Jérémy Neveu
jeremy.neveu@ens.fr

Partie 1 : Cinématique relativiste

Exercice 1 Mise en jambe

dilatation des temps, contraction des longueurs

1. Prof, c'est la vie ! Sachant qu'un professeur agrégé exerce environ 500 h/an, et que pendant la moitié de son temps il déambule à 4 km/h devant son tableau, calculer combien d'espérance de vie le professeur gagne par rapport à ses élèves vautrés sur leurs chaises. Le métier de prof en vaut-il la peine ?
2. Reporter du XXXe siècle C'est le grand jour de la sortie de la nouvelle Ariane 6000, pouvant se déplacer à la vitesse $u = 0.9c$. Les journalistes du monde entier sont prêts avec leurs appareils photo à saisir le moment où le vaisseau battra le record du monde de vitesse, pile en face d'eux. Sachant que l'Ariane 6000 mesure 200 m de long, quelle est sa dimension vue par le public ? Comment le reporter doit-il choisir son zoom pour que sa photo fasse la une ?

Exercice 2 Paradoxe de la règle et du trou

dilatation des durées, contraction des longueurs, simultanéité.

On étudie la situation schématisée sur la figure ci-dessous. On se place dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ doté des axes x et z et d'une horloge donnant t. Une règle de longueur propre L se déplace selon l'axe Ox à une vitesse constante $\vec{u}$ proche de c (on prendra $\gamma(\vec{u}) = 2$). Un plan percé d'un trou de largeur propre L se déplace lui selon l'axe Oz à une vitesse constante $\vec{v}$ telle que $\|\vec{v}\| \ll c$ de telle sorte que le mouvement du trou selon z sera considéré comme galiléen. Le mouvement est tel que le milieu de la règle atteint le milieu du trou à $t = 0$ et coïncide avec l'origine O.

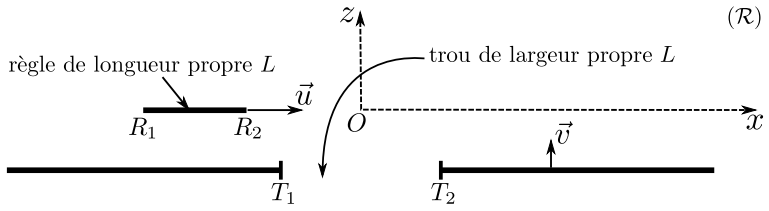


FIGURE 2.1 – Point de vue dans le référentiel $\mathcal{R}$ à $t < 0$.

En raison de la contraction de la longueur de la règle dans $\mathcal{R}$, on s'attend à ce qu'elle passe largement dans le trou. Il apparaît un paradoxe si l'on se place dans le référentiel $\mathcal{R}'$ attaché à la règle et qu'on voit alors la largeur du trou rétrécir : la règle ne pourrait alors plus passer. En étudiant les coordonnées des extrémités $R_{1,2}$ et $T_{1,2}$ de la règle et du trou dans chacun des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, lever le paradoxe.

Exercice 3 Expérience de Fizeau (1851)

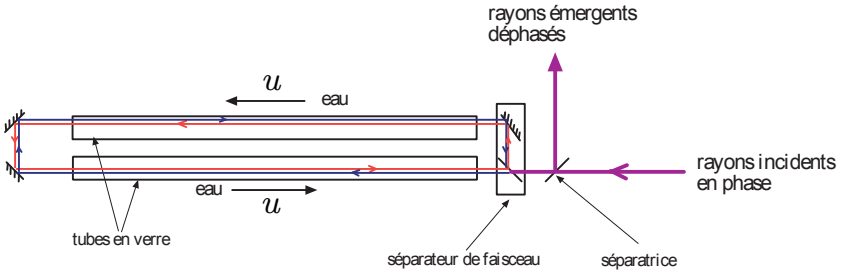
composition des vitesses, ondes.

1. Rappeler la forme de la transformation de Lorentz entre deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ ayant une vitesse relative $\vec{u}$ selon l'axe Ox. En déduire la loi de composition des vitesses lors du changement de référentiel sous forme vectorielle.

Le dispositif mis au point par Fizeau pour étudier la limite de validité de la loi de composition des vitesses galiléenne est schématisé sur la figure ci-dessous :

On y fait interférer deux faisceaux lumineux tournant en sens opposé par rapport à un écoulement d'eau de vitesse constante u dans deux tubes de longueur L. On crée en sortie un système de franges à l'aide d'un dispositif interférentiel. On rappelle que l'indice n d'un fluide est défini dans le référentiel où le fluide est au repos. Il sera noté n_0 dans ce référentiel.

2. En raisonnant avec un point de vue corpusculaire pour les photons (on supposera égales les vitesses de groupe et de phase), montrer que la mise en écoulement de l'eau provoque un décalage des franges. On



exprimera le déphasage $\Delta\varphi$ entre les faisceaux en fonction de la vitesse de la lumière c, de L, de l'indice n de l'eau, de u et de la longueur d'onde λ.

3. L'effet relativiste est-il observable ? *On donne :* $n_0 = 1.337$, $\lambda = 526\ nm$, $u \simeq 7.069 ms^{-1}$, $L = 1.487\ m$.
4. Retrouver ce résultat en raisonnant avec le point de vue ondulatoire. On pourra introduire le quadri-vecteur onde $(\omega/c, \vec{k})$ sachant que l'onde plane est supposée se déplacer parallèlement au fluide.
5. Montrer que si le milieu est dispersif, avec la dépendance $n(\lambda)$, une correction supplémentaire interviendra dans le résultat.

composition des vitesses, transformation d'angles, ondes

Exercice 4 Aberration des étoiles

On considère le référentiel de Copernic $\mathcal{R}$ que l'on suppose galiléen. La Terre est en mouvement par rapport à ce repère à la vitesse $\vec{u}$ à l'instant t de $\mathcal{R}$. On considère le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ tangent, à ce même instant t, en mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{u}$ le long de l'axe Ox par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, dans lequel la Terre est supposée immobile à cet instant. La lumière provenant d'une étoile située à l'infini fait un angle θ relativement à l'axe Oy du repère de Copernic et un angle θ' relativement à l'axe Oy' du repère $\mathcal{R}'$. La différence constatée entre les angles θ et θ' est appelée le phénomène d'aberration.

1. En supposant la lumière constituée de photons (aspect corpusculaire de la lumière) et en utilisant les formules de transformation des vitesses, retrouver les formules d'aberration, c'est-à-dire les expressions donnant $\sin\theta'$, $\cos\theta'$ et $\tan\theta'$ en fonction de θ et u/c.
2. Si $\beta = u/c$ est très petit devant l'unité, θ et θ' diffèrent très peu. Donner une expression de $\theta - \theta'$ en fonction de β, $\sin\theta$ et γ le facteur de Lorentz.
3. Calculer de nouveau $\theta' - \theta$ dans le cadre galiléen. Vérifier qu'à l'ordre 1 en β le résultat relativiste redonne le résultat galiléen.

   Une première mesure de θ', faite par un observateur terrestre à un moment donné, conduit à une valeur θ'_1 de θ'. En supposant que l'étoile garde une direction angulaire θ fixe dans le référentiel de Copernic, une deuxième mesure de θ', faite six mois plus tard, conduit une valeur θ'_2 de θ'.

   (a) Exprimer $\Delta\theta = \theta'_2 - \theta'_1$. Dans un cadre évidemment newtonien, en 1725 l'astronome britannique J. Bradley mesure $\Delta\theta = 40$" pour l'étoile γDraconis, située à peu près sur un axe perpendiculaire à l'écliptique. Sachant que $u = 30\ km/s$ et $\theta = \pi/2$, comparer cette mesure à la prédiction théorique.

   (b) Comparer $\Delta\theta$ à l'amplitude du phénomène classique de parallaxe géométrique (rappel : l'étoile la plus proche est située à environ 4,2 années lumières et la distance Terre-Soleil mesure 150×10^6 km). Commenter les résultats et discuter de la complémentarité des deux phénomènes.
4. Retrouver les formules d'aberration en utilisant la notion de quadri-vecteur d'onde (aspect ondulatoire de la lumière)
5. Sortons du contexte terrestre. Dans le cas où $u/c \lesssim 1$, comment l'observateur lié au référentiel $\mathcal{R}'$ perçoit les étoiles ?

Bibliographie :

1. *Relativité, fondements et applications*, Pérez, AG PhA1 PER
2. *Relativité restreinte et structure atomique de la matière*, Grossetête, AG PhA1 GRO
3. `http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/validation-relativite-restreinte-3.xml`
4. `http://en.wikipedia.org/wiki/Aberration_of_light`

Exercice 5 Effet Doppler-Fizeau relativiste

électromagnétisme relativiste, ondes

Au phénomène Doppler classique étudié en optique par Fizeau, se superpose le phénomène de relativité du temps lorsque la source est en mouvement à très grande vitesse : c'est l'effet Doppler-Fizeau relativiste. Un observateur, immobile au point M dans un référentiel $\mathcal{R}$, reçoit un rayonnement électromagnétique émis par une source mobile S dans le référentiel $\mathcal{R}$. Cette source est liée à un référentiel $\mathcal{R}'$ animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{u}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, dans le sens des x positifs. La source est située au point d'origine O'. A un instant donné, la direction $O'M$ de propagation du rayonnement vers l'observateur fait une angle θ avec l'axe Ox.

1. Dans le référentiel $\mathcal{R}$, écrire les expressions des composantes k_x et k_y du quadri-vecteur d'onde $\vec{K}$ correspondant à la propagation dans la direction $O'M$.
2. On notera ω la pulsation, mesurée dans $\mathcal{R}$, du rayonnement émis par la source S. Écrire les expressions des composantes du quadri-vecteur d'onde $\vec{K'}$ en fonction de $k = \|k\|$ et ω.
3. Déterminer la pulsation ω mesurée par l'observateur situé au point M en fonction de la pulsation ω' du rayonnement émis.
4. Lorsque l'observateur est situé sur la droite Ox, et que la source S se dirige vers lui, déterminer l'expression de ω. Même question lorsque la source s'éloigne. Commenter.
5. Pour détecter l'effet Doppler relativiste, l'expérience réalisée en 1941 par Ives et Stilwell a consisté à mesurer la longueur d'onde de la raie H_β émise par des ions hydrogène H_2^+ en mouvement, dans deux directions opposées, l'une λ_1 suivant le mouvement des ions, l'autre λ_2 en sens contraire. Calculer la valeur moyenne théorique $\bar{\lambda} = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ des deux raies décalées.
6. Déterminer une expression approchée du décalage $\bar{\lambda} - \lambda'$ avec $\lambda' = c/\nu'$, pour de faibles vitesses des ions par rapport à c.
7. La longueur d'onde propre de la raie H_β vaut $\lambda' = 486,1$ nm, la vitesse des ions est $u = 0,0066c$. Déterminer la valeur numérique du décalage théorique $\bar{\lambda} - \lambda'$ et comparer à la valeur expérimentale moyenne égale à $1,07 \times 10^{-2}$ nm.

Bibliographie :

1. *Relativité, fondements et applications*, Pérez, AG PhA1 PER
2. *Introduction à la relativité restreinte*, Hladik, AG PhC3 HLA

Exercice 6 Voyages dans l'espace-temps

mouvement accéléré, ligne d'univers, temps propre

Bien que ce ne soit pas systématiquement demandé, on s'efforcera de discuter la limite newtonienne des résultats obtenus, permettant au passage de vérifier leur cohérence.

Partie 1 Mouvement accéléré soumis à une force constante

On étudie ici le décollage d'une fusée soumise à une force constante $\vec{f} = m\vec{g}$ dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen. On considérera que la fusée se déplace uniquement le long de l'axe $Ox \parallel \vec{f}$. On notera x et t sa position au temps t dans $\mathcal{R}$, et $v_x = dx/dt$, $a_x = dv_x/dt$ les vitesses et accélérations dans ce référentiel. La fusée décolle de Houston en $x = 0$ à $t = 0$.

1. En partant du principe fondamental de la mécanique appliqué à la fusée dans $\mathcal{R}$, déterminer les équations horaires $x(t)$, $v_x(t)$ et $a_x(t)$ en fonction de $g = \|\vec{g}\|$, t et c.
   On donne (si besoin en fonction de la méthode utilisée) : $\displaystyle\int^w \frac{du}{(1-u^2)^{3/2}} = \frac{w}{\sqrt{1-w^2}}$.
2. Tracer la ligne d'univers correspondante. Discuter les cas limites. Montrer en particulier qu'après un certain laps de temps après le décollage que l'on déterminera, tout photon émis depuis Houston ne rattrapera pas la fusée.

La fusée a embarqué une horloge dont on note τ le temps mesuré (temps propre dans le référentiel de la fusée). On pourra définir à chaque instant t un référentiel galiléen $\mathcal{F}(t)$ se déplaçant à $v_x(t)$, ayant pour origine $x(t)$ et coïncidant donc localement avec celui de la fusée.

3. Quelle est a priori la durée la plus grande entre t et τ ? Trouver la relation entre τ et t.
   On donne : $\displaystyle\int^w \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \text{argsh}(w) = \ln(w + \sqrt{1+w^2})$.

4. De même, quelle est la distance X qu'un cosmonaute a eu l'impression de parcourir depuis la fusée ? On donnera $X(t)$ puis $X(\tau)$.
5. Montrer que l'accélération est constante et égale à g dans le référentiel de la fusée.
Indication : on pourra utiliser la loi de composition des vitesses entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{F}(t)$.

Partie 2 Paradoxe des jumeaux de Langevin (1911)

Igor et Grichka sont deux jumeaux terriens. Igor entreprend de faire un voyage spatial à une vitesse proche de celle de la lumière, et qu'on supposera rectiligne selon l'axe Ox. Après avoir rebroussé chemin, Igor rentre sur terre pour retrouver Grichka à qui il prétend être plus jeune en raison de la dilatation des durées. Grichka lui rétorque que si l'on prend son point de vue, c'est lui le plus jeune. Igor a-t-il raison ?

1. Formaliser la controverse entre les deux frères en faisant l'hypothèse que le référentiel du vaisseau spatial est galiléen de vitesse relative $\pm v$ par rapport à la terre tout au long du voyage. Cette hypothèse est-elle réaliste physiquement ?
2. En se basant sur l'analyse du vol accéléré de la partie précédente, discuter le cas du voyage plus réaliste suivant : accélération constante à g puis décélération constante à $-g$ jusqu'à inversion du sens de la marche puis de nouveau accélération pour se poser en douceur sur terre. Tracer l'allure typique de la ligne d'univers dans le référentiel terrestre.
3. Déterminer la formule donnant le rapport entre les deux temps propres de chacun des jumeaux en repartant des résultats de la partie précédente.
4. On considère dans un référentiel galiléen deux événements A et B de même abscisse $x = 0$ et de coordonnées temporelles t_A et t_B. Quelle est la ligne d'univers de temps propre maximal entre ces deux événements ?
5. Les voyages vers le futur sont-ils possibles en relativité restreinte ? On précisera ce que l'on entend par futur. Et les voyages vers le passé ?

Partie 3 Expérience d'Hafele et de Keating (1971)

Hafele et Keating ont réalisé une expérience se rapprochant de celle du paradoxe des jumeaux en synchronisant plusieurs horloges atomiques sur un tarmac puis en en embarquement certaines pour des tours du monde soit vers l'est, soit vers l'ouest. Lorsque les horloges sont de nouveau réunies, on compare le temps mesuré, c'est-à-dire leurs temps propres.

On donne : vitesse typique d'un avion de ligne par rapport au sol $v \simeq 900\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$; rayon terrestre : $R \simeq 6400$ km ; durée typique du vol lors de l'expérience : $t_{\mathrm{vol}} \simeq 2\pi R/v \simeq 45\mathrm{h}$.

