

Énoncé – TD n°2

Sommaire

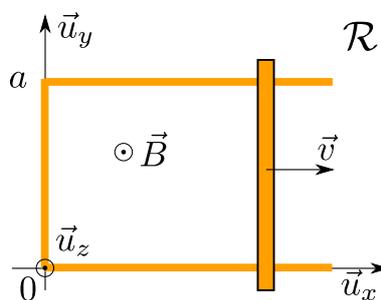
INDUCTION	1
Exercice 1 Le phénomène d'induction	1
Exercice 2 Oscillateurs mécaniques	2
Exercice 3 Courants de Foucault	3
Exercice 4 Transducteur électromagnétique : haut-parleur/microphone	3
Exercice 5 Force de Laplace et moteur synchrone	4
Exercice 6 Moteur asynchrone (facultatif)	5

Partie 1 : Induction

Exercice 1 Le phénomène d'induction ♦

Dans cet exercice, on aborde différentes manières d'introduire le phénomène de l'induction, et la réponse à certains paradoxes.

Loi de Faraday et rails de Laplace



Les rails de Laplace sont un dispositif qui met en œuvre une barre métallique de longueur a capable de glisser (ou rouler) sur un cadre métallique. Le circuit ainsi formé est plongé dans un champ magnétique \vec{B} . On imagine qu'un opérateur donne une vitesse initiale \vec{v}_0 à la barre.

1. Rappeler l'expression de la loi de Faraday et l'appliquer aux rails de Laplace représentés ci-dessus. Si on admet que le circuit a une résistance R , calculer le courant i induit.
2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au barreau glissant dans le référentiel \mathcal{R} lié aux rails et calculer la vitesse $\vec{v}(t)$ de la barre supposée de masse m . Mettre une évidence une constante de temps et l'interpréter.
3. Réaliser un bilan d'énergie et l'interpréter.

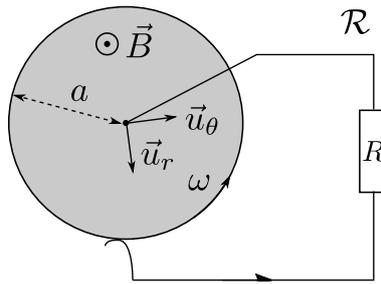
Question d'élève : j'ai lu qu'au début du 19e siècle on produisait du courant continu avec un dispositif appelé la roue de Barlow. Est-ce que c'est de l'induction ? Parce que je ne vois pas où il y a variation de flux...

Roue de Barlow et champ électromoteur

Il s'agit maintenant de comprendre la source du phénomène d'induction, c'est-à-dire les causes possibles de génération de courant électrique dans un circuit par un champ magnétique.

1. Soit un barreau métallique cylindrique en mouvement à la vitesse \vec{v} dans un champ magnétique \vec{B} et un référentiel \mathcal{R} . Montrer qu'une tension électrique s'établit entre ses bords.
2. Dans la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell, identifier une deuxième cause possible d'induction. Définir le champ électromoteur.
Une roue de Barlow est composée d'un disque métallique de rayon a relié par son centre et son bord à un circuit électrique, le tout plongé dans un champ magnétique \vec{B} transversal au disque.
3. Un opérateur tourne le disque à la vitesse angulaire ω . Calculer la tension appelée force électromotrice produite entre le centre et le bord du disque.
4. Sans calculs, quel est le prix à payer pour générer cette énergie électrique en plus de vaincre l'inertie de la roue ?

Question d'élève : Ok on a deux causes possibles au phénomène d'induction... mais est-ce que ça ne revient



pas un peu au même d'être en mouvement par rapport à champ \vec{B} ou de subir dans son référentiel un champ magnétique variable ?

Changements de référentiel et limites galiléennes de l'électromagnétisme

1. Dans le cadre de la cinématique galiléenne, en partant de l'invariance de la force de Lorentz par changement de référentiel, trouver la loi de transformation des champs \vec{E} et \vec{B} dans la limite non-relativiste. On passera du référentiel \mathcal{R} du laboratoire, supposé galiléen, au référentiel \mathcal{R}' se déplaçant à la vitesse constante \vec{V} par rapport à \mathcal{R} .
2. Définir le champ électromoteur.
3. On considère un faisceau infini de particules chargées se déplaçant à la vitesse constante \vec{u} dans \mathcal{R} , $u \ll c$. On note $I = \rho S u$ l'intensité électrique associée, ρ étant la densité de particules dans le faisceau et S sa section. Déterminer les champs \vec{E} et \vec{B} dans \mathcal{R} . De même, déterminer les champs \vec{E}' et \vec{B}' dans \mathcal{R}' , dans lequel les particules sont au repos. Vérifie-t-on la loi de transformation des champs de la question 1 ?

Question d'élève : Euh... donc ?

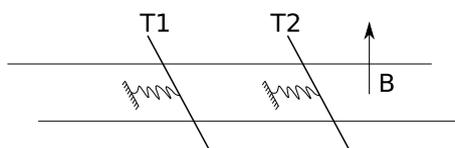
1. Dans l'ARQS, exprimer la différence de potentiel aux bornes du barreau métallique sous la forme : $V_A - V_B = R_{AB}i - e_{AB}$.
2. À partir de l'expression précédente, retrouver pour un circuit fermé et rigide la loi de Faraday.

Bibliographie conseillée :

1. *Electromagnétisme 2, MP/PC*, Faroux-Renault, AG PhA1 FAR (pour la transformation galiléenne des champs en ARQS)
2. *Electromagnétisme, MP/MP**, Daniel Mauras, AG PhA1 MAU (pour le champ électromoteur)

Exercice 2 Oscillateurs mécaniques

Deux tiges T1 et T2 identiques (masse m) sont mobiles sans frottements sur deux rails parallèles (distance d) situés dans un plan horizontal. Chacune est liée à un ressort (non conducteur électrique) de raideur k , et d'axe parallèle aux rails. Un champ magnétique permanent, uniforme et vertical règne en tout point. La résistance de l'ensemble du circuit électrique constitué des deux tiges séparées par deux portions de rail est constante égale à R . On néglige les frottements mécaniques.



1. Écrire le système d'équations différentielles régissant l'évolution des positions des tiges (comptées à partir des positions d'équilibre).

2. Montrer que, pour des conditions initiales quelconques, le mouvement de chaque tige obtenu après un temps très long est sinusoïdal et préciser sa période.
3. Interpréter en évoquant les aspects énergétiques.

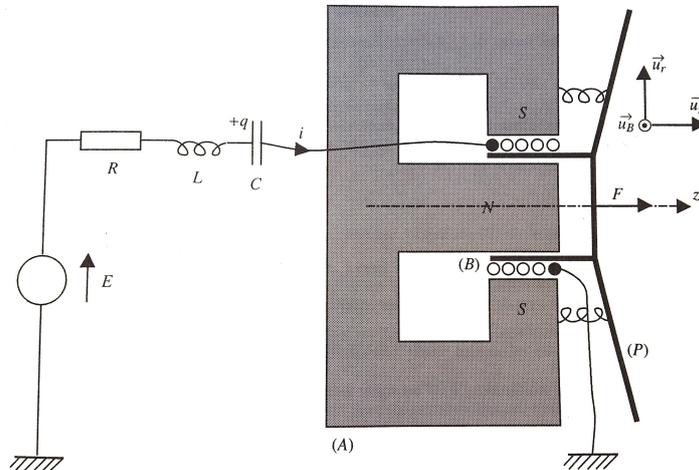
Exercice 3 Courants de Foucault

1. Soit un barreau cylindrique de cuivre (conductivité $\sigma \approx 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$), d'axe Oz , de rayon R , et de longueur h . En son coeur, on considère un champ magnétique uniforme, parallèle à Oz , d'amplitude B_0 , et variant dans le temps de manière sinusoïdale à la pulsation ω .
 - (a) Il apparaît dans le barreau des courants volumiques dits *courants de Foucault*. Expliquer le phénomène. Dans quelles situations courantes rencontre-t-on ce phénomène ?
 - (b) Calculer le champ électrique \vec{E} induit dans le cylindre.
 - (c) Calculer la puissance moyenne dissipée dans le barreau par effet Joule. Application au cas d'une casserole. Commenter.
 - (d) Est-il préférable, dans une machine électrique, d'utiliser des conducteurs de forte section ou un ensemble de petits conducteurs indépendants mis en parallèle (à section totale égale) ?
2. On laisse tomber un barreau aimanté de moment m (type agitateur magnétique) dans un cylindre de cuivre. Que se passe-t-il ? Qu'en serait-il dans le cas d'un cylindre de plexiglas ? Et d'acier ? Expliquer qualitativement. Le comportement est-il modifié si l'on fend le barreau sur sa longueur ? (* Quelle est la dépendance du phénomène en σ et en m ? *)

Bibliographie :

- (a) *Electromagnétisme, MP/MP**, Daniel Mauras, AG PhA1 MAU

Exercice 4 Transducteur électromagnétique : haut-parleur/microphone



La figure représente un dispositif pouvant servir aussi bien de haut-parleur que de microphone. (A) est un aimant permanent possédant une symétrie de révolution d'axe Oz . Dans son entrefer règne un champ magnétique radial, dans la région où se déplace le bobinage (B) solidaire du pavillon (P). Ce champ s'écrit en coordonnées cylindriques $\vec{B} = B\vec{u}_r$. (P) est un système de masse totale m , susceptible de se déplacer le long de Oz , il peut être mis en mouvement de translation par l'action d'une force extérieure $F\vec{u}_z$. Il subit en outre des forces dissipatives de somme $-h\dot{z}\vec{u}_z$, des forces de rappel de somme $-kz\vec{u}_z$ exercées par un système de ressorts ainsi que des forces de Laplace de somme \vec{f} exercées sur (B). Ce dernier est constitué d'une longueur totale de fil l , transporte un courant d'intensité i . Négligeant l'hélicité de (B), on admet que chaque élément de fil est représentable en coordonnées cylindriques par $d\vec{l} = dl\vec{u}_\theta$. (B) est alimenté par une source de tension E à travers un circuit dont on note R, L et C les résistances, inductance et capacités totales (c'est-à-dire relatives à l'ensemble du circuit, (B) compris).

1. Exprimer \vec{f} en fonction de $i = \dot{q}$, B et l . En déduire l'équation différentielle (M) vérifiée par $z(t)$ qui traduit le comportement mécanique du système.

- Exprimer en fonction de $v = \dot{z}$, B et l la force électromotrice induite dans (B). En déduire l'équation différentielle (E) vérifiée par la fonction $q(t)$ et traduisant le comportement électrique du système.
- Effectuer la combinaison de (M) et (E) afin d'établir un bilan d'énergie de la forme :

$$\frac{dU}{dt} = Fv + Ei - Ri^2 - hv^2 \quad (\text{IV.1})$$

U étant une fonction que l'on explicitera et dont l'on donnera l'interprétation énergétique ainsi que celle de tous les autres termes.

