Principe du MASER

Un MASER (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation) nécessite d'abord une inversion de population : on sélectionne dans un jet moléculaire d'ammoniac les états $|\chi_A\rangle$ à l'aide d'un champ électrique inhomogène. Ensuite, l'émission est stimulée en faisant passer le jet de molécules préparées dans une cavité à haute fréquence réglée sur la fréquence de résonance ω_0 et dont la longueur est calculée pour que le temps de vol des molécules dans celle-ci soit $T = \frac{\pi}{\omega_1}$. Pour l'ammoniac, $\nu = \omega_0/2\pi = 24$GHz. Le principe du MASER a été à la base d'amplificateurs pour des mesures de radioastronomie et permet la construction d'horloges atomiques (remplacé par une résonance de spin pour le Césium 133, voir chapitre suivant). Le même principe est à la base des LASER, où le L est pour Light au lieu de Microvawe (voir le cours d'optique).

3.3 Oscillateur harmonique et quantification du champ électromagnétique

3.3.1 Oscillateur harmonique quantique et opérateurs de création/annihilation

Considérons une particule de masse m dans un potentiel harmonique à une dimension $V(x) = \frac{1}{2}Kx^2$. Le problème classique nous permet d'anticiper l'existence d'une pulsation caractéristique $\omega = \sqrt{K/m}$ et donc l'opérateur d'énergie potentielle

$$\hat{V}(x) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \ .$$

C'est un potentiel qui permet de décrire de nombreuses situations physiques puisqu'il est une approximation simple d'un potentiel confinant. On a déjà mentionné le corps noir comme application de l'oscillateur harmonique mais on peut aussi mentionner la physique moléculaire (vibrations d'une molécule diatomique par exemple) ou la dépendance en température de la capacité calorifique d'un solide...

L'équation aux valeurs propres est

$$\hat{H}\,|\phi(x)\rangle = E\,|\phi(x)\rangle \ ,$$

avec

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \ .$$

En posant $\hat{X} = \hat{x}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ et $\hat{P} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}}$ on simplifie le hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{P}^2 + \hat{X}^2) \ ,$$

et la relation de commutation canonique

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i \ .$$

Une résolution très efficace du problème au valeur propre passe par la définition des opérateur de création et d'annihilation

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}) \ , \ \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}) \ ,$$

tels que

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \ ,$$

et que

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + 1/2) \ .$$

en posant $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ l'opérateur "nombre" pour lequel on a les relations de commutation

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \ ; \ [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \ .$$

De manière évidente, $[\hat{N}, \hat{H}] = 0$, donc on peut définir une base $|n\rangle$ de vecteurs propres commune aux deux opérateurs telle que

$$\hat{N}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \ ,$$

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(n + 1/2)|n\rangle \ .$$

Les valeurs propres n sont positives ou nulles car

$$0 \leq ||a|n\rangle||^2 = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \langle n|N|n\rangle = n\langle n|n\rangle \ , \tag{3.13}$$

Les opérateurs de création et d'annihilation font passer d'un vecteur propre à un autre

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \ ,$$
$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \ , \tag{3.14}$$

ce qui se montre grâce aux relations de commutation

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = \hat{a}(\hat{N}-1)|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle \ ,$$
$$\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle = \hat{a}^\dagger(\hat{N}+1)|n\rangle = (n+1)\hat{a}|n\rangle \ , \tag{3.15}$$

Considérons alors $|n_1\rangle$ l'état de valeur propre la plus basse, non nulle, $0 < n_1 \leq 1$. Comme

$$\hat{a}|n_1\rangle = \sqrt{n_1 - 1}|n_1 - 1\rangle \ , \tag{3.16}$$

pour que $n_1 - 1$ ne soit pas négatif, il faut $n_1 = 1$ et, conséquemment, par application de la relation 3.14, tous les n sont des entiers positifs ou nul. L'état fondamental est $|0\rangle$ d'énergie $E_0 = \hbar\omega$ et les états excités ont des énergies $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$. Tous les vecteurs propres peuvent être construits à partir du fondamental

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \ . \tag{3.17}$$

Cette relation permet de construire par récurrence les fonctions d'ondes associées à chaque état propre une fois résolu l'équation d'onde associée à l'état fondamental $|0\rangle$, qui respecte $\hat{a}|0\rangle = 0$ d'où, en terme de fonction d'onde ϕ_0,

$$\left(\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\phi_0(x) = 0 \ ,$$

ce qui nous donne

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}e^{-m\omega x^2/(2\hbar)} \ , \tag{3.18}$$

ce qui donne, par application de $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})$, permet de déterminer que

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{2^n n!}}e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}H_n((m\omega/\hbar)^{1/2}x) \ , \tag{3.19}$$

avec H_n les polynômes de Hermite.