1. Par une simple estimation basée sur la dilatation des durées, estimer le décalage temporel entre une horloge au sol et une horloge embarquée dans un avion de ligne, initialement synchronisées. De combien de secondes rajeunit un pilote de ligne effectuant 1000h de vol par an sur une carrière de 30 ans ?
2. Lors de l'expérience, les horloges voyageant vers l'est sont, comme attendu, en retard par rapport à la sédentaire, mais celles voyageant vers l'ouest sont au contraire en avance, alors que γ ne dépend que du module de la vitesse. Comment expliquer cela (tout en restant dans le cadre de la relativité restreinte) ?

Partie 2 : Dynamique relativiste

Exercice 7 Collisions élastiques

Une particule de masse m et d'énergie cinétique T entre en collision avec une autre particule de masse m, au repos. On note $\vec{u_x}$ la direction de la particule incidente. À l'issue de la collision, les deux particules ont des énergies inégales, et leurs vecteurs vitesse $\vec{v_1}'$ et $\vec{v_2}'$ sont *a priori* inégalement inclinés sur la direction de la particule incidente : $(\vec{v_1}', \vec{u_x}) \neq (\vec{v_2}', \vec{u_x})$. On note α l'angle $(\vec{v_1}', \vec{v_2}')$ entre ces deux vecteurs.

1. Montrer qu'en mécanique newtonienne, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Montrer qu'en relativité restreinte, α est un angle aigu, et que dans le cas d'une collision symétrique $((\vec{v_1}', \vec{u_x}) = (\vec{v_2}', \vec{u_x}))$,
$$\cos\alpha = \frac{T}{T + 4mc^2}.$$

Exercice 8 Diffusion Compton

On considère la diffusion Compton d'un photon incident sur un électron cible, supposé libre et au repos dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié à la cible. On s'intéresse aux photons diffusés dans une direction $\theta = \pi/2$ par rapport à la direction du photon incident dans $\mathcal{R}$. Si ν est la fréquence du photon incident, déterminer la fréquence ν' du photon diffusé ainsi que la direction dans laquelle est projeté l'électron et son énergie cinétique.
Bibliographie :

1. *Relativité restreinte et structure atomique de la matière*, Grossetête, AG PhA1 GRO

Exercice 9 Collisions inélastiques

Partie 1 Notion de centre de masse

Soit un ensemble de N particules dont l'une au moins est de masse non nulle. On note $\vec{p}(i)$ la 4-impulsion de la particule i dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$.

1. Montrer que la 4-impulsion totale $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}(i)$ est un quadrivecteur de genre temps, *i.e.* $\vec{P}^2 > 0$.
2. En déduire qu'il existe un référentiel galiléen $\mathcal{R}_{\mathrm{CM}}$ dans lequel $\vec{P} = \vec{0}$. Montrer qu'il est défini par rapport à $\mathcal{R}$ par sa vitesse :
$$\vec{\beta} = \frac{\sum_i \vec{p}(i)c}{\sum_i \mathcal{E}(i)}.$$
3. Vérifier que l'on retrouve le référentiel barycentrique à la limite non relativiste.

Partie 2 Matérialisation de photons par création de paire e^-e^+

À haute énergie ($h\nu > 100\mathrm{MeV}$), le processus prépondérant dans l'absorption des photons par la matière est la création de paires électron-positron.

1. Montrer qu'un photon ne peut pas se matérialiser dans le vide d'après la réaction
$$\gamma \to e^+ + e^-.$$
2. La matérialisation nécessite donc la présence d'un catalyseur A qui intervient dans le bilan sous la forme
$$\gamma + \mathrm{A} \to e^+ + e^- + \mathrm{A}.$$
   (a) Quelle doit être l'énergie minimale $\mathcal{E}^*$ des réactifs dans le référentiel du centre de masse pour que la réaction ait lieu ?
   (b) En déduire, en repassant dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, où A est supposé initialement immobile, l'énergie de seuil de la réaction.
   Application aux cas où A est un électron et où A est un noyau atomique au repos. On rappelle que $m_e c^2 \approx 0,5\mathrm{MeV}$.

Partie 3 : Charges et champ magnétique

Exercice 10 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Une particule de charge $q = -e$ et de masse m se déplace dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{u_z}$. À un instant que l'on prendra comme origine des temps, on repère sa position par $\vec{r_0} = x_0\vec{u_x}$, sa vitesse est $\vec{v_0} = v_0\cos(\phi)\vec{u_\theta} + v_0\sin(\phi)\vec{u_z}$, avec $\phi \in [0, \pi/2]$, dans la base cylindrique construite autour de $\vec{B}$.

1. Décrire le mouvement de la particule. Retrouver notamment le rayon de la trajectoire, la période de révolution et le pas de l'hélice.
2. *Facultatif : stabilité de la trajectoire :* On se restreint au cas où $\phi = 0$. La trajectoire est alors circulaire de rayon R, de vitesse angulaire ω_c. On va étudier les petits mouvements autour de l'orbite d'équilibre. En coordonnées cylindriques, on développe au premier ordre selon

$$r = R(1+\epsilon), \quad \dot{\theta} = \omega_c + \omega', \quad z = 0 + z.$$

   (a) Projeter la relation fondamentale dans la base cylindrique.

   (b) Montrer qu'au premier ordre $\omega' = -\omega_c\epsilon$.

   (c) Trouver l'équation différentielle qui régit le mouvement radial. Conclure quant à la stabilité radiale et orthoradiale de l'orbite.

Exercice 11 Piégeage d'un électron dans le champ magnétique terrestre – Aurores boréales

Le champ magnétique terrestre est assimilé à celui d'un dipôle magnétique de moment $\vec{M}$ placé au centre de la Terre.

1. *Facultatif : champ produit par un dipôle magnétique :* Calculer en premier lieu le potentiel vecteur à grande distance d'une boucle de courant C parcourue par un courant I, en ne gardant que les termes du premier ordre, qui correspondent au premier moment de la distribution de courant [1]. Monter qu'il se met sous la forme

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\vec{M}\wedge\vec{r}}{4\pi r^3} \quad \text{où} \quad \vec{M} = \frac{1}{2}\int_c I\vec{r'}\wedge \mathrm{d}\vec{r'}.$$

   Montrer ensuite que le champ magnétique créé s'écrit

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\frac{3\left(\vec{M}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}}{r^2} - \vec{M}\right],$$

   et donner son expression en coordonnées sphériques. Préciser la direction et le sens de $\vec{M}$ pour la Terre. Le BRGM indique $M \approx 8,3\,10^{22}\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$ pour la Terre. Vérifier qu'en ordre de grandeur, on retombe bien sur la valeur connue du champ à la surface de la Terre.

2. Un électron se déplace à la périphérie de la Terre. On travaille désormais dans la base sphérique à partir de $\left(O, -\vec{M}\right)$. On admettra que l'expression de la composante de l'accélération selon $\vec{u_\phi}$ dans le référentiel géocentrique supposé galiléen vaut :

$$a_\phi = \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\mathrm{d}(\dot{\phi}r^2\sin^2\theta)}{\mathrm{d}t}$$

   Montrer que

$$\dot{\phi}r^2\sin^2\theta + \frac{\mu_0 Me}{4\pi m}\frac{\sin^2\theta}{r} = K\,(\text{cte}).$$

1. Terme dipolaire

3. Montrer qu'on peut définir un potentiel effectif $V(r, \theta)$ tel que

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r, \theta) \;=\; \frac{1}{2}mv_0^2,$$

où v_0 est la vitesse initiale de la particule. Le représenter à θ fixé.

4. Après avoir retrouvé l'équation des lignes de champ du dipôle magnétique, vérifier qualitativement que le piégeage a lieu autour de ces lignes de champ. Ce sont les *ceintures de Van Allen*.

5. Donner une condition sur K pour qu'il y ait piégeage pour toute valeur de θ, à v_0 donné. Comprendre qu'il est plus facile de piéger à l'aplomb des pôles magnétiques qu'à l'équateur. Ceci explique pourquoi les aurores boréales ont préférentiellement lieu au delà des cercles polaires.

6. Cependant, des aurores boréales ont déjà été vues à Bombay et à Rome dans l'Antiquité lors de très violents orages magnétiques solaires pendant lesquels le plasma qui constitue le vent solaire est beaucoup plus dense et énergétique. On peut le comprendre à l'aide de ce modèle à partir d'arguments qualitatifs : en reprenant la condition de piégeage à tous angles, dans quelle limite pour K a-t-on piégeage de particules très énergétiques ? Quelles sont alors les ceintures mises en jeu dans le piégeage ? Vérifier qu'elles interceptent la surface du globe à des latitudes d'autant plus faibles que la particule piégée est énergétique.

Jérémy Neveu
jeremy.neveu@ens.fr

Partie 4 : Cinématique relativiste

N'hésitez pas à me rapporter d'éventuelles erreurs ou choses pas claires. Par ailleurs, voir la page de Guillaume Roux où se trouvent quelques liens vers les programmes, sites intéressants,... à l'adresse :
`lptms.u-psud.fr/wiki-cours/index.php/Relativité_restreinte_et_électromagnétisme`

Exercice 12 Mise en jambe

L'objectif ici est de retrouver deux des conséquences directes des transformations de Lorentz (la dilatation du temps et la contraction des longueurs) et d'explorer leurs conséquences "concrètes".

1. On associe aux élèves un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Le professeur se déplace dans ce référentiel à une vitesse $\vec{u}$ que l'on prendra horizontal selon Ox et dirigé vers les x positifs (le choix d'une vitesse verticale est possible théoriquement mais déconseillée pour le professeur). On lit au professeur le référentiel $\mathcal{R}*$, appelé référentiel propre. Des jeux de coordonnées (ct, x) et $(c\tau, x*)$ sont associés à chacun des deux référentiels. On suppose que professeur et élèves débutent l'année à $t = t' = 0$ et $x = x* = 0$. Les transformations de Lorentz donnent :

$$x* = \gamma(x - c\beta t) \tag{XII.1}$$
$$c\tau = \gamma(ct - \beta x) \tag{XII.2}$$

Or $\mathcal{R}*$ étant le référentiel propre, à tout instant τ on a $x* = 0$. On en déduit le temps vécu par le professeur :

$$\tau = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}(c\beta t)\right) = \gamma(1-\beta^2)t = \frac{t}{\gamma} < t \tag{XII.3}$$

Le temps vécu par le professeur est donc plus court que celui vécu par les élèves (le temps est long en cours c'est bien connu !). L'espérance de vie gagnée par le professeur grâce à tous ses déplacements est donc de :

$$\tau - t = (1-\gamma)\tau = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4/3600}{300000}\right)^2}}\right) 250\text{h/an} = -7\text{ps/an} \tag{XII.4}$$

Mêmes cumulées sur des longues durées, les effets relativistes au quotidien sont extrêmement négligeables. Concernant la dilatation du temps, les effets sont surtout visibles dans les expériences de physique des particules. Il est peut être intéressant de parler de l'expérience des muons cosmiques dans une leçon de physique par exemple. Passons à un autre exemple où les effets de la relativité restreinte seraient plus visibles.

2. A l'Ariane 6000 est associée le référentiel $\mathcal{R}*$ en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$ lié aux journalistes. On note (ct_1, x_1) la réception des photons venant de l'arrière de la fusée par un des journalistes et (ct_2, x_2) l'événement correspondant pour l'avant du vaisseau. La photographie s'effectue instantanément à l'instant $t = t_1 = t_2$. Par les transformations de Lorentz, on a dans le référentiel propre $\mathcal{R}*$:

$$x_1* = \gamma(x_1 - c\beta t) \tag{XII.5}$$
$$x_2* = \gamma(x_2 - c\beta t) \tag{XII.6}$$

D'où $L* = x_2* - x_1* = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L$. Le journaliste voit donc non pas un vaisseau de 200 m passé devant lui, mais un vaisseau plus court de :

$$L = \frac{L*}{\gamma} = L* \sqrt{1-\beta^2} = 200\sqrt{1-0.9^2} = 87\text{m} \tag{XII.7}$$

Le vaisseau apparaît donc environ deux fois plus petit pour les journalistes, ils doivent donc prendre un zoom deux fois plus grand qu'en relativité galiléenne.

Exercice 13 Paradoxe de la règle et du trou

Introduction : Les paradoxes en relativité restreinte sont là pour mettre en lumière un résultat contre-intuitif de la théorie. Leur formulation introduit la plupart du temps une étape intuitive de raisonnement qui, mêlée à des résultats de la théorie (tirés ou non de leur domaine de validité), mène à une apparente contradiction. Ces paradoxes ont bien une solution précise mais la difficulté est en général de trouver où se cache l'erreur de raisonnement. On rappelle deux résultats non-intuitifs qui servent d'ingrédients à de nombreux paradoxes : la contraction des longueurs et la dilatation des temps.

Contrairement à la physique galiléenne, le résultat d'une mesure de longueur ou de durée entre deux événements dépend du référentiel galiléen choisi, autrement dit, dépend de notre vitesse par rapport à ce que l'on mesure. Ce qui est invariant en relativité, c'est l'*intervalle* spatio-temporel entre ces événements :

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 \ . \tag{XIII.1}$$

Une analogie très qualitative est celle de perspective. On est en effet habitué à ce que la taille verticale d'un objet mesuré avec une règle que l'on tient à la main dépende de notre distance à l'objet. Il s'agit d'un effet statique. Dans le cas de la relativité, l'effet de perspective est dynamique, ou plutôt cinématique et couple distance et temps.

Mesure de durée : une mesure de durée consiste à mesurer l'intervalle de temps entre deux événements se produisant au même endroit dans un référentiel donné. Lorsque l'horloge est immobile par rapport au référentiel, on parle de *durée propre* ou *temps propre*. Le temps propre est clairement un invariant relativiste d'après la définition de l'intervalle ci-dessus. Le résultat non-intuitif de la relativité est que si une horloge se déplace par rapport à nous, elle semble indiquer un temps plus long que le notre. Le temps propre est l'indication la plus courte que peut donner une horloge.

Mesure de longueur : une mesure de longueur consiste à mesurer la distance entre deux événements se produisant en même temps dans un référentiel galiléen donné. Si l'on change de référentiel galiléen, cette mesure sera modifiée. Lorsque le référentiel est celui attaché à un objet (une règle), on parle de *longueur propre*. Le résultat est que les règles semblent rétrécir lorsqu'elles sont en mouvement par rapport à nous. La longueur la plus longue est atteinte lorsque la règle est au repos.

Simultanéité : deux événements sont dits simultanés *dans un référentiel galiléen donné* s'ils se produisent aux mêmes temps, ie $\Delta t = 0$. Deux événements de genre temps ne peuvent être simultanés. Le temps perd son caractère absolu en relativité, de même que la notion de simultanéité. La causalité en revanche est préservée.

On rappelle la transformation de Lorentz pour les distances entre deux événements dont les coordonnées sont exprimées dans un référentiel $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}'$ qui est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{u} = u\vec{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$:

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) \tag{XIII.2}$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t) \tag{XIII.3}$$

avec $\beta = u/c$ et $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \geq 1$. On pourra se souvenir que $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$.

Dilatation des durées : on étudie deux situations réciproques où l'on est en mouvement relatif par rapport à une horloge. On note T le temps *propre* de l'horloge.

1. L'horloge est fixe dans $\mathcal{R}$ et on se trouve dans $\mathcal{R}'$. On a donc $\Delta x = 0$ et $\Delta t = T$ correspond à l'indication de l'horloge dans $\mathcal{R}$. Vue depuis $\mathcal{R}'$, l'indication est donc $\Delta t' = \gamma T > T$ et apparaît dilatée. Il est peut être surprenant que l'indication d'une horloge puisse dépendre du référentiel car nous avons l'habitude de lire l'heure sous forme symbolique alors qu'on a l'habitude d'évaluer les distance à l'œil. Pour l'intuition, il vaut mieux considérer une horloge comme un processus physique périodique dont la période apparaît différente lorsqu'on se déplace par rapport à elle.
2. On est maintenant fixe dans $\mathcal{R}$ et l'horloge se trouve dans $\mathcal{R}'$. On a donc $\Delta x' = 0$ et $\Delta t' = T$ et l'on souhaite déterminer Δt. De la seconde relation, on obtient $\Delta t = \Delta x/\beta c$ puis $\Delta t = T/(\gamma(1-\beta^2)) = \gamma T$. On observe bien de nouveau une dilatation des durées.