- On suppose un régime sinusoïdal forcé de pulsation ω de toutes les grandeurs précédentes. En introduisant dans une notation complexe en $e^{j\omega t}$ les grandeurs dont on donnera la signification :

$$\underline{z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right), \quad \underline{\xi} = h + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) \quad (\text{IV.2})$$

écrire les équations (M') et (E') qui relient les représentations complexes de v, i, F et E .

- Dans le fonctionnement en *haut-parleur*, F est nul et l'énergie du système provient de la source de tension E . La réponse du système est alors caractérisée par une relation $\underline{v}(i)$ que l'on explicitera en notation complexe ainsi que $\underline{i}(E)$ en introduisant la quantité $\underline{Z} = B^2 l^2 / \underline{\xi}$ dont on commentera la signification. Expliquer pourquoi le système peut, pour des valeurs convenables de ω , être une source sonore.
- Dans le fonctionnement *microphone*, E est nul et l'énergie du système provient de la force sinusoïdale F qui traduit l'action sur (P) des forces de pression de l'onde sonore. La réponse du système est alors caractérisée par la fonction $\underline{i}(F)$ que l'on explicitera à l'aide des notations précédentes.

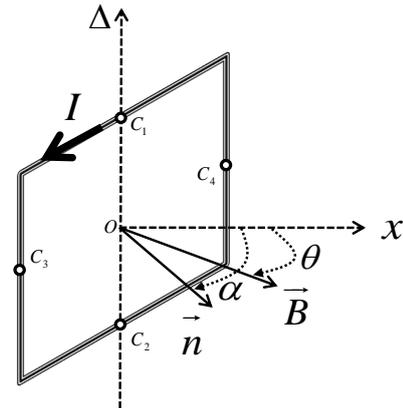
Bibliographie :

- Electromagnétisme, 2e année MP/MP**, Hubert Gié, AG PhA1 GIE
- Electromagnétisme, MP/MP**, Daniel Mauras, AG PhA1 MAU

Exercice 5 Force de Laplace et moteur synchrone

- Soit une tige rectiligne AB parcourue par un courant I et placée dans un champ magnétique \vec{B} uniforme. Montrer que l'action des forces de Laplace peut être modélisée par une seule force, appliquée au centre de la tige, d'intensité que l'on précisera.

Soit alors un cadre carré vertical (de normale $\vec{n} \perp \vec{u}_z$) de côté a autour duquel on a bobiné N spires. Le courant circulant dans chaque spire est constant égal à I . On plonge le cadre dans un champ magnétique uniforme permanent et horizontal \vec{B} . Le cadre est mobile autour de son axe de symétrie $\Delta \parallel \vec{u}_z$. On note α l'angle (\vec{u}_x, \vec{n}) et θ l'angle (\vec{u}_x, \vec{B}), et on choisit l'origine des axes O au centre du cadre.



- Exprimer le moment par rapport à Δ et la résultante des forces de Laplace subies par le cadre.
- Montrer qu'on peut se ramener à un dipôle magnétique de moment dipolaire à exprimer.
- On suppose maintenant que \vec{B} est un champ tournant à la vitesse angulaire Ω_0 autour de Δ . Montrer que si le cadre tourne à la vitesse ω autour de Δ , il existe une unique valeur de ω permettant d'obtenir un couple moyen non nul. Justifier alors l'appellation «synchrone»? (* *Quel inconvénient présente ce moteur? Connaissiez-vous d'autres types de moteurs? **)
- En présence d'un couple résistant $-k\vec{\omega}$, étudier le régime permanent du moteur synchrone ainsi constitué. On montrera qu'à I donné, il existe une valeur maximale de k admissible. Commenter.

Bibliographie :

- Physique PSI/PSI**, Olivier, Tec & Doc, AG PhA1 OLI

Exercice 6 Moteur asynchrone (facultatif)

Voir *Electromagnétisme, MP/MP**, Daniel Mauras, AG PhA1 MAU, p.464.

Corrigé – TD n°2

Sommaire

INDUCTION	C-1
Exercice 1 Le phénomène d'induction	C-1
Exercice 2 Oscillateurs mécaniques	C-5
Exercice 3 Courants de Foucault	C-6
Exercice 4 Transducteur électromécanique : haut-parleur/microphone	C-9
Exercice 5 Force de Laplace et moteur synchrone	C-10
Exercice 6 Moteur asynchrone (facultatif)	C-12

Partie 1 : Induction

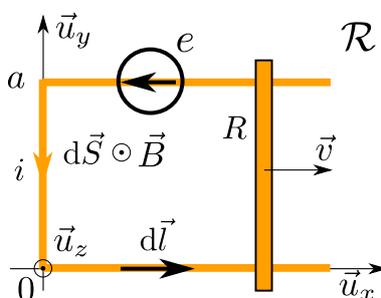
Exercice 1 Le phénomène d'induction

Loi de Faraday et rails de Laplace

1. La loi de Faraday donne la force électromotrice e générée par une variation temporelle du flux magnétique ϕ dans un circuit fermé :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

La loi est valide en cas de variation du champ magnétique \vec{B} , de déformation du circuit ou de mouvement du circuit dans le référentiel d'étude (dans ce cas on écrit plutôt une dérivée totale).



Dans le cas des rails de Laplace, on définit un sens $d\vec{l}$ pour le circuit fermé, qui définit un vecteur surface $d\vec{S}$ du même sens que \vec{B} . On a alors :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -B\frac{dS}{dt} = -Bav$$

Donc si $v > 0$, alors on a induction d'un courant $i < 0$ qui crée un champ \vec{B} qui s'oppose au champ \vec{B} qui l'a engendré. On retrouve donc la loi de modération de Lenz. Pour être précis, il faut noter qu'il a fallu définir le sens d'intégration du contour fermé, et que le signe de i est défini par le sens du vecteur $d\vec{l}$. Donc schématiquement, choisir le sens de $d\vec{l}$ impose de dessiner la flèche représentant i dans le même sens, ainsi que la flèche représentant la fem e (i.e. la circulation du champ électrique).

2. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au barreau métallique dans le référentiel \mathcal{R} donne :

$$m\frac{dv}{dt} = \int_0^a id\vec{l} \wedge \vec{B} = iaB\vec{u}_x \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{a^2B^2}{mR}\vec{v} = 0$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{mR}{a^2B^2}$$

On a donc un mouvement exponentiellement freiné, avec une constante de temps τ qui est d'autant plus importante que la masse du circuit et sa résistance sont grandes (difficulté à créer du courant induit et inertie de la barre), mais petite quand la source \vec{B} de l'induction est importante.

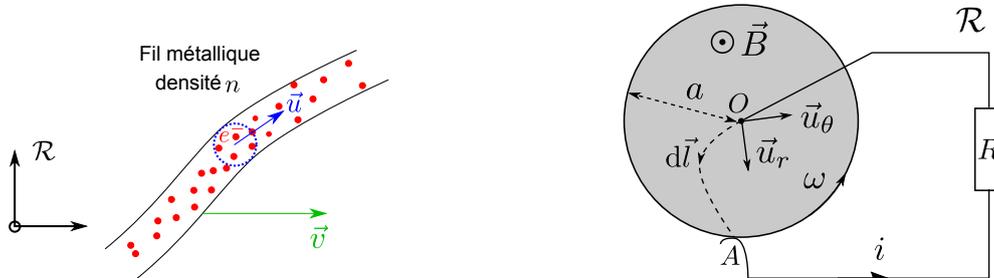
3. On a obtenu deux équations, l'une électrique, l'autre mécanique. On multiplie la première par i et la seconde par v pour établir le bilan d'énergie :

$$ei = -\frac{aBv}{R}, \quad mv\frac{dv}{dt} = -\frac{a^2B^2}{R}v^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -Ri^2$$

L'énergie cinétique de la barre diminue au cours du temps à cause des pertes par effet Joule générées par le courant induit. On a converti de l'énergie mécanique en énergie électrique, laquelle s'est dissipée en échauffement du circuit.

Roue de Barlow et champ électromoteur



1. Sur les électrons de la barre métallique s'exerce la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{B}$$

avec \vec{u} la vitesse des électrons dans le barreau. On peut ainsi montrer qu'il s'établit une tension électrique le long du barreau en calculant la circulation du champ lié à cette force :

$$e = \frac{1}{q} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^B (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

car $d\vec{l}$ et \vec{u} sont colinéaires.

2. Avec la loi de Maxwell-Faraday la définition du potentiel vecteur $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, on a :

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Donc une variation temporelle de champ magnétique peut créer un champ électrique capable de mettre en mouvement des électrons dans un métal. On appelle champ électromoteur la superposition linéaire des deux causes identifiées permettant la création d'un courant électrique par un champ magnétique :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

3. Si un opérateur fait tourner la roue de Barlow à la vitesse ω , on a une fem :

$$e = \int_0^A (r\omega\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_z) \cdot d\vec{l} = \int_0^a (r\omega\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_z) \cdot \vec{u}_r dr = \frac{\omega Ba^2}{2}$$

car $d\vec{l} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta$. On génère donc une tension électrique par rotation du disque métallique dans le champ magnétique transverse \vec{B} , et un courant $i = e/R > 0$ si $\omega > 0$, les signes étant encore une fois dictés par le sens du contour d'intégration.

4. Cette génération de courant électrique provoque en réaction une force de Laplace qui freine la rotation de la roue. L'opérateur doit donc compenser cette force s'il souhaite maintenir la vitesse ω et donc plus d'énergie lui est demandé pour faire tourner le disque. Le prix à payer est donc un surcoût d'énergie mécanique d'autant plus important que l'on veut générer un courant induit élevé.

Changements de référentiel et limites galiléennes de l'électromagnétisme

1. La transformation galiléenne des vitesses donne $\vec{v}_e' = \vec{v}_e - \vec{V}$ donc on a directement $d\vec{p}'/dt = d\vec{p}/dt = \vec{F}' = \vec{F}$ avec \vec{u} un vecteur constante. On écrit l'invariance de la force de Lorentz par changement de référentiel :

$$\vec{F} = \vec{F}' \quad \text{soit} \quad q(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}' + \vec{v}_e' \wedge \vec{B}') \quad (\text{I.1})$$

où $\vec{v}_e' = \vec{v}_e - \vec{V}$. En prenant le produit scalaire de l'équation ci-dessus avec \vec{v}' , on obtient

$$\forall \vec{v}_e' \quad \vec{E}' \cdot \vec{v}_e' = \vec{E} \cdot \vec{v}_e' + (\vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_e',$$

et donc

$$\boxed{\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}}.$$

En réinjectant cette expression dans la conservation de \vec{F} on obtient alors $\boxed{\vec{B}' = \vec{B}}$.

