y a pas de conditions aux limites pour le champ ! L'onde se propage donc comme dans un milieu diélectrique «libre» de permittivité relative ϵ_r : il n'y a pas de dispersion. Il n'y a pas non plus, contrairement au cas du guide d'onde rectangulaire, de fréquence de coupure qui limite la bande passante du guide, et l'on retrouve le fait que le mode TEM peut se propager dans le guide.

5. À partir de l'équation de Maxwell-Ampère, prise dans la région où \mathbf{E} et \mathbf{B} sont non nuls, *i.e.* entre les conducteurs, on montre que

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = \frac{\epsilon_r}{R_1} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial i}{\partial z} \frac{r}{R_1} = -\frac{\partial j_s^1}{\partial z} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_s = 0.$$

On retrouve donc la forme usuelle de la loi de conservation de la charge.

6. La tension entre deux points M_1 et M_2 est définie comme

$$V_1 - V_2 = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot \vec{dl}.$$

Cette définition n'a de sens que si l'intégrale ne dépend pas du chemin C suivi pour aller de M_1 à M_2 . Vérifions que c'est bien le cas ici. Soit donc deux chemins C_1 et C_2 reliant un point M_1 du conducteur 1 à un point M_2 du conducteur 2, et \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 les circulations respectives de \vec{E} sur ces chemins (voir FIG. 9.4).

$$\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 = \oint_{C_1 \cup C_2} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{d\Sigma},$$

où Σ est la surface définie par le contour fermé $C_1 \cup C_2$.

9. ou simplement connexe, pour être précis

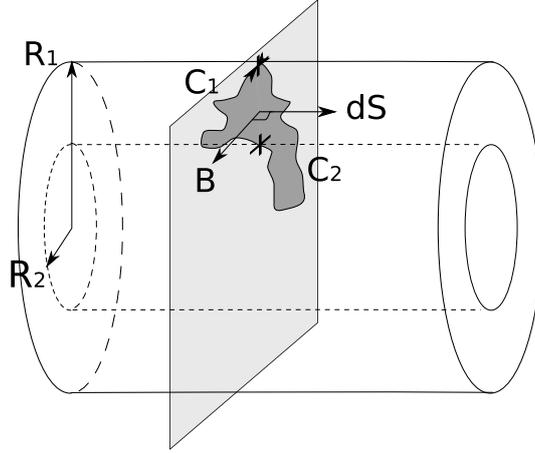


FIGURE 9.4 – Définition d'une tension

Par ailleurs,

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Donc $\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2$ est simplement la dérivée temporelle du flux du champ magnétique à travers une surface définie par $C_1 \cup C_2$. Si l'on prend les deux chemins dans un même plan de cote z fixée, on peut choisir la surface Σ dans ce même plan perpendiculaire à l'axe Oz . Σ est alors orientée selon \vec{u}_z et le flux de \vec{B} , parallèle à \vec{u}_θ , est donc nul. D'où $\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 = 0$.

On peut donc définir la tension $u(z, t)$ par

$$u(z, t) = \mathcal{I}_{1,2} = \frac{\sigma_1(z, t)}{\epsilon} R_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

De façon plus générale, on peut définir un potentiel

$$V(r, t; z) = \frac{\sigma_1(z, t)}{\epsilon} R_1 \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$$

tel que

$$\begin{aligned} u(z, t) &= V(R_2, t; z) - V(R_1, t; z), \\ \mathbf{E}(r, z, t) &= -\frac{\partial V(r, t; z)}{\partial r} \mathbf{u}_r. \end{aligned}$$

On dit alors que \mathbf{E} dérive d'un potentiel *dans un plan à z fixé*. La précision «dans un plan à z fixé» est importante, parce que \mathbf{E} ne dérive pas *stricto sensu* d'un potentiel, *i.e.*

$$\mathbf{E} \neq -\vec{\text{grad}} V = -\frac{\partial V(r, t; z)}{\partial r} \mathbf{u}_r - \frac{\partial V(r, t; z)}{\partial z} \mathbf{u}_z.$$

7. Les expressions de \vec{E} et \vec{B} n'ayant pas changé, le vecteur de Poynting a la même expression que dans l'étude statique. La puissance rayonnée par le champ électromagnétique est donc

$$P(z, t) = u(z, t) i(z, t).$$

On retrouve une nouvelle fois les lois de l'électrocinétique.