Contraction des longueurs : dans les deux cas, on note L la longueur *propre* de la règle.

1. La règle est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à nous qui sommes dans le référentiel $\mathcal{R}$. On appelle $\mathcal{R}'$ le référentiel attaché à la règle (dans lequel elle est au repos). On effectue la mesure de longueur dans $\mathcal{R}$ si bien que $\Delta t = 0$ et l'on cherche à déterminer Δx. On a donc que $\Delta x' = L$ puisque la règle est au repos dans $\mathcal{R}'$. Il vient de la seconde relation que $\Delta x = L/\gamma < L$.
2. Dans l'autre situation, la règle est fixe dans $\mathcal{R}$ et c'est nous qui nous déplaçons à vitesse constante dans $\mathcal{R}'$. On effectue la mesure de longueur dans $\mathcal{R}'$ si bien que $\Delta t' = 0$ et on cherche à connaître $\Delta x'$. On sait que $\Delta x = L$ puisque la règle est au repos dans $\mathcal{R}$. De la première relation, on obtient $\Delta t = \beta L/c$, que l'on réinjecte dans la seconde pour obtenir $\Delta x' = \gamma(1-\beta^2)L = L/\gamma$. On retrouve de même une contraction des longueurs avec ce point de vue.

Le point non-intuitif dans le mesure des longueurs est qu'elle impose une égalité des temps dans le référentiel où l'on fait la mesure. Les deux évènements correspondants aux extrémités de la règle sont alors simultanés dans ce référentiel. Or, lorsqu'on change de référentiel, on perd cette simultanéité. Par exemple, une analyse un peu rapide de la seconde situation pourrait consister à dire $\Delta t = 0$ donc $\Delta x' = \gamma L$ et la longueur semblerait dilatée. On notera donc que pour la première situation, la mesure des extrémités n'est pas simultanée dans le référentiel $\mathcal{R}'$ puisque l'on a $\Delta t' = -\beta L/c \neq 0$. De même dans la seconde situation où $\Delta t = \beta L/c \neq 0$ comme on l'a vu.

Dans chacune des situations ci-dessus, on a en fait effectué deux raisonnements inverses l'un de l'autre dans le sens où ils consistaient à inverser la vitesse relative, ie à faire $u \to -u$. Mathématiquement, on sait que la transformation inverse d'une transformation de Lorentz est une transformation de Lorentz de vitesse opposée, ce qui est physiquement très intuitif.

Solution de l'exercice : On commence par faire la liste des coordonnées que l'on tire directement des hypothèses de l'énoncé. Les positions dans $\mathcal{R}$ sont notées (ct, x, z) et celles dans $\mathcal{R}'$ sont notées (ct', x', z'). Les quadri-vecteurs positions sont donnent donc les coordonnées spatio-temporelles des extrémités de la règle ou du trou, dans l'un ou l'autre référentiel (ce ne sont pas à proprement parlé des évènements au sens commun du terme). On note :

$$v = \|\vec{v}\|, \quad \beta = \frac{\|\vec{u}\|}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}\,. \tag{XIII.4}$$

Dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$x_{T_1} = -L/2 \tag{XIII.5}$$
$$x_{T_2} = +L/2 \tag{XIII.6}$$
$$z_{T_1} = vt_{T_1} \tag{XIII.7}$$
$$z_{T_2} = vt_{T_2} = z_{T_1} \tag{XIII.8}$$

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$:

$$x'_{R_1} = -L/2 \tag{XIII.9}$$
$$x'_{R_2} = +L/2 \tag{XIII.10}$$
$$z'_{R_1} = z'_{R_2} = 0 \tag{XIII.11}$$

Pour le mouvement selon Oz, on négligera les effets relativistes d'après l'hypothèse $v \ll c$ de l'énoncé. Ensuite, il faut utiliser les transformations de Lorentz pour passer d'un référentiel à l'autre.

Est-ce que la règle passe si l'on se place dans $\mathcal{R}$?

A priori oui avec l'argument de contraction des longueurs. Refaisons-le proprement. D'après Lorentz, les coordonnées des extrémités de la règle dans $\mathcal{R}$ sont

$$t_{R_{1,2}} = \gamma(t'_{R_{1,2}} + \beta x'_{R_{1,2}}/c) \tag{XIII.12}$$
$$x_{R_{1,2}} = \gamma(x'_{R_{1,2}} + ut'_{R_{1,2}}) \tag{XIII.13}$$
$$z_{R_{1,2}} = z'_{R_{1,2}} = 0 \tag{XIII.14}$$

Mesurons la règle dans $\mathcal{R}$ à un instant donné $t_{R_2} = t_{R_1}$ et notons ℓ_R le résultat. On a $\ell_R = x_{R_2} - x_{R_1} = \gamma(L + u(t'_{R_2} - t'_{R_1}))$ et $\Delta t = t_{R_2} - t_{R_1} = 0$ qui nous donne $t'_{R_2} - t'_{R_1} = -\beta L/c$. Ainsi, $\ell_R = \gamma(1-\beta^2)L = L/\gamma$.

Dans $\mathcal{R}$, il est clair que le trou a une largeur $\ell_T = L > \ell_R$. La règle passe !

Est-ce que la règle passe si l'on se place dans $\mathcal{R}'$?

En fait, la règle ne bouge pas dans $\mathcal{R}'$ donc on peut reformuler la question : est-ce que le trou passe autour de la règle dans $\mathcal{R}'$? Pour y répondre, il faut déterminer les coordonnées des extrémités du trou dans $\mathcal{R}'$.

$$t'_{T_{1,2}} = \gamma(t_{T_{1,2}} - \beta x_{T_{1,2}}/c) \tag{XIII.15}$$

$$x'_{T_{1,2}} = \gamma(x_{T_{1,2}} - u t_{T_{1,2}}) \tag{XIII.16}$$

$$z'_{T_{1,2}} = z_{T_{1,2}} = v t_{T_{1,2}} \tag{XIII.17}$$

Mesurons le trou dans $\mathcal{R}'$ à un instant donné $t'_{T_2} = t'_{T_1}$ et notons ℓ'_T le résultat. On a $\ell'_T = x'_{T_2} - x'_{T_1} = \gamma(L - u(t_{T_2} - t_{T_1}))$ et $\Delta t' = t'_{T_2} - t'_{T_1} = 0$ qui nous redonne encore le même effet de contraction des longueurs $\ell'_T = L/\gamma < \ell'_R = L$. Comme intuitivement, il semble y avoir un problème…

Cependant la question posée est de savoir si le trou passe autour de la règle et non si le trou a l'air plus petit que la règle dans ce référentiel. Pour répondre à cette question, il faut étudier les trajectoires des extrémités du trou dans $\mathcal{R}'$ et déterminer si T_2 passe à droite de R_2 et T_1 à gauche de R_1, auquel cas le trou sera bien passé autour de la règle. On obtient tout d'abord des expressions précédentes

$$t_{T_1} = \gamma^{-1} t'_{T_1} - \frac{\beta}{c}\frac{L}{2}\,, \tag{XIII.18}$$

$$t_{T_2} = \gamma^{-1} t'_{T_2} + \frac{\beta}{c}\frac{L}{2}\,, \tag{XIII.19}$$

qui nous permettent d'exprimer les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ en fonction du temps t' :

$$x'_{T_1} = -\frac{L}{2\gamma} - u t'_{T_1} \tag{XIII.20}$$

$$x'_{T_2} = +\frac{L}{2\gamma} - u t'_{T_2} \tag{XIII.21}$$

$$z'_{T_1} = \frac{v}{\gamma} t'_{T_1} - \frac{uv}{c^2}\frac{L}{2} \tag{XIII.22}$$

$$z'_{T_2} = \frac{v}{\gamma} t'_{T_2} + \frac{uv}{c^2}\frac{L}{2} \tag{XIII.23}$$

On voit donc que les points T_1 et T_2 n'ont pas la même ordonnée dans $\mathcal{R}'$: le trou apparaît penché ! On retrouve bien également la contraction de la largeur du trou selon x sur cette formule. Pour voir si ça passe, on peut regarder la trace des extrémités dans le plan $x'Oz'$ en éliminant t' des relations précédentes. Après calcul, on trouve

$$z'_{T_1} = -\frac{v}{u}\left(\frac{x'_{T_1}}{\gamma} + \frac{L}{2}\right) \tag{XIII.24}$$

$$z'_{T_2} = -\frac{v}{u}\left(\frac{x'_{T_2}}{\gamma} - \frac{L}{2}\right) \tag{XIII.25}$$

Le point T_1 croise R_1 dans $\mathcal{R}'$ lorsque $z'_{T_1} = 0$. Dans ce cas, sa position sur l'axe Ox' est $x'_{T_1} = -\gamma L/2 < x'_{R_1}$. Il passe donc à gauche de l'extrémité gauche de la règle. De même pour le point T_2 qui croise l'axe Ox' en $x'_{T_2} = +\gamma L/2 > x'_{R_2}$ et passe bien à droite de R_2. La raison pour laquelle la règle passe est la *non-simultanéité* des passages des extrémités à proximité de la règle. En effet, on peut calculer les temps auxquels les extrémités croisent l'axe Ox' :

$$t'_{T_{1,2}} = \pm\gamma\beta\frac{L}{2c}\,. \tag{XIII.26}$$

Remarque : sans l'approximation $v \ll c$ qui apparaît ad hoc, on pourrait refaire les calculs avec une vitesse relative $\vec{u}$ non-alignée selon l'axe x et de telle sorte que règle vise le centre du trou. Il faudrait alors combiner transformation de Lorentz et rotation.

Exercice 14 Expérience de Fizeau (1851)

1. On considère un mobile de vecteur vitesse $\vec{v}'$ évoluant dans un référentiel $\mathcal{R}'$ galiléen en translation rectiligne uniforme à une vitesse u (selon Ox) par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Dans le référentiel $\mathcal{R}$', on a $v'_x = dx'/dt'$ et $v'_y = dy'/dt'$ (dans la suite on omettra les calculs pour la composante selon l'axe z qui sont les mêmes que pour l'axe y). Or, pour des intervalles de temps et d'espace infinitésimaux, les transformations de Lorentz donnent :

$$cdt = \gamma(cdt' + udx'/c) \tag{XIV.1}$$
$$dx = \gamma(dx' + udt') \tag{XIV.2}$$

On en déduit les composantes du vectrice vitesse $\vec{v}$ du mobile dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + udt'}{dt' + \frac{udx'}{c^2}} = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} \tag{XIV.3}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{udx'}{c^2}\right)} = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{uv'_x}{c^2}\right)} \tag{XIV.4}$$

On peut vérifier que lorsque $\vec{v} = \vec{c} = \vec{c}_\parallel + \vec{c}_\perp$ telle que $\|\vec{c}\| = c$, la formule donne bien l'invariance de la norme de la vitesse de la lumière lors d'un changement de référentiel, i.e. $\|\vec{c}'\| = c$, contrairement au cas galiléen. De plus, si $u \ll c$ alors on retrouve la composition galiléenne des vitesses.

2. Le point clef de l'effet est le fait que l'indice de réfraction dépende du référentiel. L'effet, comme on va le voir plus précisément au travers du calcul, n'est pas en soit relativiste, mais permet d'étudier la composition des vitesses et par là, l'existence de corrections relativistes. L'origine physique de la dépendance de l'indice en la vitesse de propagation du milieu est la suivante : l'indice de réfraction n traduit le fait que la vitesse de phase v_ϕ de l'onde dans le milieu est plus petite (sauf cas particulier) que la vitesse dans le vide notée c :

$$v_\phi = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} \quad \text{dans un référentiel galiléen} \tag{XIV.5}$$

Physiquement, on peut comprendre qualitativement que n est modifié lorsque le milieu est mis en mouvement par l'image suivante : lorsqu'une onde électromagnétique se propage dans un milieu dense et transparent, elle polarise le milieu qui rayonne. Le champ total devient la superposition du champ incident et du champ rayonné et le fait que le processus de rayonnement soit légèrement en retard se traduit par un ralentissement de la vitesse de phase globale de l'onde. Si le milieu est en mouvement, le champ rayonné ne sera pas émis d'un point fixe mais d'un point en mouvement. Il faut donc additionner la vitesse de phase par rapport au milieu à celle du milieu par rapport au laboratoire pour obtenir la nouvelle vitesse de phase. Reste à voir si la loi de composition des vitesses relativistes entraîne des corrections mesurables.

Dans la suite, on lie un référentiel $\mathcal{R}'_\pm$ au fluide en translation rectiligne uniforme $\pm\vec{u}$ par rapport au référentiel du laboratoire où ont lieu les interférences. L'indice du milieu dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est noté logiquement n' :

$$v'_\phi = \frac{c}{n'} = \frac{\omega'}{k'} \quad \text{dans le référentiel } \mathcal{R}' \tag{XIV.6}$$

avec $n' = n_0$ l'indice du milieu au repos.

Interprétation corpusculaire : la lumière est composée de photons se propageant à c dans le vide et à v'_ϕ par rapport au référentiel attaché au milieu. La vitesse des photons v_ϕ dans le milieu mais par rapport au référentiel du laboratoire (dans lequel le dispositif interférométrique est fixe) est, en utilisant la composition des vitesses de la question précédente et en tenant compte des deux sens possibles de propagation :

$$v_{\phi,\pm} = \frac{v'_\phi \pm u}{1 \pm \frac{v'_\phi u}{c^2}} \tag{XIV.7}$$

On aura donc deux temps de propagation, dans le référentiel du laboratoire : $t_\pm = 2L/v_{\phi,\pm}$ différents pour les photons suivant leur sens de propagation. Comme il est compliqué de faire déplacer de l'eau par rapport au

laboratoire à des vitesses proches de c, il est légitime de considérer $u \ll c$ et de procéder au développement au premier ordre [2] :

$$\frac{1}{v_{\phi,\pm}} = \frac{1 \pm \frac{1}{n'}\frac{u}{c}}{\frac{c}{n'} \pm u} \simeq \frac{n'}{c}\left(1 \pm \frac{1}{n'}\frac{u}{c}\right)\left(1 \mp n'\frac{u}{c}\right) \simeq \frac{n'}{c}\left(1 \mp n'\left(1 - \frac{1}{n'^2}\right)\frac{u}{c} + \ldots\right) . \tag{XIV.8}$$

Le déphasage dans le référentiel du laboratoire (dans lequel la pulsation de l'onde est $\omega = 2\pi c/\lambda$) est donné en valeur absolu par

$$\boxed{\Delta\phi = \omega(t_- - t_+) \simeq 8\pi(n_0^2 - 1)\frac{L}{\lambda}\frac{u}{c}} . \tag{XIV.9}$$

avec $n' = n_0$ ici. Si l'on reprenait les calculs en utilisant la composition des vitesses galiléenne plutôt que relativiste, on obtiendrait :

$$\Delta\phi = \omega(t_- - t_+) \simeq 8\pi n_0^2\frac{L}{\lambda}\frac{u}{c} \quad \text{(résultat galiléen)} . \tag{XIV.10}$$

La relativité se manifeste donc par la présence du facteur -1 après le n_0^2. Physiquement, la formule traduit très bien l'invariance de la vitesse de la lumière dans les référentiels galiléens. En effet, si l'on considère le cas où le milieu est un gaz de plus en plus dilué, on aura $n_0 \to 1$. La formule relativiste donne bien dans ce cas un déphasage nul tandis que la composition galiléenne donnerait encore un déphasage fini, et non-négligeable, ce qui n'est finalement pas si intuitif dans une expérience d'optique (? !). On notera enfin que l'approche suppose vitesse de phase et de groupe identique. Dans un milieu dispersif, ce raisonnement n'est pas correct.