2. Or

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

. D'où le champ électrique dans le référentiel du barreau métallique :

$$\vec{E}' = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{V} \wedge \vec{B}$$

et le champ électromoteur représenté par les deux derniers termes, capable de mettre en mouvement les électrons du métal par l'action du champ (indirecte) du champ \vec{B} .

3. On trouve les champs en analysant les symétries du problème et en appliquant les théorèmes de Gauss et d'Ampère.

— Dans \mathcal{R} , concernant les charges électriques on a une symétrie de ρ par translation selon z et par rotation ce qui implique que le champ électrique est dirigé selon \vec{u}_r . L'invariance géométrique du problème selon θ et z implique ensuite que $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. Pour une surface cylindrique de rayon supérieur au faisceau et de longueur h , on a :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow 2\pi r h E(r) = \frac{\rho S h}{\epsilon_0}$$

et

$$\boxed{\vec{E} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 u r} \vec{e}_r}$$

— Dans \mathcal{R} , concernant les courants électriques on a une symétrie par rotation donc \vec{B} est orthogonal à tout plan radial et donc dirigé selon \vec{u}_θ . Par les mêmes invariances géométriques, il est indépendant de θ et z . L'application du théorème d'Ampère sur un lacet plus large que le faisceau donne :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow 2\pi r B = \mu_0 I$$

donc

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c^2}}$$

— Dans \mathcal{R}' , la distribution de charges électriques ne change pas, en revanche le courant est nul. On a donc

$$\boxed{\vec{E}' = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 u r} \vec{e}_r} \text{ et } \boxed{\vec{B}' = \vec{0}}.$$

La transformation des champs dans ce cas semble donc être plutôt $\boxed{\vec{E}' = \vec{E}}$ et $\boxed{\vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c^2}}$.

De même qu'on a deux limites de l'ARQS en partant de la théorie relativiste de l'électromagnétisme, on obtient deux jeux de transformations galiléennes des vitesses, issus des deux limites $\vec{j} \gg \rho c$ et $\vec{j} \ll \rho c$. La première limite correspond au cas développé dans la première question, et la seconde dans le paradoxe ci-dessus. Le raisonnement sur la force de Lorentz ne mène qu'à une des deux limites car il se place dans le cadre où $c\vec{B} \gg \vec{E}$ donc dans la limite magnétique. Si les particules portaient des charges magnétiques (donc s'il existait des monopôles magnétiques), le raisonnement sur la force de Lorentz d'appliquant à ces charges magnétiques donnerait la limite électrique et donc la seconde transformation galiléenne des champs.

Pour finir, il faut donc répondre à un élève que les deux phénomènes représentés dans le champ électromoteur sont intrinsèquement différents et qu'on ne peut pas passer de l'un à l'autre par changement de référentiel, même s'il est vrai qu'on peut obtenir le champ électromoteur total via une transformation galiléenne des champs basée sur la force de Lorentz. Toutefois, on n'a obtenu par ce raisonnement qu'une des deux limites galiléennes de l'électromagnétisme, et donc dans le cas où les charges dominent sur les courants il faut employer l'autre. L'électromagnétisme étant une théorie intrinsèquement relativiste, il est dangereux de passer sans précaution à la limite non-relativiste et seul un travail sur la théorie exprimée en relativité restreinte peut montrer l'existence de la deuxième limite, appropriée au traitement du paradoxe précédent.

Complément : les deux régimes de l'ARQS – Ce paradoxe absolument non-trivial est discuté dans les notes manuscrites qui font apparaître deux limites galiléennes pour les équations de Maxwell ainsi que la symétrie de dualité présente dans les lois de transformation des champs mais absente des équations de Maxwell et de la force de Lorentz pour la raison physique que l'on n'a pas observé à ce jour de monopoles magnétiques si bien qu'ils n'apparaissent jamais dans les équations. Je vous joins les notes de Guillaume Roux sur l'ARQS et les limites galiléennes des équations de Maxwell. Il s'agit pour vous d'éléments de réflexion, pas d'un cours ou de réponses supposées attendues. Ces remarques ne sont en général pas développées dans les livres et font ressortir certaines limites dans la cohérence des raisonnements habituellement présentés (les questions 1 et 3 sont très classiques et de niveau licence mais mises à côté, elles créent un paradoxe). L'approche développée dans le BUP de 2003 est tout à fait présentable de façon conjointe à l'introduction des équations de Maxwell au niveau licence. Ces notes sont essentiellement basées sur les références suivantes :

- M Le Bellac, JM Lévy-Leblond, Il Nuovo Cimento B **14**, 217 (1973).
<http://fisicavolta.unipv.it/percorsi/pdf/jmll.pdf>
- André Doms, BUP **851**, 159 (2003).
http://www.udppc.asso.fr/bupdoc/consultation/article-bup.php?ID_fiche=14597
- Jose A. Heras, Am. J. Phys. **78**, 1048 (2010).
<http://arxiv.org/abs/1012.1068>

4. Dans les conducteurs dans le régime de l'ARQS, on peut négliger le courant de déplacement $\epsilon_0 \partial_t \vec{E}$. L'équation de Maxwell-Ampère dans les conducteurs en ARQS devient donc $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ et on obtient la loi des noeuds locale $\text{div } \vec{j} = 0$. L'intensité du courant électrique ne dépend donc pas des points A et B et est uniforme dans le circuit $i \equiv I_{AB}$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{tension électrique : } U_{AB} &= \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ \text{intensité électrique : } i &= I_{A \text{ ou } B} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

Si on calcule la circulation de \vec{E} le long du circuit, on a alors

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_A - V_B + \underbrace{\int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}}_{e_{AB}}$$

On appelle force électromotrice le terme e_{AB} , circulation du champ électromoteur le long du circuit orienté. De plus, dans le conducteur, on a la relation $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Dans le cas d'un circuit filiforme de section S , on peut écrire $\vec{j} = \frac{i}{S} \frac{d\vec{\ell}}{d\ell}$ avec $d\ell = \|d\vec{\ell}\|$. Ainsi, on obtient l'expression géométrique de la résistance en écrivant :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \frac{\vec{j} \cdot d\vec{\ell}}{\sigma} = i \int_A^B \frac{d\ell}{\sigma S}$$

d'où

$$R_{AB} = \int_A^B \frac{d\ell}{\sigma S} = \int_A^B \frac{\rho d\ell}{S}$$

avec la résistivité $\rho = 1/\sigma$. Pour une résistivité et une section uniforme, on retrouve bien $R_{AB} = \frac{\rho L_{AB}}{S}$. On a la loi d'Ohm généralisée

$$V_A - V_B = R_{AB} i - e_{AB}$$

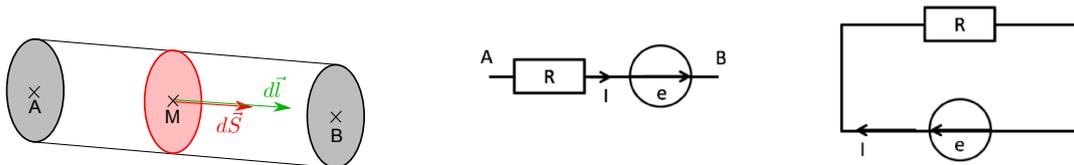


FIGURE 1.1 – Schémas électriques équivalents et conventions de calcul.

La loi d’Ohm généralisée se représente symboliquement par une résistance R_{AB} en série parcourue par un courant i en série avec un générateur de tension idéal e_{AB} de force électromotrice orientée dans le même sens que i . Aux bornes de ce dipôle la tension électrique est égale à la différence de potentielle $V_A - V_B$, représentée par une flèche de sens contraire à i . Les orientations relatives des flèches sont ici très importantes à respecter car toutes sont liées par le calcul de la circulation selon un schéma orienté par $d\vec{\ell}$: ici l’électrocinétique n’est pas indépendante de la géométrie ou de la cinématique du système physique réel, ce qui empêche de pouvoir prendre toute liberté dans les conventions d’orientation des courants et tensions.

Une nouveauté par rapport à la loi d’Ohm simple bien connue $V_A - V_B = R_{AB}i$: un circuit fermé où l’on a ramené A en B (spire fermée) peut être parcouru par un courant $i = e/R$ en présence d’effets inductifs. Physiquement, le champ électrique aura une composante le long du fil telle que sa circulation sera non nulle et ce champ entraînera donc les charges mobiles présentes dans le conducteur pour les faire tourner en rond. De même, si le circuit est ouvert, $i = 0$ et une différence de potentiel $V_A - V_B = -e_{AB}$ existe aux extrémités du circuit.

5. On calcule la force électromotrice pour un circuit *fermé et rigide*, mobile dans un champ magnétique \vec{B} :

$$e = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \oint (-\partial_t \vec{A} + \vec{U} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma} (-\partial_t \vec{B} + \text{rot}(\vec{U} \wedge \vec{B})) \cdot d\vec{S} = - \iint_{\Sigma} (\partial_t \vec{B} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}) \cdot d\vec{S},$$

en utilisant $\text{rot}(\vec{U} \wedge \vec{B}) = \vec{U} \text{div} \vec{B} - (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$ et $\text{div} \vec{B} = 0$. Le circuit étant rigide

$$e = -(\partial_t + \vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \left(\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

où l’on a reconnu l’opérateur dérivée totale par rapport au temps $\frac{D}{Dt} = \partial_t + \vec{U} \cdot \vec{\nabla}$. On retrouve donc la loi de Faraday :

$$e = -\frac{D\phi}{Dt}.$$

Exercice 2 Oscillateurs mécaniques

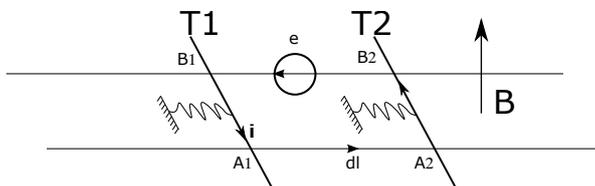


FIGURE 2.1 – Oscillateurs mécaniques

1. Les équations mécaniques sur chaque tige s’écrivent, en considérant les forces de rappel élastique et de Laplace,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - idB, \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 + idB. \end{aligned}$$

Reste alors à calculer le courant i en fonction des positions x_i . Il suffit de considérer les champs électromoteurs $\vec{E}_{m_i} = \vec{v}_i \wedge \vec{B}$, et d'écrire que la force électromotrice du circuit $A_1A_2B_2B_1$ est

$$\begin{aligned} e &= \int_{A_2B_2} \vec{E}_{m_2} \cdot d\vec{l} + \int_{B_1A_1} \vec{E}_{m_1} \cdot d\vec{l} \\ &= -Bd\dot{x}_2 + Bd\dot{x}_1 \\ &= +Ri, \end{aligned}$$

le signe dans la dernière relation n'étant valable que parce que l'on a intégré «dans le sens» du contour, comme indiqué FIG. 2.1, *i.e.* dans le sens de i .