Partie 4 Modèle à constantes réparties

1. La loi des mailles entre les cotes z et $z + dz$, et la loi des nœuds donnent respectivement

$$u(z, t) - \lambda dz \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} - u(z + dz, t) = 0, \quad \text{et} \quad i(z, t) = i(z + dz, t) + \gamma dz \frac{\partial u(z + dz, t)}{\partial t}.$$

On en déduit

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = -\gamma \frac{\partial u(z, t)}{\partial t}.$$

2.

$$\left(\lambda \gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{pmatrix} u(z, t) \\ i(z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit donc d'ondes se propageant à la vitesse $c_0 = 1/\sqrt{\lambda\gamma}$. Pour une ligne coaxiale, à partir des résultats des deux premières parties, on obtient aisément $c_0 = c = (\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$.

3. À partir des équations ci-dessus, on montre sans difficultés¹⁰ que si $u(z, t) = U_i(t - z/c) + U_r(t + z/c)$ alors

$$i(z, t) = \frac{1}{R_c} [U_i(t - z/c) - U_r(t + z/c)], \quad \text{où} \quad R_c = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = 49 \Omega.$$

Pour les câbles utilisés en TP, $R_c = 50 \Omega$.

Partie 5 Réflexion des ondes

1.

$$\begin{aligned} u(L, t) &= R i(L, t) = \frac{R}{R_c} \left[U_i\left(t - \frac{L}{c}\right) - U_r\left(t + \frac{L}{c}\right) \right] \\ &= U_i\left(t - \frac{L}{c}\right) + U_r\left(t + \frac{L}{c}\right). \end{aligned}$$

On en déduit simplement $\rho = \frac{U_r\left(t + \frac{L}{c}\right)}{U_i\left(t - \frac{L}{c}\right)} = \frac{R - R_c}{R + R_c}$.

2. Dans le cas d'un circuit ouvert (R infini), $\rho = 1$; en $z = L$, il y a un nœud de courant ($U_i - U_r = 0$). Dans le cas d'un court-circuit ($R = 0$), $\rho = -1$; en $z = L$, il y a un nœud de tension ($U_i + U_r = 0$). Dans ces deux cas, l'onde incidente est donc réfléchiée par l'impédance en bout de ligne.

En revanche, dans le cas d'une charge adaptée ($R = R_c$), $\rho = 0$: toute l'onde incidente est «absorbée» par la charge en bout de ligne. La ligne coaxiale se comporte alors comme une ligne infinie.

3. (a) On considère la situation de la figure 9.5. On note U_i et I_i la tension et le courant transmis à travers la charge de résistance R .

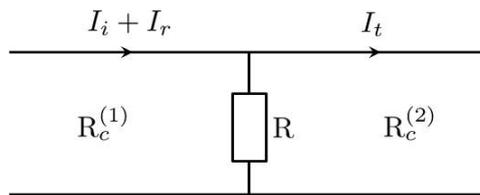


FIGURE 9.5 – Réflexion à l'interface entre deux câbles

En $z = L$, on a les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} U_t &= U_i + U_r, \\ I_t &= I_i + I_r - \frac{U_t}{R}. \end{aligned}$$

En utilisant les relations entre tensions et courants,

$$U_i = \frac{I_i}{R_c^{(1)}} \quad U_r = -\frac{I_r}{R_c^{(1)}} \quad U_t = \frac{I_t}{R_c^{(2)}},$$

10. En écrivant que $i(z, t) = I_i(t - z/c) + I_r(t + z/c)$, on peut montrer que $U'_i = R_c I'_i$ et $U'_r = -R_c I'_r$. Le terme constant qui apparaît est «négligé»: on ne s'intéresse qu'aux ondes donc qu'aux termes propageants.

on montre alors sans problèmes que

$$\rho = \frac{U_r}{U_i} = \frac{1/R_c^{(1)} - 1/R_c^{(2)} - 1/R}{1/R_c^{(1)} + 1/R_c^{(2)} + 1/R},$$

$$t = \frac{U_t}{U_i} = \frac{2/R_c^{(1)}}{1/R_c^{(1)} + 1/R_c^{(2)} + 1/R}.$$

Notons qu'en prenant $R_c^{(2)} = \infty$, on retrouve les résultats de la question précédente.

Calculons maintenant la différence des puissances transitant dans la ligne, en amont et en aval de la résistance R .

$$\begin{aligned} \Delta P &= U_i I_i + U_r I_r - U_t I_t = \frac{U_i^2}{R_c^{(1)}} - \frac{U_r^2}{R_c^{(1)}} - \frac{U_t^2}{R_c^{(2)}} \\ &= U_i^2 \left(\frac{1}{R_c^{(1)}} - \frac{\rho^2}{R_c^{(1)}} - \frac{t^2}{R_c^{(2)}} \right) = \dots \\ &= \frac{U_t^2}{R}. \end{aligned}$$

La différence de puissance entre l'amont et l'aval de la résistance R correspond donc précisément à la puissance dissipée dans la résistance R .