On peut maintenant comprendre le principe de l'expérience : on crée un système de franges d'interférences lorsque $u = 0$ et l'on repère leurs positions sur un écran. On met en route la circulation de l'eau qui induit alors un déphasage global calculé ci-dessus et donc un décalage dans la position des franges que l'on peut mesurer en fraction d'interfrange

$$\Delta p = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = 4(n_0^2 - 1)\frac{L}{\lambda}\frac{u}{c} . \tag{XIV.11}$$

3. Avec les données, qui correspondent à celles de l'expérience de 1851, on obtient un décalage de frange

$$\boxed{\Delta p \simeq 0.211} \tag{XIV.12}$$

alors qu'on pouvait s'attendre à

$$\Delta p \simeq 0.478 \quad \text{(résultat galiléen)} . \tag{XIV.13}$$

L'effet est donc important et peut tout à fait être observé dans une expérience méticuleuse ! D'ailleurs, Fizeau l'a bien observé. Cependant il convient ici de rappeler que l'expérience de Fizeau avait pour but de tester la théorie de Fresnel de l'éther partiellement entrainé à la vitesse $u(1 - 1/n^2)$ par un milieu matériel d'indice n se déplaçant à la vitesse u dans l'éther. Cette théorie peremt de retrouver le résultat relativiste et donc cette expérience n'a fait que confirmer une des théories en vogue sur l'éther à ce moment. Le bon cadre pour traiter cette expérience restes cependant le cadre relativiste aujourd'hui.

4. Interprétation ondulatoire/optique : un autre point de vue est celui où l'on regarde comment la pulsation et le vecteur d'onde de l'onde électromagnétique sont modifiées lors du passage du référentiel du milieu au référentiel du laboratoire. On utilise ici le fait que l'onde se propage parallèlement à la vitesse d'entraînement (direction notée x). La phase de l'onde $\phi = k_x x - \omega t = k'_x x' - \omega' t'$ est un invariant relativiste car elle détermine la présence dans l'espace-temps d'un maximum ou minimum de l'amplitude de l'onde qu'on peut associer à des événements. Cela permet d'introduire un quadrivecteur [3] $(\omega/c, \vec{k})$ qui, sous la transformation de Lorentz donne

$$\frac{\omega_\pm}{c} = \gamma\left(\frac{\omega'}{c} \pm \beta k'_x\right) , \tag{XIV.14}$$

$$k_{x,\pm} = \gamma\left(k'_x \pm \beta\frac{\omega'}{c}\right) , \tag{XIV.15}$$

2. On voit qu'il est suffisant dans le dénominateur de (**??**) de se limiter au premier ordre pour avoir une correction relativiste
3. Facile à retrouver si l'on se souvient du quadrivecteur énergie-impulsion et des bases de la mécanique quantique…

avec $\beta = u/c$ et $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$. D'après la définition de la vitesse de phase, on a $v'_\phi = \omega'/k' = c/n_0$ et $v_{\phi,\pm} = \omega_\pm/k_\pm = c/n_\pm$ où l'on a défini les indices $n_\pm$ correspondant aux indices à utiliser dans le référentiel du laboratoire. Il est important à ce niveau de se souvenir que $k = \|\vec{k}\|$ dans ces définitions. Dans notre situation, on peut identifier $k = k_x$ car l'onde se propage dans le même sens que $\vec{u}$. Si $\vec{k}$ fait un angle avec $\vec{u}$, les formules sont plus compliquées et l'on ne retrouverait pas la même formule que la composition des vitesses [4]. L'interprétation est donc que les rayons de lumière se propagent dans un milieu dont l'indice dépend du sens de propagation par rapport à l'eau. On obtient à l'aide de (**??**)

$$n_\pm = \frac{ck_{x,\pm}}{\omega_\pm} \approx n_0 \mp (n_0^2 - 1)\frac{u}{c} + \dots \tag{XIV.16}$$

On en déduit alors la différence de chemin optique entre les faisceaux

$$\Delta\mathcal{L} = 2L(n_- - n_+) \tag{XIV.17}$$

et le déphasage $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\mathcal{L}$ qui redonne bien le résultat précédent (**??**).

5. Pour les courageux, on peut montrer que l'effet Doppler et la prise en compte de la dispersion du milieu $n(\omega)$ entraîne un terme correctif supplémentaire où le facteur $n^2 - 1$ est remplacé par :

$$n^2 - 1 \quad \underbrace{-n\lambda\frac{dn}{d\lambda}}_{\text{Doppler\&dispersion}} \quad . \tag{XIV.18}$$

observé expérimentalement par Zeeman en 1914. Pour le comprendre, il faut se souvenir que l'indice est associé à la réponse du milieu diélectrique à un champ électrique oscillant à la pulsation ω. Ce n'est pas la longueur d'onde qui intervient dans la réponse. De manière plus formelle, on peut se souvenir que l'indice du milieu est obtenu par la relation $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)}$, avec $\varepsilon_r(\omega)$ la permittivité diélectrique du milieu. Les lois qui donnent une fonction $n(\lambda)$, comme la loi de Cauchy, sont exprimées sous la forme qui convient le mieux à la mesure. L'indice étant défini par rapport au milieu au repos, la fonction que l'on connaît est $n(\omega')$. Or, ce qui est fixé dans l'expérience, c'est ω qui provient de la source lumineuse attachée au laboratoire. On doit donc évaluer $\omega'_\pm$ en fonction de ω et pour cela, on utilise la transformation de Lorentz inverse

$$\omega'_\pm = \gamma(\omega \mp \beta c k_x) \ . \tag{XIV.19}$$

Au premier ordre en u/c, on peut prendre $\gamma = 1$ et on retrouve donc la formule usuelle de l'effet Doppler longitudinal $\omega'_\pm \simeq \omega(1 \mp \frac{u}{c}n_\pm)$. On en déduit :

$$n_\pm(\omega') \simeq n(\omega) \mp \frac{u}{c}n\omega\frac{dn}{d\omega} = n(\omega) \mp n^2\left(\frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right)\frac{u}{c} \ . \tag{XIV.20}$$

Il faut donc rajouter ce terme à la différence d'indices, ce qui entraîne la correction

$$n^2 - 1 + n\omega'\frac{dn}{d\omega} = n^2 - 1 - n\lambda\frac{dn}{d\lambda} \ , \tag{XIV.21}$$

où l'on a utilisé $\omega = 2\pi c/\lambda$ pour la deuxième égalité qui se prête mieux au tables du Handbook. Il semble que le raisonnement similaire en passant par les longueurs d'onde plutôt que les pulsations, ne redonne pas le même résultat, car le facteur n n'est alors pas au bon endroit, d'où la nécessité de faire le raisonnement sur ω comme justifié physiquement ci-dessus. De telles corrections dues au caractère dispersif du milieu ont étudiées expérimentalement notamment par Zeeman dans les années 1910-1920. Le lecteur curieux pourra consulter l'article I. Lerche, Am. J. Phys. **45**, 1154 (1977).

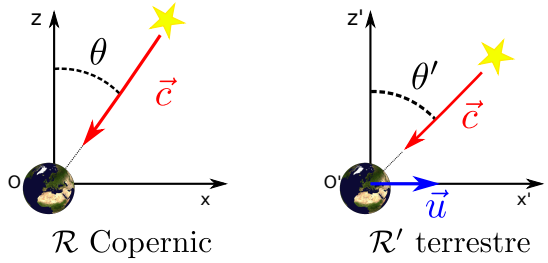
Pourquoi s'agit-il d'une magnifique expérience ? La correction relativiste en $1/n^2 = (v_\phi/c)^2$ est ici importante quantitativement (plus de 50% du résultat galiléen) car $v_\phi \lesssim c$. En général, les effets relativistes se manifestent soit dans une situation où une vitesse est proche de la vitesse de la lumière (ici l'idée est de ralentir la propagation de la lumière en la faisant passer dans un milieu), soit en arrivant à mesurer des temps (ou des distances) de façon extrêmement précise, comme on le verra dans l'exercice suivant. Le montage tire profit de la précision usuelle des montages interférométriques qui permettent de comparer des longueurs à la longueur d'onde lumineuse.

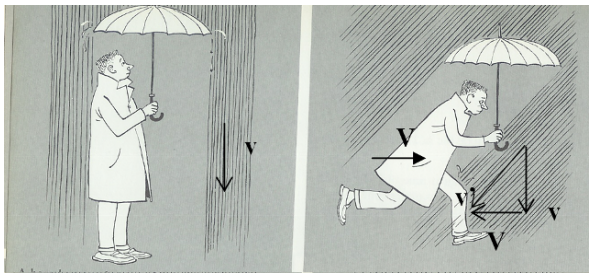
4. Ce calcul avec un angle quelconque est habituellement mené dans l'étude de l'effet Doppler en relativité.

Cela correspond ici au terme L/λ' qui est très grand et permet de compenser la petitesse de u/c. La configuration expérimentale circulaire est particulièrement astucieuse : lorsqu'on met l'eau en circulation (et la vitesse est assez grande), les tubes peuvent bouger un peu et des variations de la position relative du faisceau par rapport aux tubes pourraient entraîner des déphasages si l'épaisseur du verre des tubes n'est pas constante. Le fait que Fizeau fasse suivre aux deux faisceaux le même chemin spatial exactement élimine ces effets indésirables. Il mesurait en réalité le double de la fraction Δp obtenue ci-dessus en inversant le sens de circulation de l'eau. À l'époque, il n'y avait pas d'électricité dans le laboratoire et Fizeau travaillait avec la lumière du soleil, captée à la fenêtre. On notera qu'une réplique de l'expérience adaptée aux TPs a été proposée dans l'article T. Lahaye, P. Labastie, and R. Mathevet, Am. J. Phys. **80**, 497 (2012).

Complément : on peut étudier le phénomène de composition des vitesses de façon ondulatoire à partir des lois de l'électromagnétisme dans les milieux et d'un changement de référentiel sur les champs. On retrouve alors la vitesse de phase dans le référentiel du laboratoire en fonction de l'indice et de la vitesse relative. Cette approche, qui fut une des approches historiques de l'explication de l'expérience, est abordée dans l'exercice ER8.III page 286 du livre "Physique des ondes 2ème année" de Stéphane Olivier, collection Tec&Doc (1996).

Exercice 15 Aberration des étoiles





1. Un photon est toujours animé d'une vitesse de module égale à c dans tout référentiel galiléen. Écrivons la transformation des vitesses pour un photon. On choisira l'axe Oz tel que la vitesse u photon soit dans le plan xOz. Dans $\mathcal{R}$ nous avons :

$$v_x = -c\sin\theta \tag{XV.1}$$
$$v_y = 0 \tag{XV.2}$$
$$v_z = -c\cos\theta \tag{XV.3}$$

Dans $\mathcal{R}'$ nous avons :

$$v'_x = -c\sin\theta' \tag{XV.4}$$
$$v'_y = 0 \tag{XV.5}$$
$$v'_z = -c\cos\theta' \tag{XV.6}$$

Les formules de transformation des vitesses pour $\mathcal{R}'$ en mouvement de translation à la vitesse $\vec{u}$ le long de l'axe Ox sont :

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{v_x u}{c^2}\right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{v_x u}{c^2}\right)} \tag{XV.7}$$

Il vient directement :

$$v'_x = -c\sin\theta' = \frac{-c\sin\theta - u}{1 + \frac{u\sin\theta}{c}}, \quad v'_z = -c\cos\theta' = \frac{-c\cos\theta}{\gamma\left(1 + \frac{u\sin\theta}{c}\right)} \tag{XV.8}$$

D'où les formules d'aberration avec θ' l'angle mesuré par l'observateur :

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta}{\gamma(1 + \beta\sin\theta)}, \quad \sin\theta' = \frac{\sin\theta + \beta}{1 + \beta\sin\theta}, \quad \tan\theta' = \gamma\frac{\sin\theta + \beta}{\cos\theta} \tag{XV.9}$$

2.

$$\tan\theta' - \tan\theta = \gamma\frac{\sin\theta + \beta}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta(\gamma - 1) + \beta\gamma}{\cos\theta} \tag{XV.10}$$

Or ces deux angles étant très proches, on a $\tan\theta' - \tan\theta \approx d\tan\theta = d\theta/\cos^2\theta$ d'où :

$$d\theta = \cos^2\theta d\tan\theta = \cos\theta\left[(\gamma - 1)\sin\theta + \beta\gamma\right] \tag{XV.11}$$

3. Avec les transformations galiléennes des vitesses, on a

$$v'_x = -c' \sin\theta' = -c\sin\theta - u \tag{XV.12}$$
$$v'_y = 0 \tag{XV.13}$$
$$v'_z = -c' \cos\theta' = -c\cos\theta \tag{XV.14}$$

D'où

$$\tan\theta' - \tan\theta = \frac{c\sin\theta + u}{c\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\beta}{\cos\theta} \tag{XV.15}$$

$$d\theta = \beta\cos\theta \tag{XV.16}$$

A l'ordre 1 en β, le facteur γ du résultat relativiste vaut 1 donc on a aussi $d\theta \approx \beta\cos\theta$. Comme $\beta \approx 10^{-4}$, le facteur de Lorentz apporte une correction de 10^{-8} radians difficilement mesurable (environ 2 millisecondes d'arc).

(a) Lors de la mesure θ'_2, la Terre a tourné relativement au référentiel de Copernic et est alors animée d'une vitesse $-\vec{u}$. On a donc :

$$\theta'_1 - \theta = -\frac{u}{c}\cos\theta, \quad \theta'_2 - \theta = +\frac{u}{c}\cos\theta \tag{XV.17}$$

$$\boxed{\Delta\theta = \frac{2u}{c}\cos\theta} \tag{XV.18}$$

Application numérique : $\Delta\theta = 2 \times 10^{-4}\text{rad} \approx 41$" Ce résultat est en accord avec la mesure de Bradley. Il faut toutefois noter que Bradley a pu expliquer son résultat en supposant la transformation galiléenne des vitesses et (surtout) une vitesse finie pour la vitesse de la lumière. Sa mesure a alors permis de mesurer une vitesse de la lumière proche de 300000 km/s, en accord avec la précédente estimation du danois O. Römer (réalisée à partir de la rotation des satellites de Jupiter).

Dans le cas d'une mesure de parallaxe, pour l'étoile la plus proche du Système Solaire Proxima du Centaure, on mesurerai un déplacement angulaire apparent de l'étoile de :

$$\Delta\theta_p = \frac{2d_{\text{Terre-Soleil}}}{d_{\text{Soleil-Proxima}}} \approx \frac{2 \times 150 \times 10^6\text{km}}{9,5 \times 10^12\text{km}} \approx 1,6" \tag{XV.19}$$

La mesure de parallaxe pour mesurer la distance des étoiles les plus proches est ce qui a d'abord motiver l'expérience de Bradley. Il n'a pu que ce réjouir de parvenir à mesurer le déplacement apparent d'une étoile, cependant il ne s'y trompa pas : le déplacement observé de 41" (due à l'aberration stellaire) est orthogonal au déplacement prévu par le mouvement de parallaxe ! Le déplacement due à l'aberration stellaire est visible tangentiellement à la trajectoire de la Terre, alors que le déplacement dû à la parallaxe s'observe selon le diamètre de son orbite. Il a fallu attendre 1838 pour que l'astronome allemand Bessel mesure la parallaxe de l'étoile 61 du Cygne, avec un angle de 2×0.31" (soit une distance de 11 années-lumière).