On obtient finalement le système d'équations

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{B^2 d^2}{mR} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \frac{k}{m} x_1 &= 0, \\ \ddot{x}_2 - \frac{B^2 d^2}{mR} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \frac{k}{m} x_2 &= 0. \end{aligned}$$

2. On pose alors $S = x_1 + x_2$ et $D = x_1 - x_2$, ces variables vérifiant les équations fermées

$$\begin{aligned} \ddot{S} + \omega_0^2 S &= 0, \\ \ddot{D} + 2\lambda\omega_0 \dot{D} + \omega_0^2 D &= 0, \end{aligned}$$

où l'on a posé $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $\lambda = B^2 d^2 / (R \sqrt{km}) > 0$.

Ces deux équations différentielles fermées correspondent en fait aux deux modes d'oscillation des tiges :

— le mode symétrique : $x_1 = x_2 = S/2$ $D = 0$, oscillateur harmonique non amorti à ω_0 ;

— le mode antisymétrique : $x_1 = -x_2 = D/2$ $S = 0$, oscillateur harmonique amorti.

À temps long, le mode antisymétrique s'amortit donc, tandis que le mode symétrique subsiste :

$$x_1 = x_2 = \frac{S}{2} = x_0 \sin(\omega_0 t).$$

3. La dissipation de l'énergie ici se fait uniquement par effet Joule. Il n'y a donc plus dissipation quand le courant dans le circuit est nul. Ceci correspond à $e = 0$ et donc¹ à un flux constant de \vec{B} à travers le circuit. On retrouve ainsi rapidement qu'à temps long, une fois le régime stationnaire atteint, les deux tiges doivent se mouvoir en phase de sorte à maintenir la surface interceptée par le circuit constante.

Exercice 3 Courants de Foucault

1. (a) Le champ magnétique variable $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ induit un champ électrique \vec{E} (champ électromoteur) dans le cylindre, qui lui-même crée des courants volumiques $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. On a ainsi

$$\vec{j} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Ce phénomène est typiquement utilisé dans le chauffage par induction, ou encore dans le freinage magnétique des poids lourds ou des trains.

- (b) Ici, le système n'est pas étudié en électrostatique, donc les règles de symétries du champ \vec{E} par rapport aux symétries des sources ne sont plus les mêmes qu'en électrostatique. En électrostatique, ces règles viennent du fait que \vec{E} suit les deux lois $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ et $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$. Dans notre étude, le champ \vec{E} vérifie au contraire

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Quelles sont alors les symétries du champ \vec{E} sachant les symétries du champ "source" $\partial \vec{B} / \partial t$? Pour le savoir il suffit de remarquer que ces deux équations ont la même forme que celle de la magnétostatique $\text{div } \vec{B} = 0$ et $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. Le champ \vec{E} est donc contenu dans tout plan d'antisymétrie de $\partial \vec{B} / \partial t$

1. En invoquant la loi de Faraday.

et est orthogonal à tout plan de symétrie de $\partial\vec{B}/\partial t$. Autrement dit $\partial\vec{B}/\partial t$ a le même rôle vis à vis de \vec{E} que \vec{j} vis à vis de \vec{B} . Comme on a une symétrie de révolution pour $\partial\vec{B}/\partial t$, \vec{E} est donc porté par \vec{u}_θ et les invariances par translation d'une altitude z et rotation d'un angle θ nous amène à la forme $\vec{E} = E(r)\vec{u}_\theta$.

Avec les équations de Maxwell, on obtient :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE(r)) = B_0\omega \sin \omega t \Rightarrow E(r) = \frac{B_0\omega}{2} r \sin \omega t \quad (\text{III.1})$$

Si on souhaite se passer de la connaissance du rotationnel en coordonnées cylindriques, on peut aussi intégrer ces équations sur un disque et utiliser le théorème de Stokes.

Dans certaines démonstrations, il est demandé de vérifier que le potentiel vecteur de la forme $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{r}$ est solution, car on a :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{2}\vec{\text{rot}} (\vec{B} \wedge \vec{r}) = \frac{1}{2} \left[\vec{B} \text{div} \vec{r} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} \right] = \frac{1}{2} [3\vec{B} - \vec{B}] = \vec{B}.$$

et on en déduit \vec{E} par $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$. Mais j'ai déjà entendu un correcteur de leçon d'agreg dire que cette formule est une "merde" (sans argumenter plus). Il est donc plus prudent d'étudier les symétries du système et d'utiliser les équations de Maxwell pour résoudre cette question.

- (c) La puissance moyenne dissipée par effet Joule, dont l'origine physique est le travail de la force de Lorentz sur les charges libres dans le conducteur, est donnée par

$$d\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau = \sigma E^2 \, d\tau.$$

dont on déduit

$$d\mathcal{P} = \frac{\sigma B_0^2 \omega^2}{4} r^2 \sin^2(\omega t) d\tau$$

$$\langle d\mathcal{P} \rangle_t = \frac{\sigma B_0^2 \omega^2}{8} r^2 d\tau.$$

Une intégration sur le volume du cylindre donne finalement

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\pi \sigma B_0^2 \omega^2}{16} h R^4 \equiv K R^4.$$

Dans le cas d'un chauffage par induction en cuisine, les fréquences utilisées sont de l'ordre de 20 à 100 kHz, typiquement 25 kHz, et les champs magnétiques de l'ordre de 20 μT . La valeur du champ magnétique est limitée par les risques sanitaires. Pour l'utilisation industrielle, pour faire des soudures sans contact par exemple, de telles limitations n'existent pas si les robots ou machines nous remplacent. Pour une casserole en cuivre d'épaisseur 2 mm et de diamètre 20 cm, on obtient une puissance de chauffage $P \approx 60 \text{ W}$... ce qui est plutôt faible ! Il faut plutôt une puissance de l'ordre de 1 à 2 kW pour faire la cuisine. La solution réside dans le fait que le cuivre n'est pas le matériau adapté au chauffage par induction dans les conditions de cuisson. De plus, c'est un matériau diamagnétique qui donc a tendance à repousser les lignes de champ magnétique donc on ne pourrait pas supposer comme ici qu'il existe un champ \vec{B} oscillant au cœur du matériau. On préfère des matériaux ferromagnétiques de perméabilité magnétique $\mu_r \gg 1$, qui concentrent le flux magnétique dans le matériau) et moins bon conducteur électrique (la résistance effective augmente, ce qui diminue l'intensité du courant induit $i = e/R$ et l'effet Joule e^2/R diminue). La baisse de puissance dissipée par effet Joule peut être compensée par un gain en chaleur provenant des pertes par hystérésis dans le matériau ferromagnétique (construction et destruction des domaines de Weiss). L'optimisation du chauffage de la plaque de cuisson est donc un compromis entre les pertes par courant de Foucault et les pertes par hystérésis pour maximiser le chauffage. Noter que les courants sont en réalité confinés dans une épaisseur déterminée par l'effet de peau $\delta = \sqrt{2/\mu_0 \mu_r \sigma \omega}$ qui est plus petite que l'épaisseur de la casserole. Une façon d'introduire une application des courants de Foucault dans la leçon sur l'induction n'est donc peut-être pas de parler de la plaque à induction (qui nécessite de parler de matériau ferromagnétique) mais de ce qui suit : le feuilletage des matériaux pour le transport du flux magnétique (dans les transformateurs typiquement).

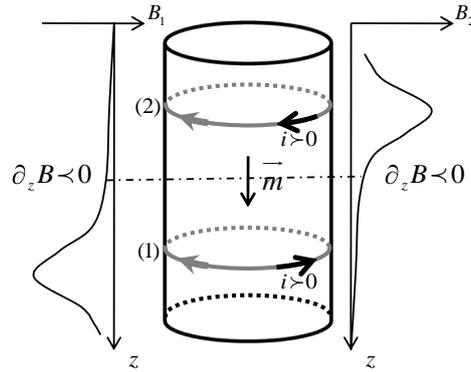


FIGURE 3.1 – Freinage par courants de Foucault. Les spires grises donnent l'orientation positive des surfaces pour le calcul des fem et des flux magnétiques.

- (d) On considère un ensemble de N fils de rayon r_N , tels que la surface totale soit celle du cylindre ci-dessus :

$$N\pi r_N^2 = \pi R^2.$$

La puissance dissipée dans N fils est alors

$$\mathcal{P}_N = NKr_N^4 = NK\left(\frac{R}{\sqrt{N}}\right)^4 = \frac{\mathcal{P}}{N}.$$

Pour une machine électrique tel qu'un transformateur, il est donc plus intéressant du point de vue énergétique d'utiliser N fils plutôt qu'un seul, à surface totale égale, la puissance dissipée décroissant avec N . Un autre effet important dans la conception des fils est le phénomène d'effet de peau qui limite la section du fil contribuant effectivement à la conduction car les courants sont confinés à la périphérie du fil sur une épaisseur de l'ordre de δ .

2. Attention : dans la discussion qui suit, l'axe z est orienté vers le bas.

L'aimant se déplaçant dans le cylindre, le conducteur voit un champ magnétique variable B . Cette variation induit des courants dans le conducteurs, qui vont eux-mêmes créer un champ magnétique au niveau de l'aimant, imposant ainsi une force sur le dipôle magnétique. Pour savoir si cette force aura tendance à accélérer ou à ralentir l'aimant, on assimile le cylindre à une superposition de petites spires, et on détermine le signe de la force créée par chaque spire. Il suffit en fait de ne s'intéresser qu'à une spire au-dessus et une autre en-dessous de l'aimant.

On oriente les spires tel qu'indiqué Fig. 3.1, et on s'intéresse en premier lieu à la spire (1). Le déplacement de \vec{m} s'accompagne d'une variation du flux de \vec{B} à travers la spire. Avec l'orientation choisie, cela correspond à une augmentation du flux de \vec{B} , et donc à une force électromotrice négative. D'où le sens du «courant positif» indiqué sur le schéma.

On trace sur la gauche du dessin le profil du champ magnétique créé par cette spire. Au niveau de \vec{m} , on a donc $\partial_z B < 0$ et la force subie par l'aimant vérifie²

$$d\vec{F}_1 = -\vec{\nabla}(-\vec{m} \cdot \vec{B}) = m\partial_z B \vec{u}_z \quad \text{soit} \quad d\vec{F}_1 \cdot \vec{u}_z < 0.$$

La spire (1) tend donc à freiner l'aimant.

Si l'on considère la spire (2), le même type de raisonnement mène à une diminution du flux de \vec{B} lors du déplacement de l'aimant, dont on déduit le sens du «courant positif» dans (2) et le signe du gradient du

2. On rappelle que l'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ magnétique est donnée par $W_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}$, d'où la force exercée sur le dipôle $\vec{F}_m = -\vec{\nabla}(-\vec{m} \cdot \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$.

champ magnétique créé au niveau de l'aimant : $\partial_z B < 0$. Les spires situées au-dessus de \vec{m} tendent donc elles aussi à freiner l'aimant.