- (b) Si l'on ôte la résistance R , *i.e.* si l'on choisit $R = \infty$, on obtient alors les coefficients de transmission et de réflexion

$$\rho = \frac{R_c^{(2)} - R_c^{(1)}}{R_c^{(1)} + R_c^{(2)}}, \quad t = \frac{2R_c^{(2)}}{R_c^{(1)} + R_c^{(2)}}.$$

Notons que nous obtiendrions le même coefficient de réflexion si nous choisissons de brancher une résistance $R = R_c^{(2)}$ en bout de ligne en lieu et place du second câble coaxial.

Il y a en outre une exacte analogie avec ce que l'on rencontre en optique, au niveau d'un dioptre. Pour deux milieux d'indices respectifs n_1 et n_2 , on rappelle en effet l'expression des coefficients de réflexion et transmission :

$$\rho = \frac{E_r}{E_i} = -\frac{B_r}{B_i} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2},$$

$$t = \frac{E_t}{E_i} = \frac{B_t}{B_i} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}.$$

Ils ont la même expression que pour les deux câbles coaxiaux, à condition de remplacer les indices n_i par $1/R_c^{(i)}$.

Ainsi, quand les indices sont «adaptés», $n_1 = n_2$, il n'y a pas d'onde réfléchie : $E_r = 0$ et $E_t = E_i$. De même, si les deux câbles coaxiaux mis bout à bout n'ont pas la même impédance caractéristique¹¹, une partie de l'énergie sera réfléchie au niveau de la jonction. Quand les deux impédances caractéristiques sont identiques, il n'y a pas de réflexion : on parle d'*adaptation d'impédance*.

4. On suppose R nulle. En $z = L$, on a un nœud de tension. On peut donc choisir pour u la forme

$$u(z, t) = 2A \sin\left(\frac{\omega}{c}(z - L)\right) \sin(\omega t),$$

dont on déduit que

$$i(z, t) = \frac{2A}{R_c} \cos\left(\frac{\omega}{c}(z - L)\right) \cos(\omega t).$$

On peut alors calculer les valeurs efficaces

$$U(z) = \sqrt{\langle u(z, t)^2 \rangle} = \sqrt{2}A \left| \sin\left(\frac{\omega}{c}(z - L)\right) \right| \quad \text{et} \quad I(z) = \sqrt{2} \frac{A}{R_c} \left| \cos\left(\frac{\omega}{c}(z - L)\right) \right|.$$

Il y a donc succession de nœuds et de ventres de tension et de courant, situation usuelle d'une onde stationnaire.

11. Par exemple si l'on mélange des câbles d'impédance 50Ω et des câbles d'impédance 75Ω , deux normes couramment utilisées.

5. On suppose $kL \ll 1$, ou encore $\omega = 2\pi\nu \ll c/L$. Pour des longueurs de câbles de l'ordre du mètre, cette hypothèse revient à supposer $\nu \ll 30$ MHz, ce qui est plus que raisonnable en électronique «courante» !
Revenons alors au cas du court-circuit. On a montré que

$$u(z, t) = 2A \sin\left(\frac{\omega}{c}(z - L)\right) \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad i(z, t) = \frac{2A}{R_c} \cos\left(\frac{\omega}{c}(z - L)\right) \cos(\omega t).$$

En passant en notations complexes, on a donc pour tout z

$$\frac{u(z, t)}{i(z, t)} = -jR_c \tan\left(\frac{\omega}{c}(z - L)\right).$$

Dans l'approximation $kL \ll 1$, et donc $k(z - L) \ll 1$, on trouve alors

$$\frac{u(z, t)}{i(z, t)} \approx -jR_c \frac{\omega}{c}(z - L) = -j \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} \sqrt{\lambda\gamma} \omega(z - L) = -j[\lambda(z - L)] \omega,$$

et en particulier

$$\frac{u(0, t)}{i(0, t)} = j[\lambda L] \omega = j\mathcal{L}\omega.$$

Vu de son extrémité $z = 0$, le câble se comporte comme une inductance $\mathcal{L} = \lambda L$!

De la même façon, on pourrait montrer que dans le cas d'un circuit ouvert, le câble, vu de $z = 0$, se comporte comme une capacité $C = \gamma L$.

Retrouvons maintenant ce résultat de manière qualitative. Si l'on impose un court-circuit en bout de ligne, $u = 0$ en bout de ligne. Or $kL \ll 1$ donc $L \ll \lambda$; l'onde de tension n'aura alors pas «le temps» de prendre de valeurs notables sur la longueur du câble, sa distance caractéristique d'évolution λ étant nettement plus grande que celle du câble. Si on peut alors supposer qu'en tout point du câble, $u \approx 0$, alors le câble se résume en une succession d'inductances en série, sur une longueur L , avec une inductance linéique λ : c'est une inductance $\mathcal{L} = \lambda L$.