4. Retrouvons les formules de l'aberration en utilisant la notion de quadri-vecteur d'onde. Soit $\vec{K}$ le quadri-vecteur de l'onde émise relativement au repère de Copernic $\mathcal{R}$, et $\vec{K}'$ le quadri-vecteur d'onde de l'onde correspondante dans le référentiel $\mathcal{R}'$:

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} \omega/c \\ k_x = \frac{\omega}{c}\cos\theta \\ k_y = 0 \\ k_z = \frac{\omega}{c}\sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \vec{K}' = \begin{pmatrix} \omega'/c \\ k'_x = \frac{\omega'}{c}\cos\theta' \\ k'_y = 0 \\ k'_z = \frac{\omega'}{c}\sin\theta' \end{pmatrix} \tag{XV.20}$$

La transformation de Lorentz pour les quadri-vecteurs d'onde s'écrit :

$$\omega' = \gamma(\omega - c\beta k_x) \tag{XV.21}$$
$$k'_x = \gamma(k_x - \beta\omega/c) \tag{XV.22}$$
$$k'_y = k_y \tag{XV.23}$$
$$k'_z = k_z \tag{XV.24}$$

avec $\gamma = 1/\sqrt{1-(u/c)^2}$. On retrouve alors aisément les formules déjà démontrées de l'aberration stellaire.

5. Quittons la Terre pour un vaisseau spatial ultra-rapide. A partir des formules de l'aberration stellaire, discutons le cas $u/c \approx 1$. On constate dans ce cas que $\cos\theta' \to 1$ et $\sin\theta' \to 0$ quelque soit l'angle θ. La vision qu'aurait le pilote dans la cabine du vaisseau, au fur et à mesure qu'il se rapproche de la vitesse de la lumière, serait que l'ensemble des étoiles visibles se rassembleraient vers l'avant du vaisseau.

Complément : l'impact de la mesure de l'aberration des étoiles par J. Bradley On l'a vu, J. Bradley cherchait à mesurer la distance de étoiles par parallaxe, mais il a observé un mouvement de grande ampleur et orthogonal à celui attendu. A partir de son observation et de la connaissance de la vitesse de la Terre, il estima la vitesse de la lumière à 295 000 km/s, en utilisant des hypothèses galiléennes bien entendu. Suite à la découverte de la nature ondulatoire de la lumière, et à la croyance que celle-ci se propageait sur l'éther, Thomas Young a émis l'hypothèse que l'éther ne pouvait être entrainé par la Terre, sinon on observerait pas l'aberration des étoiles. Sauf que, si on remplit un télescope d'eau d'indice n, la formule galiléenne donne $d\theta^{(n)} = nd\theta$ et l'aberration dépend donc du milieu dans lequel voyage la lumière. Parallèlement, l'expérience de François Arago en 1810 a poussé Augustin Fresnel a formulé en 1818 une théorie d'éther partiellement entrainé qui propose qu'un milieu d'indice n se déplaçant à la vitesse u entraine l'éther à une vitesse $u(1-1/n^2) \equiv \alpha u$. Si on reprend le raisonnement galiléen mais en remplaçant le référentiel $\mathcal{R}$ par celui de l'éther $\mathcal{R}_e$ en mouvement, en utilisant la compositon galiléenne des vitesses on on montre que :

$$\Delta\theta^{(n)} = \frac{u(1-\alpha)}{\frac{c}{n} - \alpha u + u} - \frac{-u(1-\alpha)}{\frac{c}{n} + \alpha u - u} \approx n\beta(1-\alpha) \tag{XV.25}$$

à l'ordre 1 avec $u(1-\alpha)$ la vitesse de la Terre par rapport à l'éther partiellement entrainé. En prenant en compte la réfraction à l'entrée de la lunette remplie d'eau, on obtient in fine

$$\Delta\theta^{(n)} \approx n^2\beta(1-\alpha) \tag{XV.26}$$

qui vaut β dans la théorie de Fresnel. En 1851 l'expérience de Fizeau montre que la théorie de Fresnel sur l'éther partiellement entrainé est correcte. En 1871 Georges Airy parvient à mesurer l'aberration des étoiles à l'aide d'une lunette remplie d'eau et confirme le résultat. Plus tard l'expérience de Michelson-Morley en 1887 remettra en cause l'entrainement partiel de l'éther à l'aide d'un interféromètre. D'après les bibliographies sur Einstein

Exercice 16 Effet Doppler-Fizeau relativiste

1. Dans le référentiel $\mathcal{R}$, on a :

$$k_x = k\cos\theta = \frac{\omega}{c}\cos\theta, \quad k_y = k\sin\theta = \frac{\omega}{c}\sin\theta \tag{XVI.1}$$

avec $k = \omega/c$ et $\vec{k}$ dirigé de la source vers le récepteur (conventions de la figure de l'exercice précédent).

2. Les transformation de Lorentz donnent :

$$\omega' = \gamma(\omega - c\beta k_x) = \gamma(\omega - ku\cos\theta) \tag{XVI.2}$$
$$k'_x = \gamma(k_x - \beta\omega/c) = \gamma(k\cos\theta - \omega u/c^2) \tag{XVI.3}$$
$$k'_y = k_y \tag{XVI.4}$$
$$k'_z = k_z \tag{XVI.5}$$

3. On en déduit directement :

$$\omega = \frac{\omega'}{\gamma(1-\beta\cos\theta)} = \omega'\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta} \tag{XVI.6}$$

4. Dans le cas où la source se rapproche de l'observateur selon Ox, on a $\theta = 0$ et :

$$\boxed{\omega = \omega'\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > \omega'} \tag{XVI.7}$$

On observe un décalage du spectre vers le bleu. Lorsque la source s'éloigne, on a $\theta = \pi$ et :

$$\boxed{\omega = \omega'\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} < \omega'} \tag{XVI.8}$$

On observe un décalage du spectre vers le rouge. Cet effet se mesure très bien dans le rayonnement émis par les objets astrophysiques soumis à des événements violents (jets stellaires en sens contraires, bulles de gaz en expansion rapide,...). Notons qu'on obtient aussi un décalage vers lorsque la source est observée à $\theta = \pi/2$, alors que l'effet Doppler classique n'introduit aucune modification de fréquence :

$$\omega = \frac{\omega'}{\gamma} < \omega' \tag{XVI.9}$$

C'est l'effet Doppler relativiste transverse (cf animation Wikipedia).

5.
$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{1}{2}\lambda' \left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} + \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \right) = \frac{\lambda'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{XVI.10}$$

6.
$$\bar{\lambda} - \lambda' = \lambda' \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \approx \lambda' \frac{u^2}{2c^2} \tag{XVI.11}$$

7.
$$\bar{\lambda} - \lambda' = 1,05 \times 10^{-2} \text{nm} \tag{XVI.12}$$

A noter que le décalage Doppler-Fizeau classique :

$$\omega = \frac{\omega'}{1 - \beta \cos\theta} \qquad (\gamma = 1) \tag{XVI.13}$$

est lui de l'ordre de u/c soit 3,2 nm pour une des deux directions d'observation et de moyenne nulle. L'observation d'une moyenne non nulle pour les deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 est donc un test clair de la relativité restreinte.

Exercice 17 Voyages dans l'espace-temps

Partie 1 Mouvement accéléré soumis à une force constante

1. On se place dans le référentiel $\mathcal{R}$ et on y écrit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} = m\vec{g} \,. \tag{XVII.1}$$

Compte-tenu de la constance de la force, il semble légitime d'écrire, selon l'axe x :

$$p(t) = mgt = \gamma(t) m v_x(t) = \frac{m v_x(t)}{\sqrt{1 - v_x(t)^2/c^2}} \,, \tag{XVII.2}$$

qui, en choisissant une vitesse dirigée vers le ciel, se retourne en

$$\boxed{v_x(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2}}} \,. \tag{XVII.3}$$

Une autre manière d'obtenir cette équation est d'utiliser les relations

$$\vec{v} = \frac{c^2}{E}\vec{p} \quad \text{et} \quad E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2 c^2} \tag{XVII.4}$$

qui conduisent au même résultat. La vitesse s'intègre immédiatement en

$$\boxed{x(t) = \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2} - 1 \right]} \,. \tag{XVII.5}$$

Nous ne douterons pas de l'exactitude du résultat en retrouvant le mouvement balistique aux petits temps $x(t) \simeq \frac{1}{2}gt^2$ et le mouvement ultra-relativiste aux temps longs $x(t) \simeq ct$. L'accélération s'obtient en dérivant la vitesse, ce qui fournit :

$$\boxed{a_x(t) = \frac{g}{\left(1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2\right)^{3/2}} = \gamma(t)^{-3} g} \,, \tag{XVII.6}$$

puisque l'on aura vérifié que

$$\boxed{\gamma(t) = \sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}} \,. \tag{XVII.7}$$

On constate alors que, contrairement à la mécanique newtonienne, une force constante n'implique pas une accélération constante. L'accélération dans $\mathcal{R}$ diminue au fur et à mesure que l'on s'approche de la vitesse de la lumière.

Complément : on peut relier l'accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ et la force $\vec{f}$ dans un référentiel galiléen. Pour cela, il faut dériver γ, ce qui a le bon goût de nous donner :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} \,. \tag{XVII.8}$$

On en tire la force exprimée en fonction de la vitesse et de l'accélération

$$\boxed{\vec{f} = \gamma^3 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} m\vec{v} + \gamma m\vec{a}} \,. \tag{XVII.9}$$

En remarquant que

$$\vec{f}\cdot\vec{v} = \gamma^3 m\vec{v}\cdot\vec{a} \,, \tag{XVII.10}$$

on s'approche de notre chère relation de la dynamique newtonienne

$$\boxed{m\vec{a} = \gamma^{-1}\left[\vec{f} - (\vec{f}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}}{c}\right]} \tag{XVII.11}$$

Il est alors clair sur ces deux formules que, de façon générale, accélération et force ne sont pas nécessairement colinéaires. Si l'on était parti de la dernière relation pour étudier notre problème, elle aurait immédiatement donné

$$a_x = \gamma^{-3} g \quad \text{soit} \quad \frac{dv_x}{dt} = \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2} g \tag{XVII.12}$$

qui s'intègre en l'équation (**??**) à l'aide de l'énoncé.

2. La ligne d'univers dans $\mathcal{R}$ associée au mouvement de la fusée satisfait à l'équation hyperbolique

$$\boxed{\left(1+\frac{g}{c^2}x\right)^2 - \left(\frac{g}{c^2}ct\right)^2 = 1} \tag{XVII.13}$$

Les cas limites sont ceux discutés au-dessus, à savoir un démarrage balistique pour une asymptote quasi-luminique. Sur la ligne d'univers, l'asymptote croise l'axe des temps en $x = 0$ pour $\boxed{t = T^* \equiv c/g}$. Au-delà de ce temps, tout photon émis depuis $x = 0$ (Houston) aura une ligne d'univers $x = ct$ qui ne croisera jamais la ligne du mouvement accéléré. La fusée ne sera donc pas rattrapée.

3. Comme exposé dans la présentation du paradoxe, on s'attend à ce que le temps propre dans la fusée s'écoule moins vite, de sorte que $\tau < t$: en raison de la dilatation des durées, Houston voit l'horloge de la fusée en mouvement et mesure $dt = \gamma(t)d\tau$. Une manière générique de calculer un temps propre τ le long d'une ligne d'univers paramétrée par une équation $x(t)$ dans un référentiel galiléen est la suivante : l'invariance de l'intervalle élémentaire correspondant aux positions de la fusée entre t et $t + dt$ dans les référentiels de la fusée et dans $\mathcal{R}$ donne :

$$ds = cd\tau = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2} = \sqrt{1-\left(\frac{v_x(t)}{c}\right)^2}\, cdt = \frac{cdt}{\gamma(t)} \tag{XVII.14}$$

puisque $dx/dt = v_x(t)$. Le point un peu nouveau, c'est que la dilatation dépend du temps t. À l'aide des résultats précédents, on écrit :

$$d\tau = \frac{dt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}} \tag{XVII.15}$$

qui s'intègre à l'aide de l'énoncé :

$$\boxed{\tau = \frac{c}{g}\text{argsh}\left(\frac{gt}{c}\right) = T^* \ln\left[\frac{t}{T^*} + \sqrt{1+\left(\frac{t}{T^*}\right)^2}\right] < t} \,. \tag{XVII.16}$$

On peut vérifier les corrections à la limite newtonienne :

$$\tau \simeq t - \frac{1}{6}\left(\frac{gt}{c}\right)^3 \,. \tag{XVII.17}$$

4. La vitesse vue depuis la fusée est obtenue à l'aide de l'argument de contraction des longueurs entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{F}(t)$. À t et en utilisant la transformation de Lorentz de la fusée vers le sol, on écrit pour un intervalle élémentaire $dx = \gamma(t)(dX + \beta(t)cd\tau)$ et comme on mesure dans $\mathcal{F}(t)$, on prend $d\tau = 0$ soit

$$dX = \frac{dx}{\gamma(t)} = \frac{v_x(t)dt}{\gamma(t)} = \frac{gtdt}{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2} \,. \tag{XVII.18}$$

qui s'intègre aisément en

$$\boxed{X(t) = \frac{c^2}{2g}\ln\left[1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2\right]} \tag{XVII.19}$$

On constate qu'on retrouve fort heureusement le mouvement balistique aussi dans ce référentiel. On remarque aussi que $X(t) < x(t)$ comme on s'y attend. Le cosmonaute voit son temps s'écouler moins vite mais il a également l'impression de parcourir une distance plus petite. On peut exprimer le résultat en fonction de τ en utilisant $t = \frac{c}{g}\text{sh}\left(\frac{g\tau}{c}\right)$:

$$\boxed{X(\tau) = \frac{c^2}{g}\ln\left[\text{ch}\left(\frac{g\tau}{c}\right)\right]} \,. \tag{XVII.20}$$

Complément : vitesse, célérité et rapidité.

5. On considère l'accroissement de la vitesse (accélération) dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{F}(t)$ entre t et $t+dt$. On avait obtenu le résultat que l'accélération dans le référentiel $\mathcal{R}$ valait $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \gamma^{-3}(t)g$. On note $V(t)$ la vitesse de la fusée par rapport à $\mathcal{F}(t)$. Il est clair que par définition de $\mathcal{F}(t)$, $V(t) = 0$. En revanche, à $t+dt$, la vitesse est nulle relativement à $\mathcal{F}(t+dt)$ mais elle est non-nulle par rapport à $\mathcal{F}(t)$. On note dV l'accroissement correspondant, ie dV est la vitesse de la fusée à $t+dt$ relativement à $\mathcal{F}(t)$. La vitesse de la fusée par rapport à $\mathcal{R}$ à $t+dt$ est naturellement $v_x(t+dt)$. Pour déterminer dV en fonction des résultats connus, on utilise la loi de composition des vitesses entre les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{F}(t)$ dont la vitesse relative n'est autre que $v_x(t)$:

$$dV = \frac{v_x(t+dt) - v_x(t)}{1 - \frac{v_x(t+dt)v_x(t)}{c^2}} \simeq \gamma(t)^2\frac{dv_x}{dt}dt \tag{XVII.21}$$

au premier ordre en dt. Comme τ est le temps propre dans la fusée, l'accélération dans le référentiel de la fusée s'obtient en calculant $A \equiv dV/d\tau$. Reste à utiliser la relation $d\tau = dt/\gamma(t)$ pour trouver que

$$\boxed{A = \gamma(t)^3 a_x(t) = g} \,. \tag{XVII.22}$$

Ainsi, dans le référentiel tangent à la fusée, l'accélération est *constante*.
Complément : quadrivecteur accélération.