L'aimant est ainsi freiné au cours de son mouvement dans le cylindre. Cette force de frottement est par ailleurs proportionnelle au champ créé par les spires, donc au courant y circulant, donc à la force électromotrice, elle-même proportionnelle au flux du champ magnétique de l'aimant, donc à ce champ magnétique, et donc à m . Le courant circulant dans la spire étant par ailleurs proportionnel à σ , et m n'en dépendant pas, on a la relation

$$F_{\text{freinage}} \propto m^2 \sigma.$$

On explique alors le fait expérimental que le freinage est plus important dans un cylindre de cuivre que dans un d'acier, et nul dans un cylindre de plexiglas.

Si l'on fend maintenant le cylindre sur sa longueur, les spires de courant considérées ne peuvent plus exister. On comprend alors bien qu'en empêchant aux courants de Foucault de s'établir facilement, on réduit le phénomène de freinage, sans pour autant l'annihiler (des spires, à la géométrie plus complexe, sont encore possibles).

Exercice 4 Transducteur électromécanique : haut-parleur/microphone

1. En sommant les forces de Laplace qui s'exercent sur chaque éléments de (B), on a :

$$d\vec{f} = i d\vec{l} \wedge \vec{B} = i B dl \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r = -i B dl \vec{u}_z \Rightarrow \vec{f} = -i B l \vec{u}_z \quad (\text{IV.1})$$

En projetant sur Oz le théorème de la résultante cinétique appliqué à (P) on a :

$$m\ddot{z} = -h\dot{z} - kz - Bli + F \quad (\text{IV.2})$$

2. Sur un élément $d\vec{l}$ de (B) est induite la f.e.m :

$$de = (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \dot{z} B dl (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r) \cdot \vec{u}_\theta = \dot{z} B dl \quad (\text{IV.3})$$

et donc en intégrant le long de (B) dans le sens positif de i :

$$e = B l \dot{z} = B l v \quad (\text{IV.4})$$

En écrivant que la tension $Ri + q/C$ est égale à la somme des f.e.m présentes dans le circuit $E + e - L di/dt$ on obtient l'équation demandée :

$$L\dot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = B l v + E \quad (\text{IV.5})$$

3. Pour faire le bilan énergétique du système, on réalise la combinaison (M) $\cdot v$ + (E) $\cdot i$. On obtient l'équation demandée avec :

$$U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k z^2 + \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (\text{IV.6})$$

somme de l'énergie mécanique (cinétique et potentielle élastique) du système et de son énergie électromagnétique (énergie contenue dans le champ magnétique de la bobine et énergie contenue dans le champ électrique du condensateur). L'équation demandée exprime bien la conservation de l'énergie : le taux d'augmentation de l'énergie U est égal à la somme des puissances Fv et Ei fournies par les deux sources d'énergie du système (la force extérieur F et la source de tension E) diminuée des puissances Ri^2 et hv^2 dissipées respectivement par effet Joule et par frottement fluide (dans le cas où le système émet un son, ce dernier terme modélise aussi une perte d'énergie par rayonnement acoustique).

4. Avec la substitution de d/dt par $j\omega$, on obtient aisément :

$$\underline{\xi}_v = -B l \underline{i} + \underline{E}, \quad \underline{z} \underline{i} = B l \underline{v} + \underline{E} \quad (\text{IV.7})$$

\underline{z} est l'impédance complexe usuelle du dipôle RLC. Le terme $\underline{\xi}_v$, quotient de la force de Laplace (homologue à une tension) par la vitesse \underline{v} (homologue à une intensité) est l'impédance mécanique (complexe) du pavillon mobile.

5. De (M') et (E') on tire :

$$\underline{v} = -\frac{Bl}{\underline{\xi}}, \quad \underline{i} = \frac{E}{\underline{z} + \underline{Z}} \quad (\text{IV.8})$$

La dernière expression montre que, du point de vue électrocinétique, tout se passe comme si, en raison du mouvement de (B) dans un champ magnétique, venait s'ajouter à \underline{z} une impédance électrique supplémentaire \underline{Z} . Celle-ci, appelée impédance motionnelle, caractérise le couplage électromécanique réalisé par le montage. Si $\nu = \omega/2\pi$ est dans la gamme de 20 Hz à 20 kHz, les vibrations du pavillon engendrent une onde de pression acoustique qui produit l'effet d'un son audible.

6. On obtient :

$$\underline{i} = \frac{Bl}{\underline{\xi}(\underline{z} + \underline{Z})} F \quad (\text{IV.9})$$

La proportionnalité (en représentation complexe et pour ω donné) de \underline{i} à F engendrée par la pression de l'onde acoustique qui arrive sur le système montre la possibilité d'utiliser le dispositif pour traduire un son sous forme d'un signal électrique, enregistrer ce dernier, et le reproduire à l'aide d'un haut-parleur.

Exercice 5 Force de Laplace et moteur synchrone

1. La densité de force de Laplace appliquée sur la tige est $d\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$. Sa résultante est donc

$$\vec{F} = \iiint d\vec{F} = \left(\iiint \vec{j} d\tau \right) \wedge \vec{B} = \int_A^B Id\vec{l} \wedge \vec{B} = I\vec{AB} \wedge \vec{B}.$$

Pour connaître son point d'application, il faut calculer son moment par rapport à un point quelconque, par exemple le centre O de la tige :

$$\vec{M}_O = \int_A^B \vec{OM} \wedge (Id\vec{l} \wedge \vec{B}) = I \left(\int_A^B \vec{OM} dOM \right) \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}),$$

où $\vec{u} = \vec{AB}/AB$. L'intégrale étant trivialement nulle car d'intégrand impaire, $\vec{M}_O = \vec{0}$. La force de Laplace est donc appliquée au centre de la tige.

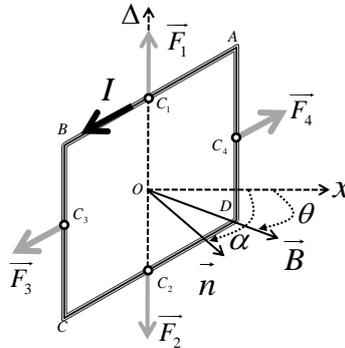


FIGURE 5.1 – Moteur synchrone

2. Les tiges orientées AB et CD, et BC et AD sont antisymétriques deux à deux (voir Fig. 5.1). Le champ magnétique étant homogène, la résultante des forces de Laplace est donc nulle :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 - \vec{F}_1 + \vec{F}_3 - \vec{F}_3 = \vec{0}.$$

Calculons alors le moment résultant par rapport au centre O du cadre³. Comme $\vec{OC}_1 \parallel \vec{F}_1$ et $\vec{OC}_2 \parallel \vec{F}_2$, on

3. Qui est bien un point de l'axe fixe \vec{u}_Δ .

a simplement

$$\begin{aligned}
\vec{M}_O &= \vec{M}(F_3) + \vec{M}(F_4) = \vec{OC}_3 \wedge \vec{F}_3 + \vec{OC}_4 \wedge \vec{F}_4 = 2\vec{OC}_4 \wedge \vec{F}_4 \\
&= 2\frac{a}{2}\vec{n}_\perp \wedge (NIa\vec{u}_\Delta \wedge B\vec{u}_B) \\
&= NBIa^2\vec{n}_\perp \wedge \vec{n}_{B\perp} \\
&= NBIa^2 \times \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)\vec{u}_\Delta \\
&= Na^2IB \sin(\theta - \alpha)\vec{u}_\Delta = N\vec{\uparrow} \wedge \vec{B} = \vec{M} \wedge \vec{B},
\end{aligned}$$

où l'on a posé $\vec{M} = N\vec{m} = Na^2I\vec{n}$ le moment magnétique des spires.

3. On a par ailleurs $\vec{R} = \vec{0} = \vec{\nabla}(\vec{M} \cdot \vec{B})$.

Le cadre se comporte donc exactement comme un dipôle magnétique \vec{M} dans le champ magnétique \vec{B} . On retrouve par ailleurs la formule usuelle donnant le moment magnétique d'une spire : $\vec{\uparrow} = I\vec{S}$ où \vec{S} est le vecteur surface de la spire.

4. On considère maintenant la situation où le champ magnétique tourne autour de \vec{u}_Δ à la vitesse Ω_0 soit $\theta = \Omega_0 t$. On suppose alors que le cadre tourne lui à la vitesse ω , soit $\alpha = \omega t - \varphi_0$.

Le couple subi par le cadre s'écrit alors

$$\vec{\Gamma} = MB \sin((\Omega_0 - \omega)t + \varphi_0)\vec{u}_\Delta,$$

qui a une moyenne non nulle seulement si

$$\omega = \Omega_0.$$

D'où l'appellation *synchrone* de ce moteur, qui n'est d'ailleurs *moteur* que si $P = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega} = \Omega_0 \Gamma = \Omega MB \sin \varphi_0 > 0$ soit $\sin \varphi_0 > 0$. Remarquons enfin que φ_0 peut s'interpréter soit comme le retard du cadre sur le champ dans le référentiel du laboratoire, soit comme l'angle repérant la position, fixe, de \vec{M} dans le référentiel tournant.

5. On suppose maintenant qu'on applique un couple résistant $\vec{\Gamma}_r = -k\vec{\omega}$. À l'équilibre, le moment cinétique du cadre est constant⁶ donc le couple total appliqué est nul :

$$\vec{\Gamma}_r + \vec{\Gamma} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad MB \sin \varphi_0 = k\Omega_0 > 0.$$

Il y a donc deux états d'équilibre différents, l'équation ci-dessus admettant deux solutions pour φ_0 .

Soit $\varphi_0^{(1)}$ et $\varphi_0^{(2)}$ ces solutions, avec $0 < \varphi_0^{(1)} = \pi - \varphi_0^{(2)} < \frac{\pi}{2}$. Supposons qu'à un instant donné, le cadre s'éloigne de sa position d'équilibre, $\varphi_0 = \varphi_0^{(i)} + \delta\varphi$, avec par exemple $\delta\varphi > 0$: le cadre s'éloigne du champ magnétique. Le couple moteur devient alors

$$\Gamma = MB \sin(\varphi_0^{(i)} + \delta\varphi) \quad \text{et} \quad \Gamma_T = \Gamma' + \Gamma_r = MB \left(\sin(\varphi_0^{(i)} + \delta\varphi) - \sin(\varphi_0^{(i)}) \right) \approx MB \delta\varphi \cos \varphi_0^{(i)}.$$

On voit alors que si $i = 1$, $\Gamma_T > 0$ et le cadre est ramené vers le champ magnétique, *i.e.* vers sa position d'équilibre. Au contraire, si $i = 2$, $\Gamma_T < 0$ et le cadre continue à s'éloigner de sa position d'équilibre. $\varphi_0^{(1)}$ est donc une position d'équilibre stable, $\varphi_0^{(2)}$ est une position d'équilibre instable.