Le même type de raisonnement est faisable pour un circuit ouvert.

Analogie mécanique : L'analogie électronique – mécanique usuelle repose sur l'identification entre :

- inductance et masse : $\mathcal{L} \longleftrightarrow m$,
- capacité et constante de raideur d'un ressort : $C \longleftrightarrow 1/K$,
- intensité et vitesse : $i \longleftrightarrow v$,
- tension électrique et tension d'un ressort : $u \longleftrightarrow T$.

Le câble coaxial, comme chaîne d'inductances et de capacités, est donc l'analogue électrique d'une chaîne AB de masses reliées par des ressorts.

Un circuit ouvert revient à annuler le courant en bout de ligne, *i.e.* à annuler la vitesse en bout de chaîne : on fixe l'extrémité $z = L$ (B) à une paroi immobile. Si l'on met en mouvement l'autre extrémité (A) de la chaîne à très basse fréquence (mouvement quasi statique), tous les points de la chaîne se déplacent en phase au cours de la déformation, et l'on va avoir l'impression de tirer sur un ressort. Plus on tire lentement, plus les effets d'inertie diminuent alors que la force élastique, elle, ne change pas. La chaîne se comporte donc essentiellement comme un ressort, *i.e.* comme une capacité.

Plus précisément, calculons la valeur de la capacité effective. On note δL la longueur d'un élément {masse+ressort} et κ la densité linéique d'inverse de raideur. La chaîne se comporte ici comme N ressorts en série de raideur $k = 1/(\kappa \delta L)$, donc comme un ressort de raideur $K = k/N = 1/(\kappa L)$. Son analogue électrique est une capacité de capacitance $1/K = \kappa L \equiv \gamma L = C$. On retrouve bien le résultat précédent !

Dans le cas d'un court-circuit, la tension en B est nulle : on laisse donc cette extrémité libre de se déplacer. On sent bien, une nouvelle fois, que si l'on tire lentement sur A, tous les points de la chaîne vont avoir le même mouvement, et les effets élastiques vont donc disparaître au profit des effets d'inertie. On aura seulement l'impression de mettre en mouvement une masse. On retrouve alors bien que le câble se comporte comme une masse/inductance seule.

Précisons enfin l'approximation faite ici. L'hypothèse que l'on avait formulée en électronique était $kL \ll 1$. Traduisons la en termes mécaniques. L'inductance linéique λ doit être remplacée par la masse linéique

$\lambda_m = m/L$; la capacité linéique γ doit être remplacée par la densité linéique de $1/K$ i.e. $\kappa = 1/(KL)$. L'hypothèse mentionnée devient donc

$$\frac{\omega}{c}L = \omega L \sqrt{\lambda_m \kappa} = \omega \sqrt{\frac{m}{K}} \ll 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega \ll \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

Il faut donc que la mise en mouvement se fasse à des fréquences plus faibles que la fréquence caractéristique du système. On retrouve une hypothèse de quasi-staticité usuelle, qui traduit en termes précis l'hypothèse «tirer lentement».

6. Comme $E(z, t) \propto u(z, t)$, on peut redéfinir le TOS à partir de la tension u . De façon générale, et en posant $z' = z - L$, on peut écrire

$$u(z, t) = A \cos(\omega t - kz') + \rho A \cos(\omega t + kz') = A [(1 + \rho) \cos \omega t \cos kz' + (1 - \rho) \sin \omega t \sin kz'].$$

L'amplitude maximale $a_{\text{ventre}} = 1 + |\rho|$ est donc atteinte pour

- $kz' = 0[\pi]$ (ondes incidente et réfléchie en phase) si $\rho > 0$,
- $kz' = \pi/2[\pi]$ (ondes incidente et réfléchie en opposition de phase) si $\rho < 0$.

L'amplitude minimale $a_{\text{nœud}} = 1 - |\rho|$ quant à elle est atteinte pour

- $kz' = \pi/2[\pi]$ (ondes incidente et réfléchie en opposition de phase) si $\rho > 0$,
- $kz' = 0[\pi]$ (ondes incidente et réfléchie en phase) si $\rho < 0$.

Au final, le taux d'onde stationnaire s'écrit

$$TOS = \frac{a_{\text{ventre}}}{a_{\text{nœud}}} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|},$$

soit 1 pour une charge adaptée, et $+\infty$ pour un circuit ouvert ou un court-circuit.