Partie 2 Paradoxe des jumeaux de Langevin (1911)

1. Soit $\mathcal{R}$ le référentiel terrestre associé à Grichka, supposé galiléen, et $\mathcal{F}$ le référentiel du vaisseau emportant Igor, supposé lui-aussi galiléen (dans cette question) et évoluant à une vitesse v. On note T l'indication de la montre de Grichka et $\mathcal{T}$ l'indication de la montre d'Igor lorsqu'ils se retrouvent. D'après la relation (**??**) intégrée le long du voyage, on a alors, comme la vitesse aller et retour sont égales et constantes et que le facteur de dilatation ne dépend pas du signe de la vitesse :

$$\boxed{\frac{\mathcal{T}}{T} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1}\,. \tag{XVII.23}$$

Ainsi, Igor aura bien une montre qui aura moins avancé (elle retarde), et comme ses processus biologiques ne sont a priori sensibles qu'au temps propre [5], il aura bien vieilli moins vite (même pas rajeuni...). Malgré tout, Grichka n'est pas plus bête que son frère et sa remarque concernant la réciprocité du raisonnement a un sens dans la mesure où l'on a considéré que le référentiel associé au vaisseau était supposé galiléen à l'aller puis au retour. Pour chaque portion du voyage, on pourrait inverser le point de vue, formellement en faisant une transformation de Lorentz inverse, et obtenir que $\mathcal{T} > T$. Cependant, le jumeau qui voyage n'a pas un comportement tout à fait symétrique de celui qui reste sur terre. En effet, celui qui reste sur terre reste sans discontinuer dans un même référentiel galiléen. En revanche, celui qui voyage va par trois fois changer de référentiel galiléen. Vous pouvez par vous-même faire l'expérience d'un changement de référentiel galiléen en sautant par exemple dans un train en marche et observer que vous subissez alors une accélération qui a tendance à vous déstabiliser. Les parcours des jumeaux n'ont donc qu'une symétrie de réciprocité apparente induite par la simplification de considérer des référentiels galiléens uniquement. Le résultat ci-dessus capte bien l'effet de ralentissement du vieillissement mais la modélisation n'est pas physique et conduit à une apparente réciprocité entre les jumeaux. Nous allons donc étudier une version plus réaliste qui ne souffre pas de ce problème, met bien en évidence l'asymétrie entre le voyageur et le casanier, et permet de retrouver un effet comparable à celui ci-dessus.

2. L'analyse du mouvement accéléré nous donne que pendant la phase d'accélération jusqu'à un temps qu'on note T_0 dans $\mathcal{R}$. Lorsqu'on inverse le sens de l'accélération, par symétrie $g \to -g$ dans les équations, le temps de décélération jusqu'à une vitesse nulle sera également T_0. Si l'on continue à décélérer à $-g$, on rebrousse chemin pour rejoindre la terre avant d'accélérer de nouveau pendant T_0 pour atterrir avec une vitesse nulle. Le voyage retour dure le même qu'à l'aller, à savoir $2T_0$ et le voyage total $T = 4T_0$. Avec l'approche faite sur le mouvement accéléré, on en déduit aisément l'équation de la trajectoire dans $\mathcal{R}$ pour ces différentes étapes :

$$x(t) = cT^*\left[\sqrt{1 + \left(\frac{t}{T^*}\right)^2} - 1\right] \qquad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T_0 \tag{XVII.24}$$

$$x(t) = \chi - cT^*\left[\sqrt{1 + \left(\frac{2T_0 - t}{T^*}\right)^2} - 1\right] \qquad \text{pour} \quad T_0 \leq t \leq 3T_0 \tag{XVII.25}$$

$$x(t) = cT^*\left[\sqrt{1 + \left(\frac{4T_0 - t}{T^*}\right)^2} - 1\right] \qquad \text{pour} \quad 3T_0 \leq t \leq 4T_0 \tag{XVII.26}$$

On a noté $\chi = 2cT^*\left[\sqrt{1 + \left(\frac{T_0}{T^*}\right)^2} - 1\right]$ la distance maximale atteinte pour $t = 2T_0$ à mi-voyage. On peut également "deviner" cette forme en faisant des raccordements de fonctions du type $x(t) = C \pm cT^*\left[\sqrt{1 + \left(\frac{t_0 - t}{T^*}\right)^2} - 1\right]$ avec C et t_0 à déterminer. Concernant les temps propres sur chacune des étapes, il est clair que pour Grichka, c'est à chaque fois T_0 donc $T = 4T_0$ au total. Pour Igor, les portions de la courbe correspondant aux 4 étapes sont toutes superposables (et donc de même longueur aussi bien au sens euclidien qu'au sens minkowskien) et vont chacune donner le même résultat pour le temps propre, à savoir celui obtenu plus haut avec $t = T_0 : \mathcal{T}/4 = T^* \text{argsh}\frac{T_0}{T^*}$. Ainsi, on obtient le rapport entre le temps propre

5. Ceci n'est pas tout à fait évident puisque certains vous proposerons des hormones anti-vieillissement comme la DHEA, introduisant alors un biais en vieillissement biologique et temps propre.

d'Igor $\mathcal{T}$ et celui de Grichka T :

$$\boxed{\frac{\mathcal{T}}{T} = \frac{4T^*}{T}\text{argsh}\left(\frac{T}{4T^*}\right) < 1} \ . \tag{XVII.27}$$

On a là un résultat quantitatif pour ce paradoxe avec un modèle physiquement acceptable. Il est clair qu'il est facile de rajouter des portions de mouvement rectiligne uniforme entre les phases d'accélérations si l'on veut coller un peu plus à la situation du paradoxe et s'approcher du résultat (**??**). On voit bien dans cet exemple de ligne d'univers que les deux référentiels ne peuvent être "équivalents" puisque celui qui voyage doit nécessairement être accéléré à un moment ou un autre induisent une courbure dans la ligne d'univers. Son référentiel ne peut être considéré comme galiléen tout au long du voyage. La célèbre formule "Tout est relatif" s'applique aux points de vue entre deux référentiels galiléens. Cependant, pour ce qui est du résultat quantitatif concernant le rapport des temps, si les périodes d'accélérations sont négligeables, la formule (**??**) peut tout à fait donner une estimation du retard.

3. On peut généraliser l'analyse précédente à un voyage quelconque en considérant deux événements A (la séparation) et B (les retrouvailles) de même abscisse $x = 0$ et de coordonnées temporelles t_A et t_B dans le référentiel galiléen de celui qui reste à terre. Tous les voyages possibles entre A et B ont dans ce référentiel des lignes d'univers incluses dans un losange de sommets A et B et de côté les géodésiques $ct = \pm x$ et $c(T - t) = \pm x$ qui correspondent aux voyages extrêmes effectués par des photons qui s'éloignent jusqu'en $x = cT/2$ avant d'être réfléchis, ou encore à l'intersection des cônes de lumière issus de A et B. Une ligne d'univers acceptable est une fonction $x(t)$ dans ce référentiel telle que $|dx/dt| \leq c$. Par définition du temps propre, la durée du voyage le long de cette ligne peut être calculé à l'aide de (**??**) en utilisant la paramétrisation du temps t :

$$\boxed{\mathcal{T} = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt \leq \int_{t_A}^{t_B} dt = T} \tag{XVII.28}$$

Il est alors clair que la ligne d'univers qui maximise le temps propre entre A et B est celle où l'on ne bouge pas, et la durée maximale est T. Pour toutes les autres, on obtiendra un résultat inférieur. C'est une interprétation géométrique du paradoxe au sens de la métrique de Minkowski. En effet, il y a un $-$ dans la racine et non un $+$ comme en géométrie euclidienne pour laquelle la "longueur" $\int_{t_A}^{t_B} \sqrt{c^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$ aurait été minimale pour la ligne droite entre A et B. On voit également que pour une particule massive, une ligne d'univers autre que la droite AB sera nécessairement accélérée à un moment ou un autre dans ce référentiel.

4. Oui, les voyages vers le futur sont possibles en relativité restreinte dans le sens où le voyageur peut connaître le futur du terrien. Pour raisonner en termes de générations, le voyageur peut tout à fait revenir après que plusieurs générations se soient succédées et connaître le futur "des autres".

   Cependant, bien que le voyageur vieillisse moins vite biologiquement (et vu de la terre) que quelqu'un sur terre, il vieillit quand même et ne rajeunit pas. Les voyages vers le passé ne sont pas possibles : on ne verra jamais son jumeau à l'état de bébé si on l'a quitté adulte. Sur le diagramme de la question précédente, il faudrait que B soit avant A et qu'on puisse relier les deux par une ligne d'univers physiquement acceptable. Or, on se rend compte qu'il faudrait franchir le cône de lumière de A pour rejoindre B et donc aller plus vite que c, ce que personne n'a encore réussi à faire. Malgré tout, il semblerait que la relativité générale rende possible ce genre de scénario, faisant les choux gras des auteurs de science-fiction…

Partie 3 Expérience d'Hafele et de Keating (1971)

1. D'après les résultats précédents et au premier ordre en v^2/c^2 et en considérant le référentiel du sol comme galiléen, on peut écrire

$$t_{\text{vol}} - t_{\text{sol}} \simeq \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1\right) t_{\text{sol}} \simeq -\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} t_{\text{sol}} \ . \tag{XVII.29}$$

   Numériquement, on obtient

$$t_{\text{vol}} - t_{\text{sol}} \simeq -\frac{1}{2} \times \left(\frac{900/3.6}{3\,10^8}\right)^2 \times 40 \times 3600 \simeq -50 \text{ ns} \ . \tag{XVII.30}$$

Cette différence de temps est tout à fait mesurable par des horloges atomiques et correspond bien aux ordres de grandeurs observés lors de l'expérience. Pour le pilote de ligne, on arrive à pas loin de 40 μs ce qui ne peut constituer une motivation suffisante en regard des risques encourus.

2. Vu qu'il y a une différence en fonction de la direction parallèle à l'équateur et que la terre tourne d'ouest en est, cela doit avoir à faire avec la rotation de la terre.

   Étudions la dilatation des temps lors d'un mouvement de rotation uniforme en relativité restreinte, dans un référentiel galiléen fixe de même origine que le mouvement de rotation. Les coordonnées spatiales suivent la loi $(x(t), y(t), z(t)) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, 0)$ et la vitesse $(v_x, v_y, v_z) = (-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t, 0)$. Le temps propre τ associé au référentiel en rotation est donc, par invariance de l'intervalle :

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \sqrt{1 - \left(\frac{R\omega}{c}\right)^2}\, dt \tag{XVII.31}$$

   Pour la terre, la vitesse de rotation $v_{\text{rot}} = R\omega \simeq 2\pi \times 6400/24 \simeq 1675\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ est du même ordre de grandeur que la vitesse de l'avion relativement au sol. Il faut donc prendre en compte cette vitesse dans le calcul, le point restant au sol aura lui aussi un phénomène de dilatation des temps par rapport au "bon" référentiel galiléen du problème qui est le référentiel géocentrique dont on notera t_{geo} le temps propre. En considéra que les avions volent à l'équateur et en négligeant leur altitude par rapport au rayon terrestre, on peut écrire que lors du voyage, au deuxième ordre en v_{rot}/c, on aura :

$$t_{\text{sol}} \simeq t_{\text{geo}}\left(1 - \frac{1}{2c^2}\,(v_{\text{rot}})^2\right), \tag{XVII.32}$$

$$t_{\text{est}} \simeq t_{\text{geo}}\left(1 - \frac{1}{2c^2}\,(v_{\text{rot}} + v)^2\right), \tag{XVII.33}$$

$$t_{\text{ouest}} \simeq t_{\text{geo}}\left(1 - \frac{1}{2c^2}\,(v_{\text{rot}} - v)^2\right), \tag{XVII.34}$$

   En considérant que le temps total de vol dans le référentiel galiléen est sensiblement le même à l'ordre zéro, ie $t_{\text{geo}} \simeq t_{\text{sol}} \simeq t_{\text{est}} \simeq t_{\text{ouest}} \simeq 2\pi R/v \simeq 45\text{h}$ (le voyage consiste à faire le tour de la terre à la vitesse v), on obtient :

$$t_{\text{est}} - t_{\text{sol}} \simeq -\tfrac{t_{\text{sol}}}{2c^2}\left(2vv_{\text{rot}} + v^2\right) \simeq -234\ \text{ns}, \tag{XVII.35}$$

$$t_{\text{ouest}} - t_{\text{sol}} \simeq -\tfrac{t_{\text{sol}}}{2c^2}\left(-2vv_{\text{rot}} + v^2\right) \simeq +136\ \text{ns}. \tag{XVII.36}$$

   On trouve le bon ordre de grandeur et on voit que l'horloge qui va vers l'ouest, en sens inverse de la rotation terrestre, avance par rapport à celle restée au sol. On peut comprendre qualitativement l'effet et l'ordre des temps propres en considérant les lignes d'univers des trajectoires des trois horloges dans l'espace-temps (x, y, ct). Les mouvements de rotations se traduiront par des lignes d'univers en forme d'hélices. Un tour du monde est effectué pour revenir au point de départ. Le trajet vers l'ouest effectue un tour de moins que celui au sol, qui lui-même effectue un tour de moins que celui vers l'est. Ces lignes d'univers sont représentées sur la figure **??**. La ligne d'univers vers l'ouest sera donc la moins longue au sens euclidien mais la plus longue (temps propre le plus long) au sens minkowskien, suivie de celle au sol et de celle vers l'est.

L'interprétation quantitative de l'expérience doit prendre en compte les effets de relativité générale ainsi que les parcours réels des avions qui étaient des avions de ligne. Le calcul ci-dessus est tiré de l'article original. Un calcul plus détaillé se trouve dans le livre [6] *Relativité restreinte* d'Éric Gourgoulhon (p448, chez EDP Sciences) qui donne un résultat similaire en utilisant le fait que $t_{\text{sol}} \simeq 2\pi R/v$.

Complément : corrections due à la dilatation des temps en relativité générale en symétrie sphérique.

6. À part les chapitres introductifs, je ne recommande pas cet ouvrage pour première lecture sur le sujet.

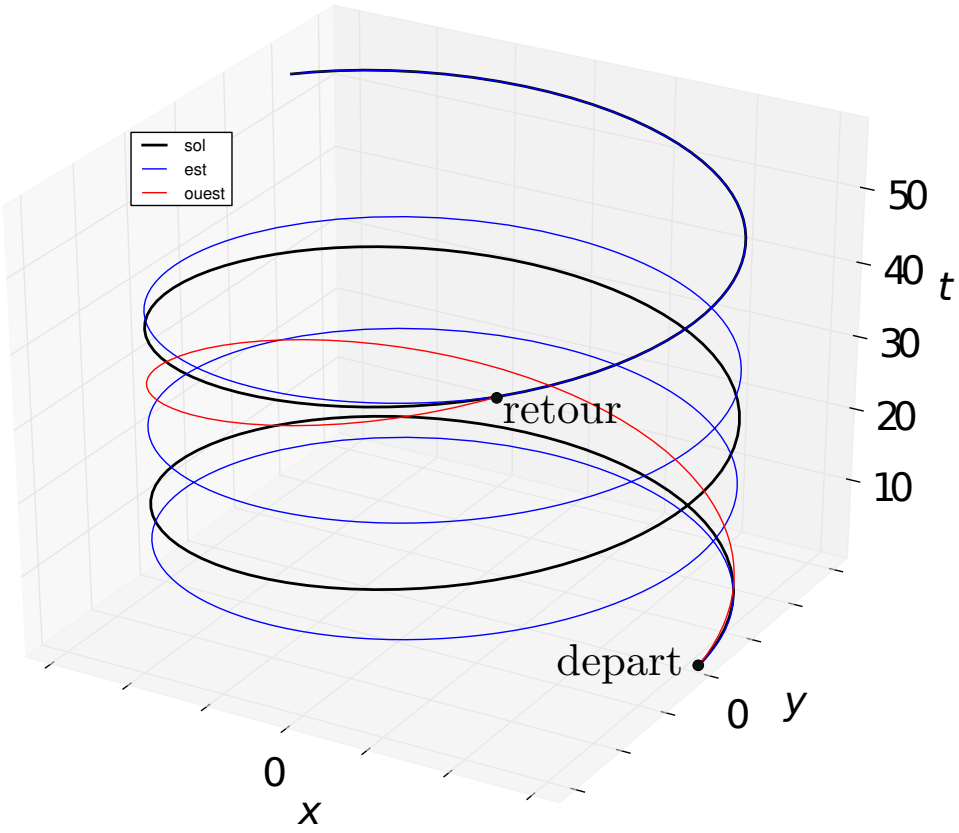


FIGURE 17.1 – Lignes d'univers des trois horloges dans le référentiel géocentrique. L'avion vers l'est et l'ouest font respectivement un tour de plus et un tour de moins que l'aéroport. On voit qu'au sens minkowskien, le temps propre vers l'ouest sera le plus long.