Une autre façon de retrouver ce résultat consiste à imaginer qu'à un instant donné le couple résistant varie légèrement, diminue par exemple. Dans ce cas, le cadre se met à tourner plus vite et réduit son retard sur \vec{B} . Si $i = 1$, une réduction du retard induit une diminution du couple moteur, et le cadre ralentit donc pour retourner vers son état d'équilibre. Si $i = 2$, au contraire, le couple moteur augmente et le cadre continue à accélérer, s'éloignant d'autant plus de sa position d'équilibre.

Enfin, il faut noter qu'il existe une valeur maximale du couple résistant auquel le couple moteur peut s'opposer,

$$\Gamma_r^{\max} = MB,$$

et donc une valeur maximale pour k : $k_{\max} = MB/\Omega_0$. Au delà, le cadre ralentit jusqu'à l'arrêt.

4. $\alpha(t)$ et $\theta(t)$ n'ont aucune raison de s'annuler au même instant, d'où la présence du terme φ_0 .

5. Parce que l'on a supposé $\omega > 0$. Dans le cas opposé, il faudrait $\sin \varphi_0 < 0$ pour que le couple soit moteur. Dans tous les cas, il faut que le cadre soit en retard par rapport au champ magnétique.

6. Le cadre n'est immobile que dans le référentiel tournant à Ω_0 .

Exercice 6 Moteur asynchrone (facultatif)

Voir *Electromagnétisme, MP/MP**, Daniel Mauras, AG PhA1 MAU, p.464.

Motivations: étudier des effets temporels sans propagation.

En gros: garder $\partial_t \vec{E}$ ou $\partial_t \vec{B}$ mais pas les deux.

obj: justifiez les approximations par des ordres de grandeurs (ou par la limite galiléenne des équations de Maxwell.)

Définition: **ARQS** régime où l'on peut négliger l'effet retard de la propagation dans les potentiels, i.e:

$$V(\vec{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{s}, t)}{\|\vec{r}-\vec{s}\|} d^3s \quad \text{et} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{s}, t)}{\|\vec{r}-\vec{s}\|} d^3s$$

soit l'approximation

$$\Delta V = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)$$


ou néglige les dérivées temporelle.

justification et ordre de grandeur:

soit L la distance typique d'étude
 T le temps } il faut donc $\frac{L}{T} \ll c$

soit $\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{V}, \tilde{A}, \tilde{E}, \tilde{B}$ les valeurs typiques des sources, potentiels et V le volume où se trouve les sources champs

$$\tilde{V} \sim \frac{\tilde{\rho} V}{\epsilon_0 L} \quad \text{et} \quad \tilde{A} \sim \mu_0 \frac{\tilde{j} V}{L} \quad \text{donne} \quad \frac{\tilde{V}}{c \tilde{A}} \sim \left[\frac{\tilde{\rho} c}{\tilde{j}} \right]$$

donc il faut déterminer si $\tilde{\rho} c \gg \tilde{j}$ ou $\tilde{j} \gg \tilde{\rho} c$ pour pouvoir simplifier les équations de Maxwell: (si $\tilde{\rho} c \sim \tilde{j} \rightarrow$ pas de simplification)

1^{er} cas: $\tilde{\rho} c \gg \tilde{j}$ (limite électrique)

$$\text{dans } \vec{E} = -\underset{\tilde{V}}{\text{grad}} V - \underset{\tilde{A}}{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

$$\text{donc } \frac{\|\text{grad} V\|}{\|\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\|} \sim \frac{\tilde{V}}{L} \frac{L}{\tilde{A}} \sim \left(\frac{L}{L} \right) \left(\frac{\tilde{V}}{c \tilde{A}} \right) \gg 1$$

ou prend $\vec{E} \simeq -\text{grad} V$

en revanche dans $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\frac{\|\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\mu_0 \vec{j}\|} \sim \frac{1}{c^2 T} \frac{\tilde{V}}{L} \frac{1}{\mu_0 \tilde{j}} \sim \frac{\tilde{V}}{c^2 \mu_0 \epsilon_0 T L^2 \tilde{j}} \sim \frac{L}{c T} \frac{\tilde{V}}{\tilde{j} L^3} \sim 1$$

on aura un champ électrique dominant:

$$\frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{c \|\text{rot } \vec{A}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{c \tilde{A}}{\tilde{V}} \sim \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho} c} \ll 1 \Rightarrow \begin{array}{l} \Delta \text{ fait} \\ \text{brutalement} \\ c = \infty \text{ donne} \\ \text{des absurdités} \\ \text{si on le fait} \\ \text{directement sur Maxwell} \end{array}$$

Dans cette limite:

magnétostatique
"perturbés"

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \text{rot } \vec{E} \approx \vec{0} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

} quasi-électrostatique

mesurable, donne des effets inductifs dans les condensateurs. "courant de déplacement"

gauge: $\frac{\|\text{div } \vec{A}\|}{\|\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\|} \sim \frac{c T}{L} \frac{c \tilde{A}}{\tilde{V}} \sim 1$

on garde Lorenz

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

domaine d'application: condensateurs en régime variables

la charge et \vec{E} dominant. On a bien $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

qui redonne $I = \frac{dQ}{dt}$.

2ème cas: limite magnétique $\tilde{\rho} c \ll \tilde{j}$:

il est clair dans ce cas que $\frac{\|\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\mu_0 \vec{j}\|} \ll 1$ et $\frac{\|\text{grad } V\|}{\|\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\|} \sim 1$

de plus $\frac{c \|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \gg 1$ et $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

dans cette limite:

électrostatique "perturbés" $\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \right.$

→ phénomène d'induction

} quasi-magnétostatique

gauge: $\text{div } \vec{A} = 0$

Coulomb \leftrightarrow Lorenz dans cette limite

charge: $\text{div } \vec{j} = 0$

sorte de loi des nœuds

→ applications: complexe bobine, électromécanique, fem, ...

Les limites galiléennes de l'électromagnétisme — retour sur l'ARQS

Limites galiléennes des équations de Maxwell à partir de la transformation de Lorentz

soit $\vec{v} = (v_0, \vec{v})$ un quadri vecteur et $\begin{cases} \vec{\beta} = \frac{\vec{u}}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$

ou a:

$$\begin{cases} v_0' = \gamma (v_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{v}) \\ \vec{v}'_{\parallel} = \gamma (\vec{v}_{\parallel} - \vec{\beta} v_0) \\ \vec{v}'_{\perp} = \vec{v}_{\perp} \end{cases}$$

ou note: \tilde{v}_i l'ordre de grandeur de la composante et $v = \|\vec{v}\|$ et \tilde{v} l'ordre de grandeur associé.

question: quelle transformation lorsque $\beta \ll 1$ (limite galiléenne)?

trois cas: (i) $\tilde{v}_0 \sim \tilde{v} \rightsquigarrow \vec{v}$ est quasi de genre lumière pas de limite galiléenne possible

(ii) $\tilde{v}_0 \gg \tilde{v}$: \vec{v} est quasi de genre temps ($\vec{v}^2 \simeq v_0^2$)

(iii) $\tilde{v}_0 \ll \tilde{v}$: \vec{v} espace ($\vec{v}^2 \simeq v^2$)

On va avoir $\gamma \simeq 1$ dans la transformation mais il faut faire attention aux β : deux cas sont possibles suivant $\frac{\tilde{v}_0}{\tilde{v}}$:

cas (ii):

$$\begin{cases} v_0' \simeq v_0 \\ \vec{v}' \simeq \vec{v} - v_0 \vec{\beta} \end{cases}$$

transformation de Galilé usuelle.

cas (iii):

$$\begin{cases} v_0' \simeq v_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{v} \\ \vec{v}' \simeq \vec{v} \end{cases}$$

transformation de "Caroll"

Exemples: $\vec{X} = (ct, \vec{x})$ tel que $\|\vec{x}\| \ll ct$, on a bien

(2)

$$\begin{cases} t = t' \\ \vec{x}' = \vec{x} - \vec{u}t \end{cases}$$

• opérateur nabla:

on écrit $x = \gamma(x' + \beta ct')$
 $ct = \gamma(ct' + \beta x')$

qui donne
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \beta c \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial x} + \gamma \beta \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \end{cases}$$

Ainsi $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla}' \end{pmatrix}$ est un quadrivecteur. (tel que $\vec{\nabla}^2 = \square$)

soit \tilde{t} et \tilde{x} les variations typiques de temps et d'espace:

$$\tilde{v}_0 \sim \frac{1}{c\tilde{t}} \text{ et } \tilde{v} \sim \frac{1}{\tilde{x}} \Rightarrow \text{a priori } \frac{\tilde{v}_0}{\tilde{v}} \sim \frac{\tilde{x}}{c\tilde{t}} \ll 1$$

à la limite galiléenne

donc on doit avoir:

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \approx \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{\nabla}}{c} \\ \vec{\nabla}' \approx \vec{\nabla} \end{cases}$$

c'est bien le résultat que l'on aurait obtenu en partant de la transformation de Galilée ci-dessus.

Définition des limites électriques et magnétiques

(3)

on part du quadri-vecteur source de courant:

$$\vec{J} = (\rho c, \vec{j}) \quad \text{et l'on a } \vec{A} = \left(\frac{V}{c}, \vec{A}\right) \text{ le quadri-vecteur potentiel.}$$

(E) si $\tilde{\rho}c \gg \tilde{j}$: limite électrique:

dans ce cas, on s'attend à ce que $\tilde{V} \gg c\tilde{A}$

et donc que $\tilde{E} \gg c\tilde{B}$

c'est la même limite que discutée en premier lieu.

(M) si $\tilde{\rho}c \ll \tilde{j}$: limite magnétique:

dans ce cas, on s'attend à $\tilde{V} \ll c\tilde{A}$ et $\tilde{E} \ll c\tilde{B}$.

Transformation des quadri-vecteurs \vec{J} à la limite galiléenne:

d'après les résultats précédents:

$$(E) \quad \begin{cases} \rho' = \rho \\ \vec{j}' = \vec{j} - \rho \vec{u} \end{cases}$$

$$(M) \quad \begin{cases} \rho' = \rho - \frac{\vec{u} \cdot \vec{j}}{c^2} \\ \vec{j}' = \vec{j} \end{cases}$$

Transformation des champs (\vec{E}, \vec{B}) à la limite galiléenne:

on pourrait partir des potentiels et discuter les ordres de grandeur. Il est plus instructif de partir du résultat relativiste et de discuter les limites possibles lorsque $\beta \rightarrow 0$.

Du coup, on obtient:

$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma [\vec{E}_{\perp} + \vec{u} \wedge \vec{B}] \\ \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma \left[\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c^2} \right] \end{cases}$$

il faut alors faire attention à l'ordre de grandeur des différents termes: (4)

$$* \frac{|E_{\perp}|}{|\vec{u} \wedge \vec{B}|} \sim \frac{\tilde{E}}{\frac{u}{c} \tilde{B}}$$

(E) \triangleright très grand $\gg 1 \Rightarrow$ on néglige $\vec{u} \wedge \vec{B}$

(M) $\triangleright \sim 1 \Rightarrow$ on garde les deux termes.

$$* \frac{|B_{\perp}|}{\frac{|\vec{u} \wedge \vec{E}|}{c^2}} \sim \frac{c \tilde{B}}{\tilde{E}} \frac{1}{\frac{u}{c}}$$

(E) $\triangleright \sim 1 \Rightarrow$ on garde les deux termes

(M) $\triangleright \gg 1 \Rightarrow$ on néglige $\frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c^2}$

de plus, il est légitime de faire $\gamma \approx 1$.

Conclusion: dans chacune des limites, les transformations des champs deviennent:

$$(E) \quad \begin{cases} \vec{E}' \simeq \vec{E} \\ \vec{B}' \simeq \vec{B} - \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c^2} \end{cases}$$

$$(M) \quad \begin{cases} \vec{B}' \simeq \vec{B} \\ \vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} \end{cases}$$

N.B.: on peut vérifier (mais c'est assez long) que si l'on compose les transformations en considérant $\vec{u}_{13} = \vec{u}_{12} + \vec{u}_{23}$, les lois ci-dessus forment bien un groupe.

Si l'on avait fait brutalement $\gamma = 1$ dans le résultat relativiste, comme c'est souvent fait dans les livres, on écrit

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{B} \\ c \vec{B}' = c \vec{B} - \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E} \end{cases} \quad (\text{incorrect})$$

(dans si $\tilde{E} \sim c \tilde{B}$ ou quel cas, on peut faire $\frac{u}{c} \rightarrow 0$ et on a $\frac{\vec{E}'}{B'} = \frac{\vec{E}}{B}$ (trivial))

dont on peut constater que la composition de deux transformations ne redonne pas la même transformation.

Équations de Maxwell dans ces limites :

(5)

comme justifié par la discussion des ordres de grandeur précédemment, on s'attend à ce que les équations de Maxwell s'approximent bien par les formes suivantes, selon les limites :

$$(E) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$(M) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} \simeq -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

On dispose maintenant d'équations dans un référentiel galiléen. On peut vérifier qu'elles conservent la même forme (invariance) lors d'une transformation de Galilée. Pour cela, on utilise les résultats sur les transformations des sources \vec{J} , de l'opérateur $\vec{\nabla}$ et des champs (\vec{E}, \vec{B}) (ou de $F^{\mu\nu}$) dans chacun des cas :

cas (E): les deux premières équations sont trivialement invariantes puisque $\vec{E}' = \vec{E}$, $\rho' = \rho$ et $\vec{\nabla}' = \vec{\nabla}$.

pour les deux autres :

$$\ast \quad \vec{\nabla}' \cdot \vec{B}' = (\vec{\nabla}) \cdot \left(\vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{u} \wedge \vec{E} \right) \quad \text{et} \quad \operatorname{div}(\vec{u} \wedge \vec{E}) = \underbrace{\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{u}}_{\vec{0}} - \underbrace{\vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}}_{\vec{0}}$$
$$= \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

$$\ast \quad \vec{\nabla}' \wedge \vec{B}' = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{u} \wedge \vec{E} \right) \quad \text{et} \quad \operatorname{rot}(\vec{u} \wedge \vec{E}) = \underbrace{\vec{u} \operatorname{div} \vec{E}}_{\vec{0}} - \underbrace{(\vec{u} \cdot \operatorname{grad}) \vec{E}}_{\vec{0}} - \underbrace{[\vec{E} \operatorname{div} \vec{u} - (\vec{E} \cdot \operatorname{grad}) \vec{u}]}_{\vec{0}}$$

$$\text{et} \quad \mu_0 \vec{j}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} = \mu_0 (\vec{j} - \rho \vec{u}) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \right) \vec{E}$$

en utilisant $\operatorname{div} E = \rho / \epsilon_0$ et $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$, on trouve bien que cette dernière est invariante.

cas (M): cette fois, ce sont les deux dernières qui sont triviales: (6)

$$\left. \begin{aligned} * \vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' &= \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{div} (\vec{u} \wedge \vec{B}) \\ &\quad - \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} = -\mu_0 \vec{u} \cdot \vec{j} \end{aligned} \right\} \operatorname{div}' \vec{E}' = \rho' / \epsilon_0$$

et $\rho' = \rho - \frac{1}{c^2} \vec{j} \cdot \vec{u}$, $\mu_0 = \frac{1}{c^2 \epsilon_0}$

$$\left. \begin{aligned} * \operatorname{rot}' \vec{E}' &= \operatorname{rot} \vec{E} + \operatorname{rot} (\vec{u} \wedge \vec{B}) \\ &\quad - \vec{u} \operatorname{div} \vec{B} - (\vec{u} \cdot \operatorname{grad}) \vec{B} \end{aligned} \right\} \operatorname{rot}' \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}$$

et $-\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad}\right) \vec{B}$

les limites sont donc cohérentes, les lois étant invariantes sous la transformation de Galilée \Rightarrow d'où le nom de limite galiléenne

Rq: * on voit donc, indirectement, que l'ensemble des équations de Maxwell n'est, lui, pas invariant lors d'une transformation de Galilée. Il l'est sous une transformation de Lorentz.

* historiquement, la limite magnétique des équations était connue puisqu'elle décrit les phénomènes magnétostatiques, électrostatiques et d'induction. Comme on le redécouvrira, on pourrait trouver la transformation des champs dans cette limite à partir de l'invariance de la force de Lorentz.

Maxwell a mis le bazar en introduisant le courant de déplacement $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ qui brise cette limite mais a permis de prédire les ondes électromagnétiques (entre autres) qui furent observées peu après.

Dualité dans la transformation des champs, force de Lorentz (7)

et équations de Maxwell.

Rappelons la loi de transformation des champs relativiste:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma [\vec{E}_{\perp} + \vec{u} \wedge \vec{B}] \\ \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp} &= \gamma \left[\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c^2} \right] \end{aligned}$$

ces lois sont clairement invariantes sous la transformation \mathcal{D} de dualité:

$$(\vec{E}, \vec{B}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (c\vec{B}, -\vec{E}/c)$$

où c apparaît en raison de son rôle dimensionnel dans le système S.I.

Lorsque l'on passe aux limites galiléennes discutées ci-avant, on observe que \mathcal{D} fait passer de la transformation des champs électrique à celle magnétique. On pourrait s'y attendre puisque $\frac{\vec{E}}{c\vec{B}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{c\vec{B}}{\vec{E}}$, où l'on voit le rôle des ordres de grandeur.

Cette observation permet de bien comprendre pourquoi il y a deux limites galiléennes: c'est lié à la cinématique du champ et pas directement à ses sources.

dualité et équations de Maxwell:

on constate que les équations de Maxwell en présence de termes de sources ne sont pas invariantes selon cette dualité.

De même, la force de Lorentz ne l'est pas non plus.

On peut cependant introduire des charges magnétiques ρ_m pour rétablir cette symétrie (on les appelle également monopoles magnétiques), et tels que $\text{div}(c\vec{B}) = \rho_m / \epsilon_0$

Afin de voir plus clairement la symétrie, on change (8)
d'unité pour les champs et les charges: (l'indice e correspond
aux charges électriques,
et m aux charges
magnétiques)

$$\vec{E}^* = \vec{E}$$

$$\vec{B}^* = c\vec{B}$$

$$\rho_e^* = \rho_e / \epsilon_0$$

$$\rho_m^* = \rho_m / \epsilon_0$$

(de même pour les courants
associés)

Dans ces variables, on aura:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}^* &= \rho_e^* \\ \operatorname{div} \vec{B}^* &= \rho_m^* \\ \operatorname{rot} \vec{E}^* &= -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t} + \vec{j}_m^* \right) \\ \operatorname{rot} \vec{B}^* &= +\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{E}^*}{\partial t} + \vec{j}_e^* \right) \end{aligned}$$

redonnent la conservation des charges ρ_m / ρ_e

La symétrie de dualité
donne dans ces variables

$$\begin{aligned} \rho_e^* &\rightarrow \rho_m^* \\ \rho_m^* &\rightarrow -\rho_e^* \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \vec{E}^* &\rightarrow \vec{B}^* \\ \vec{B}^* &\rightarrow -\vec{E}^* \\ \vec{j}_e^* &\rightarrow \vec{j}_m^* \\ \vec{j}_m^* &\rightarrow -\vec{j}_e^* \end{aligned}$$

on voit alors que cet ensemble d'équations est invariant sous
la dualité D. On voit aussi que le seul c qui apparait
le fait de façon symétrique entre les deux rotationnels.

De même, on s'attend à ce que la force de Lorentz
prenne une forme symétrique: si l'on écrit cela par unité
de volume, on aura: $\vec{f} = \rho_e^* \vec{E}^* + \frac{\vec{j}_e^*}{c} \wedge \vec{B}^* + \rho_m^* \vec{B}^* - \frac{\vec{j}_m^*}{c} \wedge \vec{E}^*$
qui est invariante selon D.

Dans la nature, les charges magnétiques n'ont jamais
été observées mais ces remarques sur la dualité électrique/
magnétique nous permettent de comprendre certaines
limites des raisonnements habituellement présentés.

En particulier, revenons sur l'argument habituel qui (9) permet de déterminer la transformation des champs dans le cadre d'une physique galiléenne:

entre deux référentiels galiléens R et R' , on écrit l'invariance de la force de Lorentz sur une charge électrique q_e : (elle-même invariante!) animée d'une

$$\text{vitesse } \vec{v}/R, \vec{v}'/R': q_e (\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}') = q_e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

avec l'addition des vitesses galiléennes: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$

$$\hookrightarrow \text{on projette selon } \vec{v}': \vec{v}' \cdot \vec{E}' = \vec{v}' \cdot \vec{E} + \vec{v}' \cdot (\vec{u} \wedge \vec{B})$$

$$\text{soit } \forall \vec{v}', \vec{v}' \cdot (\vec{E}' - \vec{E} - \vec{u} \wedge \vec{B}) = 0$$

$$\text{d'où l'on tire que } \boxed{\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}}$$

en réinjectant ce résultat dans la première égalité, on obtient $\forall \vec{v}, \vec{v} \wedge (\vec{B}' - \vec{B}) = \vec{0}$ soit $\boxed{\vec{B}' = \vec{B}}$.