Partie 5 : Dynamique relativiste

Quelques formules utiles pour la dynamique :

$$\boxed{\mathcal{E} = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4} = \gamma mc^2, \quad T = (\gamma - 1)mc^2, \quad \vec{p} = \gamma m\vec{v}, \quad \vec{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}, \quad \vec{P}^2 = m^2c^2} \tag{XVII.37}$$

Les formules les plus utiles sont la première égalité et la dernière. Pour un photon dans le vide (ou plus généralement une particule de masse nulle), de vitesse $\vec{c}$ ($\|\vec{c}\| = c$) :

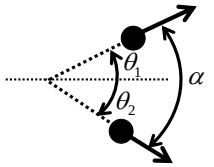
$$\boxed{\mathcal{E} = \|\vec{p}\|c = T = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{c} = \hbar\vec{k}, \quad \vec{P}^2 = 0} \tag{XVII.38}$$

On notera également que $\gamma^2\vec{v}^2 = c^2(\gamma^2 - 1)$. Montrons rapidement que $\mathcal{E} = \gamma mc^2$, en se plaçant dans le référentiel propre d'une particule :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{E}^*/c & = \gamma(\mathcal{E}/c - \beta p_x) & = mc \\ p_x^* & = \gamma(p_x - \beta\mathcal{E}/c) & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} mc & = \gamma(1-\beta^2)\mathcal{E} \\ p_x & = \beta\mathcal{E} \end{array} \right. \Rightarrow \mathcal{E} = \gamma mc^2 \tag{XVII.39}$$

Exercice 18 Collisions élastiques

1. On écrit la conservation de l'énergie cinétique et de l'impulsion :



$$m\vec{v_1} = m\vec{v_1}' + m\vec{v_2}' \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2.$$

Il vient alors immédiatement

$$\left. \begin{array}{ll} (\vec{v_1}' + \vec{v_2}')^2 & = v_1'^2 + v_2'^2 + 2\vec{v_1}' \cdot \vec{v_2}' \\ & = v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \end{array} \right\} \quad \vec{v_1}' \cdot \vec{v_2}' = 0 \quad \text{d'où} \quad \alpha = \pm\frac{\pi}{2}.$$

2. En mécanique relativiste, il faut écrire la conservation de l'énergie-impulsion :

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2',$$
$$\begin{pmatrix} \frac{T}{c} + mc \\ \vec{p_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}_1'}{c} \\ \vec{p_1'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}_2'}{c} \\ \vec{p_2'} \end{pmatrix}.$$

qui contient la conservation de l'énergie mécanique et de l'impulsion. En TD, on a tout exprimé en fonction des γ_i et trouvé

$$\boxed{\cos\alpha = \sqrt{\frac{\gamma_1' - 1}{\gamma_1' + 1}}\sqrt{\frac{\gamma_2' - 1}{\gamma_2' + 1}}.}$$

Ainsi, $\cos\alpha \geq 0$ quels que soient $\gamma_1', \gamma_2' \geq 1$. Contrairement à ce que l'on a pu montrer en mécanique newtonienne, l'angle α est donc un angle aigu en mécanique relativiste, non nécessairement droit. On retrouve le cas classique, et sa première correction relativiste, en prenant $v_i' \ll c$, *i.e.* $\gamma_i' \simeq 1 + \frac{v_i'^2}{2c^2}$ et en développant au premier ordre :

$$\alpha \simeq \pm\left(\frac{\pi}{2} - \frac{v_1'v_2'}{4c^2}\right).$$

Une autre manière d'obtenir le résultat est d'écrire la conservation de la pseudo-norme [7], $\vec{P}^2 = \vec{P'}^2$:

$$\begin{aligned}(\vec{P}_1 + \vec{P}_2)^2 &= (\vec{P}'_1 + \vec{P}'_2)^2 \\ \vec{P}_1^2 + \vec{P}_2^2 + 2\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 &= (\vec{P}'_1)^2 + (\vec{P}'_2)^2 + 2\vec{P}'_1 \cdot \vec{P}'_2 \\ 2\frac{\mathcal{E}_1}{c}\frac{\mathcal{E}_2}{c} - 2\vec{p_1} \cdot \vec{p_2} &= 2\frac{\mathcal{E}'_1}{c}\frac{\mathcal{E}'_2}{c} - 2\underbrace{\vec{p'_1} \cdot \vec{p'_2}}_{p'_1 p'_2 \cos\alpha}.\end{aligned}$$

On obtient alors, en remplaçant $\mathcal{E}'_2$ par $\mathcal{E}_1 + mc^2 - \mathcal{E}'_1$ et p par $\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2c^4}$

$$\cos\alpha = \frac{\mathcal{E}'_1(\mathcal{E}_1 + mc^2 - \mathcal{E}'_1) - \mathcal{E}_1 mc^2}{\sqrt{\mathcal{E}'^2_1 - m^2c^4}\sqrt{(\mathcal{E}_1 + mc^2 - \mathcal{E}'_1)^2 - m^2c^4}}.$$

On retrouve bien la même expression en utilisant le lien entre $\mathcal{E}$ et γ.
Si l'on suppose par ailleurs que la collision est symétrique, *i.e.* $\theta_1 = -\theta_2$ (voir dessin), alors la conservation de l'impulsion [8] s'écrit

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 m v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'_1 m v'_1 \cos\theta_1 \\ \gamma'_1 m v'_1 \sin\theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma'_2 m v'_2 \cos\theta_1 \\ -\gamma'_2 m v'_2 \sin\theta_1 \end{pmatrix}.$$

d'où l'on tire $\gamma'_1 v'_1 = \gamma'_2 v'_2$, donc $\gamma'_1 = \gamma'_2 = \gamma'$. On obtient alors directement la relation

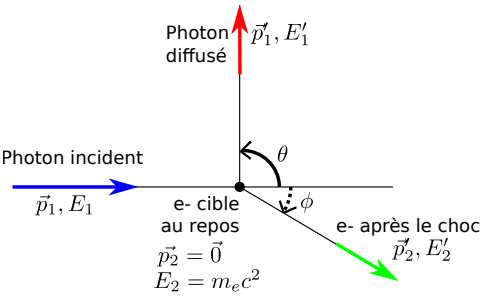
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{T'}{T' + 2mc^2} = \frac{T}{T + 4mc^2}}.$$

Dans la limite ultra-relativiste où $T \gg mc^2$, on a une angle très petit :

$$\boxed{\alpha \simeq \pm\sqrt{\frac{8mc^2}{T}}} \tag{XVIII.1}$$

Exercice 19 Diffusion Compton

Considérons la diffusion Compton ci-contre. Nous avons :



$$\vec{p'_2} + \vec{p'_1} = \vec{p_1} \text{(conservatoin de l'impulsion)} \tag{XIX.1}$$
$$E'_2 + E'_1 = E_2 + E_1 \text{(conservation de l'énergie)} \tag{XIX.2}$$

Plus directement, nous avons la conservation de la quadri-impulsion et il est astucieux en général de s'intéresser à la norme carrée des quadri-impulsion :

$$\|P'_2 - P_2\|^2 = \|P'_1 - P_1\|^2 \Leftrightarrow \|P'_2\|^2 + \|P_2\|^2 - 2P'_2 \cdot P_2 = \|P'_1\|^2 + \|P_1\|^2 - 2P'_1 \cdot P_1 \tag{XIX.3}$$

On a alors rapidement :

$$(m_e c^2)^2 + (m_e c^2)^2 - 2(E'_2 E_2 - 0) = 0 + 0 - 2(E'_1 E_1 - 0) \tag{XIX.4}$$
$$\Leftrightarrow 2(m_e c^2)^2 - 2E_2(E_2 + E_1 - E'_1) = -2E'_1 E_1 \tag{XIX.5}$$
$$\Leftrightarrow -2m_e c^2(E_1 - E'_1) = -E'_1 E_1 \tag{XIX.6}$$
$$\Leftrightarrow E'_1 = \frac{E_1 m_e c^2}{E_1 + m_e c^2} \tag{XIX.7}$$

7. $\vec{P}_1^2 = \left(\frac{\mathcal{E}'_1}{c}\right)^2 - p'^2_1 = m^2c^2 = \vec{P}_2^2$.
8. Composante spatiale de l'énergie impulsion seulement !

Or on a $E'_1 = h\nu'$ et $E_1 = h\nu$ donc :

$$\boxed{h\nu' = \frac{h\nu m_e c^2}{h\nu + m_e c^2}} \tag{XIX.8}$$

Déterminons maintenant la direction vers laquelle l'électron est projeté. Par la conservation de l'impulsion en projection sur la direction de $\vec{p}_1$, on a $p'_2 \cos\phi = p_1$ d'où :

$$\cos\phi = \frac{p_1 c}{p'_2 c} = \frac{E_1}{\sqrt{(E_1)^2 + (E'_1)^2}} \tag{XIX.9}$$

avec $\vec{p}'_2 = \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 \Rightarrow (p'_2)^2 = (p_1)^2 + (p'_1)^2 = (E_1)^2 + (E'_1)^2$. On en déduit finalement :

$$\boxed{\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_e c^2}{h\nu + m_e c^2}\right)^2}}} \tag{XIX.10}$$

L'énergie cinétique de l'électron est quant à elle :

$$\boxed{E'_{c_2} = E'_2 - m_e c^2 = E_1 - E'_1 = \frac{(h\nu)^2}{m_e c^2 + h\nu}} \tag{XIX.11}$$

La détection de l'effet Compton en 1923 est une expérience majeure de la physique moderne. Elle a permis de confirmer que le photon n'est ni pleinement une particule ni pleinement une onde, mais les deux à la fois. De plus, on remarque que l'on retrouve la diffusion Thomson élastique pour des photons incidents de faible énergie : $h\nu' \approx h\nu$.

Exercice 20 Collisions inélastiques

Partie 1 Notion de centre de masse

1. On cherche à déterminer le signe de la pseudo-norme de la 4-impulsion du système de N particules $\vec{P} = \sum_i \vec{p}(i)$:

$$\vec{P}^2 = \sum_i \vec{p}(i)^2 + \sum_{i \neq j} \vec{p}(i) \cdot \vec{p}(j).$$

Pour une seule particule, on a $\vec{p}(i)^2 \geq 0$, avec l'égalité pour les particules de masse nulle. En utilisant $\vec{p}_i = \mathcal{E}_i \vec{v}_i / c^2$, on peut écrire

$$\vec{p}(i) \cdot \vec{p}(j) = \frac{\mathcal{E}_i \mathcal{E}_j}{c^2} \left(1 - \frac{\vec{v_i} \cdot \vec{v_j}}{c^2}\right) > 0;$$

Tous les termes sont donc positifs, et même strictement positifs pour les produits faisant intervenir au moins une particule massique ou des photons non-alignés, ce qu'on supposera par la suite. Dans les cas non triviaux, on aura donc

$$\boxed{\vec{P}^2 > 0 \quad \text{(genre temps)}}.$$

On dit que l'énergie-impulsion du système est de genre temps [9]. Cette propriété ne dépend pas du référentiel galiléen considéré, la pseudo-norme étant un invariant de la transformation de Lorentz.

2. Supposons qu'il existe un référentiel galiléen $\mathcal{R}^*$ dans lequel la composante spatiale de l'énergie-impulsion est nulle. Alors $(\vec{P}^*)^2 = (\mathcal{E}^*/c)^2 > 0$: la 4-impulsion doit être de genre temps.

Le système vérifie donc une condition nécessaire à l'existence d'un référentiel du centre de masse. Vérifions qu'elle est suffisante. On cherche ainsi $\vec{\beta}$, sans dimension, tel que dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ en translation à $c\vec{\beta}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, $\vec{p}^* = \vec{0}$. L'intuition classique nous amène à choisir $\vec{\beta} \parallel \vec{p}$. Or,

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{P}^* = \begin{pmatrix} \mathcal{E}^*/c \\ \vec{p^*} \end{pmatrix},$$

9. Un quadrivecteur est de genre lumière si sa pseudo-norme est nulle, de genre espace si elle est strictement négative.

et les lois de changement de référentiel nous donnent

$$\frac{\mathcal{E}^*}{c} = \gamma\left(\frac{\mathcal{E}}{c} - \beta p\right),$$
$$p^* = \gamma\left(p - \beta\frac{\mathcal{E}}{c}\right) = 0,$$

d'où l'on tire facilement

$$\boxed{\vec{\beta} = \frac{\vec{p}c}{\mathcal{E}} = \frac{\sum_i \vec{p}_i c}{\sum_i \mathcal{E}_i} = \frac{1}{c}\frac{\sum_i \mathcal{E}_i \vec{v}_i}{\sum_i \mathcal{E}_i}}.$$

C'est le barycentre des vitesses avec comme poids les énergies individuelles.

Par ailleurs,

$$\left\|\vec{\beta}\right\|^2 = \frac{(\vec{p}c)^2}{\mathcal{E}^2} = 1 - \frac{\mathcal{E}^2 - (\vec{p}c)^2}{\mathcal{E}^2} = 1 - \frac{\vec{P}^2c^2}{\mathcal{E}^2} < 1,$$

la dernière inégalité découlant du fait que $\vec{P}$ est de genre temps. Le changement de référentiel à la vitesse $c\vec{\beta}$ est donc licite ! On peut donc trouver un référentiel du centre de masse pour N particules.

3. À la limite non-relativiste, *i.e.*pour des particules massiques de vitesses $\ll c$, on trouve, en écrivant qu'alors $\mathcal{E}_i \approx m_i c^2$,

$$c\vec{\beta} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}\right)}_{\vec{r}_{\mathrm{RCM}}},$$

où l'on reconnaît le vecteur position $\vec{r}_{\mathrm{RCM}}$ du barycentre de l'ensemble des particules massiques. Dans cette limite, le référentiel du centre de masse et le référentiel barycentrique coïncident donc.

Partie 2 Matérialisation de photons par création de paires e^-e^+

1. À supposer que cette réaction soit réalisable, la conservation de l'énergie-impulsion, et notamment de sa pseudo-norme, mène à la contradiction

$$0 = \vec{P}^2_{\mathrm{photon}} = (\vec{P}_{e^-} + \vec{P}_{e^+})^2 > 0 \quad \text{(voir partie précédente).}$$

2. La réaction produit des réactifs d'énergie minimale s'ils sont tous les trois aux repos, leurs énergies cinétiques étant alors nulles. Et bien sûr cela ne peut se produire que dans le référentiel du centre de masse ! L'énergie minimale nécessaire à la réaction, dans le référentiel du centre de masse, est donc

$$\mathcal{E}^*_{\mathrm{min}} = (m_{e^+} + m_{e^-} + m_A)c^2 = (2m_e + m_A)c^2.$$

La 4-impulsion du système s'y écrit

$$\vec{P}^* = \begin{pmatrix} (2m_e + m_A)c \\ \vec{0} \end{pmatrix}.$$

3. Dans le référentiel du laboratoire, avant la réaction, où A est supposée immobile, la 4-impulsion du système est

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \frac{h\nu}{c} + \frac{\mathcal{E}_A}{c} \\ \vec{p}_\gamma + \vec{p}_A = \vec{p}_\gamma \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_A = m_A c^2.$$

La conservation de l'énergie-impulsion au cours de la réaction, et la conservation de la pseudo-norme par changement de référentiel galiléen permettent d'écrire

$$\vec{P}^2 = (\vec{P}^*)^2$$
$$(\vec{P}_\gamma + \vec{P}_A)^2 = {\mathcal{E}^*_{\mathrm{min}}}^2$$
$$= 0 + m_A^2c^2 + 2\left(\frac{h\nu}{c}\frac{\mathcal{E}_A}{c} - \vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_A\right),$$

d'où l'on tire

$$\boxed{h\nu_{\mathrm{min}} = \frac{(2m_e + m_A)^2 - m_A^2}{2m_A}c^2 = 2m_e c^2\,\frac{m_e + m_A}{m_A}}.$$

Si A est un électron, alors $h\nu_{\min} = 4m_e c^2 = 2\,\text{MeV}$.
Si A est un noyau atomique, alors : $m_A \gg m_e$ et $h\nu_{\min} \approx 2m_e c^2 = 1\text{MeV}$. La réaction est donc plus favorable que dans le cas précédent.

Partie 6 : Charges et champ magnétique

Exercice 21 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Rappel : Équation du mouvement en mécanique relativiste :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}\vec{P}_\mu}{\mathrm{d}t} = qF_{\mu\nu}\vec{U}^\nu,$$

où $\vec{P}_\mu = m\vec{U}_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}}{c} = \gamma mc \\ -\vec{p} = -\gamma m\vec{v} \end{pmatrix}$ est la 4-impulsion sous sa forme covariante, et $F_{\mu\nu}$ est le tenseur complètement antisymétrique du champ électromagnétique :

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu\vec{A}_\nu - \partial_\nu\vec{A}_\mu) \quad \vec{A}^\mu = \begin{pmatrix} \frac{V}{c} \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ & 0 & -B_z & B_y \\ & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

On retrouve alors les équations classiques,

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = q\vec{E}\cdot\vec{v} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}).$$

1. Les équations du mouvement s'écrivent dans ce cas

$$\frac{\mathrm{d}(\gamma m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = q\left(\vec{v}\wedge\vec{B}\right) \quad \frac{\mathrm{d}(\gamma mc^2)}{\mathrm{d}t} = 0 \Longrightarrow \gamma = \text{cte} = \gamma_0.$$

On peut donc écrire

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \omega_c \left| \begin{matrix} -v_y \\ v_x \\ 0 \end{matrix} \right. \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{eB}{\gamma_0 m}.$$

Ainsi, $v_z = \text{cte} = v_0\sin\phi$ et $z(t) = v_0\sin\phi\, t$.
On a donc directement $v_z(t) = v_0\sin\phi$ et en injectant les deux équations selon x et y l'une dans l'autre on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{v}_x &= -\omega_c^2 v_x \\ \ddot{v}_y &= -\omega_c^2 v_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x(t) &= A\cos\omega_c t + B\sin\omega_c t \\ v_y(t) &= C\cos\omega_c t + D\sin\omega_c t \end{cases}$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} v_x(0) &= 0, & \dot{v}_x(0) &= \omega_c v_0\cos\phi \\ v_y(0) &= v_0\cos\phi, & \dot{v}_y(0) &= 0 \end{cases}$$

on en déduit :

$$\begin{cases} v_x(t) &= v_0\cos\phi\cos\omega_c t \\ v_y(t) &= v_0\cos\phi\sin\omega_c t \\ v_z(t) &= v_0\sin\phi \end{cases}$$

puis finalement :

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 + \frac{v_0\cos\phi}{\omega_c}(\cos\omega_c t - 1) \\ y(t) &= \frac{v_0\cos\phi}{\omega_c}\sin\omega_c t \\ z(t) &= (v_0\sin\phi)t \end{cases}$$

avec la condition initiale $(x, y, z)(0) = (x_0, 0, 0)$. On remarque que dans le plan Oxy on retrouve l'équation d'un cercle :

$$\left[x(t) - \left(x_0 - \frac{v_0 \cos\phi}{\omega_c}\right)\right]^2 + y(t)^2 = \left(\frac{v_0 \cos\phi}{\omega_c}\right)^2.$$

La trajectoire est donc une hélice de rayon $R = \dfrac{v_0 \cos\phi}{\omega_c}$, de pas $a = \dfrac{2\pi}{\omega_c} v_0 \sin\phi$ et de centre $\left(x_0 - \frac{v_0 \cos\phi}{\omega_c}, 0\right)$.

2. Pour étudier la stabilité de la trajectoire, on suppose qu'à un instant t_0 donné, la particule s'en éloigne de façon infinitésimale : $r = R(1+\epsilon)$ et $\dot\theta = \omega(t) = \omega_c + \omega'$, avec $\epsilon \ll 1$ et $\omega' \ll \omega_c$.
En coordonnées cylindriques, l'équation du mouvement s'écrit

$$\begin{pmatrix} \ddot r - r\dot\theta^2 \\ 2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta \\ \ddot z \end{pmatrix} = \omega_c \begin{pmatrix} -r\dot\theta \\ \dot r \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui s'écrit à l'ordre 1 de la perturbation,

$$\begin{aligned} \ddot\epsilon - \epsilon\omega_c^2 - 2\omega_c\omega' &= -\omega_c\omega' - \epsilon\omega_c^2 & \qquad \ddot\epsilon &= \omega_c^2(\omega'/\omega_c) \\ 2\dot\epsilon\omega_c + \dot\omega' &= \omega_c\dot\epsilon & \dot\epsilon &= -(\dot\omega'/\omega_c). \end{aligned}$$

On trouve alors

$$\omega' = -\omega_c\epsilon + \alpha\omega_c \quad \text{et} \quad \ddot\epsilon + \omega_c^2\epsilon = \alpha\omega_c^2,$$

où α est une constante $\ll 1$. La particule reste donc infinitésimalement proche de la trajectoire non perturbée, et son écart à cette trajectoire évolue périodiquement, à la même pulsation, ω_c.

Exercice 22 Piégeage d'un électron dans le champ magnétique terrestre – Aurores boréales

1. La potentiel vecteur créé par une boucle de courant C s'écrit

$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I\,\mathrm{d}\vec u}{|\vec r - \vec u|}.$$

À grande distance, et au premier ordre en u_0/r (approximation dipolaire, u_0 est la taille caractéristique de C, ici son rayon), $\frac{1}{|\vec r - \vec u|} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec r\cdot\vec u}{r^2}\right)$. On peut donc récrire $\vec A$, en ne gardant que le terme du premier ordre [10], sous la forme

$$\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I\vec r\cdot\vec u\,\mathrm{d}\vec u}{r^3}.$$

Il faut alors remarquer que $(\vec u \wedge \mathrm{d}\vec u) \wedge \vec r = (\vec u\cdot\vec r)\,\mathrm{d}\vec u - (\vec r\cdot\mathrm{d}\vec u)\vec u$, le dernier terme se récrivant $(\vec r\cdot\mathrm{d}\vec u)\vec u = \mathrm{d}(\vec u(\vec r\cdot\vec u)) - (\mathrm{d}\vec u)(\vec r\cdot\vec u)$. Ainsi, on peut écrire

$$\oint (\vec u \wedge \mathrm{d}\vec u) \wedge \vec r = \oint 2\vec u\cdot\vec r\,\mathrm{d}\vec u - \oint \mathrm{d}(\vec u(\vec r\cdot\vec u)),$$

la dernière intégrale étant nulle, comme intégration d'une différentielle totale sur un contour fermé.

Finalement, $\vec A(\vec r) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec M\wedge\vec r}{r^3}$ où $\vec M = \dfrac{1}{2}\displaystyle\oint_C I(\vec u\wedge\mathrm{d}\vec u)$.

C'est la forme générale du potentiel vecteur créé par un dipôle magnétique $\vec M$.

Il faut maintenant calculer le champ magnétique créé par un tel potentiel, *i.e.* $\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\vec M\wedge\vec r}{r^3}\right)$. On utilise le fait que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(f\vec A\right) = f\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec A) + \overrightarrow{\nabla} f\wedge\vec A$ soit

$$\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{1}{r^3}\underbrace{\overrightarrow{\nabla}\wedge(\vec M\wedge\vec r)}_{\#1} + \underbrace{\left(\overrightarrow{\nabla}\frac{1}{r^3}\right)\wedge(\vec M\wedge\vec r)}_{\#2}\right),$$

10. Le terme d'ordre 0 a une contribution nulle.

$$\#2 \;=\; -\frac{3\vec{r}}{r^5} \wedge (\vec{M} \wedge \vec{r}) \;=\; -\frac{3}{r^5}(r^2\vec{M} - (\vec{r}\cdot\vec{M})\vec{r}),$$

$$\#1 :\; \overrightarrow{\nabla} \wedge (\vec{M} \wedge \vec{r})\Big|_i \;=\; \epsilon_{ijk}\,\partial_j(\vec{M} \wedge \vec{r})_k \;=\; \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{kmn}\,\partial_j M_m r_n,$$

avec sommation sur les indices répétés. Or, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} \;=\; \delta_{i,m}\delta_{j,n} - \delta_{i,n}\delta_{j,m}$. On obtient finalement

$$\#1_i \;=\; \partial_j(M_i r_j) - \partial_j(M_j r_i) \;=\; 3M_i - M_i \;=\; 2M_i \quad \text{soit} \quad \#1 \;=\; 2\vec{M}/$$

On peut retrouver le même résultat en utilisant $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{M} \wedge \vec{a}) = \vec{M}\,\text{div}\,\vec{a} - (\vec{M}\cdot\overrightarrow{\nabla})\vec{a}$ qui ici donne

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{M} \wedge \vec{r}) = \vec{M}\,\text{div}\,\vec{r} - (\vec{M}\cdot\overrightarrow{\nabla})\vec{r} = 3\vec{M} - \vec{M} = 2\vec{M}.$$

En regroupant les deux termes ci-dessus, on retrouve l'expression donnée dans l'énoncé.
Pour $M \;\approx\; 8\cdot 10^{22}\,\text{A}\cdot\text{m}^2$, avec $R \;\approx\; 6000\,\text{km}$, on obtient $B \;\approx\; 10^{-4}\text{T} \;=\; 1\text{G}$. On retrouve bien l'ordre de grandeur du champ magnétique terrestre.

2. En coordonnées cylindriques, on rappelle la relation

$$\frac{\text{d}}{\text{d}t}\begin{pmatrix} \vec{u_r} \\ \vec{u_\theta} \\ \vec{u_\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\theta} & \dot{\varphi}\sin\theta \\ -\dot{\theta} & 0 & \dot{\varphi}\cos\theta \\ -\dot{\varphi}\sin\theta & -\dot{\varphi}\cos\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{u_r} \\ \vec{u_\theta} \\ \vec{u_\varphi} \end{pmatrix}.$$

La composante selon $\vec{u_\varphi}$ de l'accélération s'écrit alors

$$a_\varphi \;=\; 2\dot{r}\sin\theta\,\dot{\varphi} + r\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2r\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} \;=\; \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\text{d}}{\text{d}t}\left(\dot{\varphi}r^2\sin^2\theta\right).$$

Par ailleurs,

$$\vec{B} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi r^3}(-3M\cos\theta\,\vec{u_r} + M\vec{u_z}),$$

avec $\vec{u_z} \;=\; \cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta}$.
Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc

$$m\vec{a} \;=\; q\vec{v} \wedge \vec{B} \;=\; q(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{u_\varphi}) \wedge (B_r\vec{u_r} + B_\theta\vec{u_\theta}).$$

Si on ne s'intéresse qu'à la composante selon $\vec{u_\varphi}$, on trouve alors

$$\begin{aligned} ma_\varphi &= q(\dot{r}B_\theta - r\dot{\theta}B_r) \\ &= (-e)\frac{\mu_0}{4\pi}M\left(\frac{1}{r\sin\theta}\times\frac{\text{d}}{\text{d}t}\left(\frac{\sin^2\theta}{r}\right)\right). \end{aligned}$$

En comparant à l'expression déjà obtenue de a_φ et en intégrant, on obtient l'équation demandée, avec K une constante quelconque (on notera dorénavant $A = \mu_0 Me/4\pi m$) :

$$\dot{\varphi}r^2\sin^2\theta \;+ A\frac{\sin^2\theta}{r} \;=\; K.$$

3. La force de Lorentz ne travaillant pas, l'énergie cinétique de la particule est constante, soit

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \;=\; \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2).$$

On écrit alors

$$r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 \;=\; r^2\sin^2\theta \underbrace{\frac{1}{(r^2\sin^2\theta)^2}\left(K - A\frac{\sin^2\theta}{r}\right)^2}_{\dot{\varphi}^2\text{ obtenu à partir de la question précédente}} \;=\; \frac{2}{m}V(r,\theta).$$

On retrouve ainsi l'équation proposée dans l'énoncé, avec un potentiel effectif [11]

$$V(r,\theta) \;=\; \frac{1}{2}m\frac{\left(K - A\frac{\sin^2\theta}{r}\right)^2}{r^2\sin^2\theta}.$$

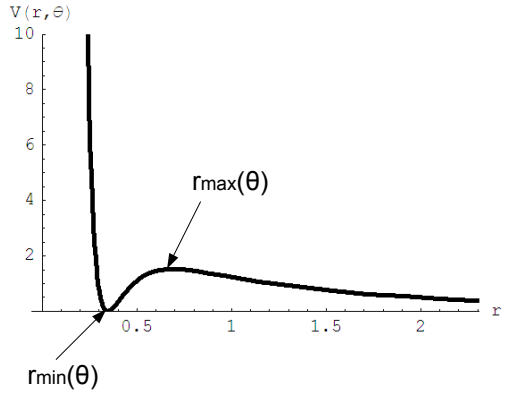


FIGURE 22.1 – Potentiel piégeant effectif. Le dessin est tracé pour $m = 2$, $A = K = 1$, et $\theta = \pi/5$.

On trace FIG. **??** l'allure de $V(r)$ à θ fixé.
On obtient facilement

$$r_{\min}(\theta) = \frac{A}{K}\sin^2\theta \quad \text{et} \quad r_{\max}(\theta) = 2r_{\min}(\theta), \qquad \text{avec :} \qquad V(r_{\max}(\theta),\theta) = V_{\max}(\theta) = \frac{m}{32}\frac{K^4}{A^2\sin^6\theta}.$$

4. Le long d'une ligne de champ, $\vec{\mathrm{d}l} \wedge \vec{B} = \vec{0}$, ce qui se récrit $\mathrm{d}r\, B_\theta = r\,\mathrm{d}\theta\, B_r$ et $\mathrm{d}\varphi = 0$. À partir des expressions de B_r et B_θ, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{2\sin\theta\cos\theta\ \mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta} \quad \text{soit} \quad r = r_0\sin^2\theta.$$

Par ailleurs, le piégeage se fait autour de $r_{\min}(\theta) \propto \sin^2\theta$. Les particules sont donc piégées le long des lignes de champ pour lesquelles $r_0 = r_{\min}(\pi/2) = A/K$. Autour de la Terre, on observe deux ceintures dans lesquelles sont piégées les électrons pour l'une et les protons pour l'autre.

5. À θ donné, il n'y a piégeage que si $V_{\max}(\theta) > \frac{1}{2}mv_0^2$ soit $K^4 > 16A^2v_0^2\sin^6\theta$. Il est donc plus facile de piéger au niveau des pôles, *i.e.* là où $\sin\theta \approx 0$. Les aurores boréales étant dues à l'ionisation de l'atmosphère par des particules chargées (issues du vent solaire), on comprend bien pourquoi elles ont préférentiellement lieu aux pôles.

6. Pour qu'il y ait piégeage à tout angle, il faut que $K^4 > 16A^2v_0^2 = K_0^4$. Ainsi, plus les particules concernées sont énergétiques, *i.e.* plus v_0 est grand, plus le K minimal piégeant doit être grand. Comme $r_{\min}(\theta) \propto K^{-1}$, les ceintures piégeantes sont d'autant plus proches de la Terre que v_0 est grand. Plus précisément, regardons à quel angle ces ceintures interceptent la surface terrestre :

$$r_{\min}(\theta) = R_T \quad \text{soit} \quad \sin^2\theta = \frac{R_T K_0}{A}.$$

On trouve finalement $\sin^2\theta = 2R_T v_0\sqrt{\dfrac{\mu_0}{4\pi}e\dfrac{M}{m}}$.
Cette intersection se fait donc d'autant plus proche de l'équateur que la particule est énergétique. Ainsi, il n'est pas impossible d'observer des aurores boréales à des latitudes plus basses, lors d'une forte activité solaire («orages magnétiques»).

11. On pourra vérifier que V a les bonnes dimensions.