Ainsi, cette démonstration ne souffre d'aucune erreur mathématique mais on ne retrouve que la transformation des champs de la limite magnétique (M). On comprend alors que pour trouver la loi de transformation dans la limite électrique, il aurait fallu effectuer le raisonnement sur la force duale associée aux charges magnétiques $\vec{f}_m = q_m (\vec{B} - \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{c^2})$

on trouve alors

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B}' &= \vec{B} - \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c^2} \\ \vec{E}' &= \vec{E} \end{aligned}}$$

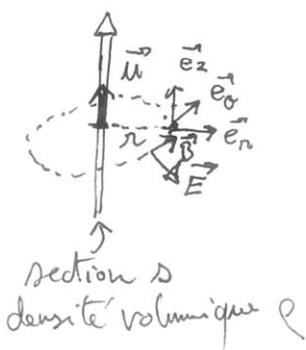
résultat qui, finalement ne dépend pas de l'existence ou non des q_m ...

Exemples physiques et commentaires:

* Les manuels représentent généralement que la limite magnétique pour les raisons suivantes: elle permet de décrire les phénomènes d'induction, de couplage électro-mécanique et concerne les régions dominées par les courants, sans accumulation de charges; d'autre part, c'est dans cette limite que la transformation des champs à partir de la force de Lorentz marche bien. Expérimentalement, cette limite telle que $\tilde{\rho}c \ll \tilde{j}$ est réalisée grâce aux conducteurs qui sont essentiellement neutres électriquement aux basses fréquences ($\tilde{\omega} \approx 0$) tout en pouvant être parcourus par de forts courants \tilde{j} .

* La limite électrique correspond plus au domaine des condensateurs en régime alternatif. Cependant, pour expliquer certains phénomènes d'électrodynamique à toutes fréquences, il faut l'ensemble des équations de Maxwell. Un autre exemple très simple dans la limite électrique est celui d'un faisceau chargé homogène:

Dans R du labo:



Gauss sur une longueur l:

$$2\pi r l E_n = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho l \pi r^2}{\epsilon_0}$$

intensité: $I = \frac{dQ}{dt} = \rho \Delta \frac{dx}{dt} = \rho u \Delta$

d'où $\vec{E} = \frac{I}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r$

champ magnétique: $2\pi r B_\phi = \mu_0 I$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\phi = \frac{u}{c^2} \wedge \vec{E}$$

Dans R' attaché au

faisceau
charges fixes $\Rightarrow \vec{B}' = \vec{0}$
 $= \vec{B} - \frac{u}{c^2} \wedge \vec{E}$

$$\vec{E}' = \frac{I}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r = \vec{E}$$

raison: quadri vecteur \vec{j}
tel que $\tilde{\rho}c \gg \tilde{j} = \tilde{\rho}u$ si $u \ll c$

Note sur les notes

Les notes ci-dessus ne répondent pas à une question : où réside le paradoxe soulevé par les questions 1. et 3. de l'exercice 1 ? La situation physique présentée question 1. est pourtant identique à celle présentée dans le paradoxe de la question 3. : des électrons en mouvement "lent" avec $\rho c \gg j \approx \rho u$ donc relevant de la limite électrique des équations de Maxwell. Cette incompatibilité entre les deux raisonnements vient du fait dans la question 3. on est dans le cas où $\rho c \gg \vec{j}$ ie le cas où le champ électrique domine sur le champ magnétique $\vec{E} \gg c\vec{B}$. Avec une approche relativiste propre, dans ces conditions dans la limite galiléenne on aboutit à la limite électrique, celle qui semble donner les bonnes transformations des champs de la question 3. Or dans la limite galiléenne électrique, le quadri-vecteur courant $(\rho c, \vec{j})$ se transforme comme intuitivement en mécanique galiléenne :

$$\begin{cases} \rho' = \rho \\ \vec{j}' = \vec{j} - \rho \vec{u} \end{cases} \quad (VI.1)$$

Comme se fait-il alors que dans la question 1. la même transformation des sources mène à la limite magnétique ?

Dans la limite galiléenne magnétique, on a $\rho c \ll \vec{j}$ i.e. $\vec{E} \ll c\vec{B}$. Normalement les densités locales des sources devraient se transformer comme

$$\begin{cases} \rho' = \rho - \vec{u} \cdot \vec{j} / c^2 \\ \vec{j}' = \vec{j} \end{cases} \quad (VI.2)$$

mais on n'utilise pas cette transformation. Cette transformation est toute sauf intuitive dans un cadre galiléen. En revanche on utilise l'invariance de la charge électrique par changement de référentiel, et non l'invariance de la densité locale de charge. Comme le fait remarquer Lévy-Leblond dans son article sur l'électromagnétisme galiléen, par nature la relativité ne s'intéresse qu'à des champs locaux pour s'intéresser à la propagation à vitesse finie de ces quantités. La force de Lorentz elle agit sur des charges globales, et on aboutit là à une différence importante entre les deux raisonnements.

Comment se fait-il que le raisonnement sur la force de Lorentz, qui s'applique à des charges électriques, mène à la limite magnétique ? Il d'abord noter que, puisque la force de Lorentz ne s'applique qu'à des charges électriques, la nature introduit ici une dissymétrie fondamentale qui va faire que l'écriture de la conservation de la force de Lorentz électrique ne va mener qu'à une seule des limites galiléennes. En l'occurrence il s'agit de la limite magnétique car on considère la composante $\vec{v} \wedge \vec{B}$ non négligeable devant \vec{E} . C'est-à-dire que dans le raisonnement de la question 1 on a $\vec{E} \ll c\vec{B}$.

S'il existait des charges magnétiques dans la nature, alors la force de Lorentz s'écrirait :

$$\vec{F} = q_e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) + q_m \left(\vec{B} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{E} \right)$$

avec q_m la charge magnétique. Un raisonnement sur la conservation de cette force mène aux deux limites galiléennes de l'électromagnétisme tantôt si l'on considère que $\vec{E} \ll c\vec{B}$ ou $\vec{E} \gg c\vec{B}$.

Ainsi, chacun des deux raisonnements est bien valide, néanmoins la nature nous joue un tour en assymétrisant les rôles de \vec{E} et \vec{B} par l'absence de charge magnétique (en tout cas elles ne sont pas encore détectées). De plus la force de Lorentz électrique suffit à expliquer les phénomènes inductifs, ceux produits par des champs \vec{B} intenses, ceux-là même qui ont mener à la révolution industrielle. Encore une fois une assymétrie technologique fait que seule la limite magnétique est importante pour notre quotidien, et ce n'est pas si fortuit que ce soit celle qui apparait par le raisonnement sur la force de Lorentz électrique.

En effet, du point de vue de l'histoire de la physique, les questions de transformations galiléennes des champs ne se sont posées que très tardivement... en fait seulement depuis 1973 avec l'article de Le Bellac et Lévy-Leblond sur les limites galiléennes des équations de Maxwell. Il faut bien comprendre qu'à partir du moment où l'électron a été découvert (par Thomson en 1897) ainsi que l'effet Zeeman (par Zeeman en 1895) (confirmant la nature particulière du "fluide" électrique), il s'est écoulé très peu de temps avant l'invention de la relativité restreinte. Et le problème ne s'est pas posé en termes de transformations galiléennes des champs, mais en terme d'éther absolu et d'invariance de la vitesse de la lumière. L'invention de la transformation galiléenne des champs n'est donc que récente et possède un certain charme pour qui veut introduire les phénomènes d'induction. Mais attention aux paradoxes !

Pour conclure, il faut sans cesse se souvenir que l'électromagnétisme est une théorie fondamentalement relativiste, car on parle de champs se propageant à c ou du moins à des vitesses largement relativistes mêmes dans les milieux denses. Les raisonnements galiléens sur ces champs sont donc forcément un peu ad hoc et on touche avec l'induction aux limites de la modélisation de l'électromagnétisme dans la mécanique galiléenne.

Bref historique de l'électromagnétisme

La théorie électromagnétique est une lente construction qui s'est écoulé sur quasiment un siècle. Des premières expériences de Faraday, Coulomb ou encore Ampère, des lois empiriques ont été tirées. Ajoutons aussi à ce tableau la notion d'éther partiellement entraîné par les corps en mouvement de Fresnel. Maxwell parvient à réunir tous ces phénomènes en 4 équations par analogie mécanique et hydrodynamique vers 1865. Cependant il reste attaché à la notion d'éther absolu et les "fluides" électriques restent attachés à celui-ci, ce qui ne convient pas pour interpréter les expériences ayant vérifiées la formule de Fresnel (expérience de Fizeau par exemple). Mais pour parfaire sa théorie en voulant obtenir la conservation de la charge électrique, comme en hydrodynamique on conserve la matière, Maxwell rajoute le terme de "courant de déplacement" à l'équation d'Ampère. Ce terme impose la propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide, qui seront découvertes par Hertz en 1887. Ce dernier mesure que ces ondes se propagent à la vitesse de la lumière : la lumière est une onde électromagnétique ! Ceci assois définitivement la théorie électromagnétique de Maxwell face à ses concurrentes.

Vers 1892-1895, Lorentz parvient à reformuler les équations de Maxwell sous la forme que l'on connaît aujourd'hui (avec les champs \vec{E} et \vec{B}) en y ajoutant la théorie atomiste : le fluide électrique est constituée de particules de matière chargées qui par nature sont détachés de l'éther. Un pas est fait pour se réconcilier avec Fresnel. Aux 4 équations est rajoutée la force de Lorentz, agissant sur les particules chargées. Avec ce jeu complet d'équations, il parvient à expliquer tous les phénomènes magnéto-électrodynamiques connus. La découverte de l'effet Zeeman classique due à l'action de la force de Lorentz magnétique sur les électrons élastiquement liés ainsi que la découverte de l'électron vont asseoir la théorie de l'électromagnétisme de Lorentz et la théorie atomiste. Mais rapidement l'expérience de Michelson-Morley met les physiciens au défi. Lorentz introduit la notion de temps local et de contraction des longueurs pour expliquer ces résultats expérimentaux (que même la théorie de Fresnel ne peut expliquer) mais ne parvient pas à se défaire de la notion d'éther, ni Poincaré. C'est en 1905 que Einstein franchit le pas avec la théorie de la relativité restreinte, et en 1908 la transformation relativiste des champs est formulée par Einstein et Laub.

A propos de la théorie de Fresnel...

... sur l'éther partiellement entraîné, je vous propose ce très bon document :

<http://aflb.ensmp.fr/AFLB-291/aflb291p021.pdf>

qui explique quel a été son raisonnement sur l'éther et en quoi l'expérience de Michelson et Morley a permis d'aller au-delà de cet effet de premier ordre relativiste faussement interprété.