[Le Bellac Ch. 11 ; Basdevant p.81 ; Basdevant Ch. 7 p.164].

3.3.2 Quantification du champ électromagnétique

Comme nous l'avons discuté dans le premier chapitre, la quantification du champ électromagnétique donne naissance au concept de photon. Considérons une cavité métallique parallépipédique de volume V. Pour fixer les idées, considérons un mode de champ classique confiné sur une longueur L selon la direction $\hat{y}$

$$\vec{E} = \hat{z}e(t)\sin(ky) \ ,$$
$$\vec{B} = \hat{x}b(t)\cos(ky) \ , \tag{3.20}$$

avec $k = n\pi/L$ et $n = 1, 2, 3, ...$ Les équations de Maxwell relient $e(t)$ et $b(t)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow ke(t) = -\frac{\mathrm{d}b(t)}{\mathrm{d}t} ,$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} = c^2 kb(t) ,$$

ce qui impose

$$\frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 e = 0 ,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 b = 0 , \tag{3.21}$$

avec $\omega = kc$. L'énergie contenue dans le champ magnétique par unité de volume est

$$\epsilon = \frac{1}{2}\epsilon_0(\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2) , \tag{3.22}$$

soit une énergie totale

$$H = \frac{1}{4}\epsilon_0 V[e^2(t) + c^2 b^2(t)] . \tag{3.23}$$

En posant

$$q = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{2}} e ,$$
$$p = c\sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{2}} b , \tag{3.24}$$

on trouve une analogie formelle avec le Hamiltonien d'un oscillateur harmonique de masse $m = 1$

$$H = \frac{1}{2}[p^2(t) + \omega^2 q^2(t)] , \tag{3.25}$$

ce qui nous permet donc, en poussant cette analogie, de proposer une quantification du champ électromagnétique en associant à q, p les opérateurs Q, P et en utilisant la relation de conjugaison canonique $[Q, P] = i\hbar$. La résolution est alors identique à celle de la partie précédente et on trouve que l'énergie du champ est quantifiée $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ pour un état $|n\rangle$ correspondant à un état à n photons d'énergie $\hbar\omega$. On remarque que l'état vide de photon $|0\rangle$ a une énergie $E_0 = \hbar\omega$ non nulle appelée énergie de point zéro. Si, par une redéfinition du zéro d'énergie on peut annuler cette énergie, des fluctuations autour de l'énergie de point zéro seront toujours observables !

[Le Bellac §11.3 & §15.3.4]

3.4 Relation d'incertitude temps/énergie

3.4.1 Inégalité d'Heisenberg généralisée

Soient deux propriétés physiques A et B représentées par les opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ qui ne commutent pas : $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$. La dispersion des résultats de mesures de A et B effectuées sur un systèmes dans l'état $|\phi\rangle$

$$(\Delta_\phi A)^2 = \left\langle A^2 \right\rangle_\phi - \langle A \rangle_\phi^2 ,$$
$$(\Delta_\phi B)^2 = \left\langle B^2 \right\rangle_\phi - \langle B \rangle_\phi^2 . \tag{3.26}$$

où $\langle . \rangle_\phi = \langle \phi | . | \phi \rangle$ est la moyenne d'un opérateur pour l'état $|\phi\rangle$. En définissant l'opérateur $\hat{C}$ tel que

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq i\hat{C} , \tag{3.27}$$

on peut alors démontrer l'inégalité de Heisenberg

$$(\Delta_\phi A)(\Delta_\phi B) \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle \hat{C} \right\rangle_\phi\right| . \tag{3.28}$$

[LeBellac Ch. 4]

3.4.2 Inégalité d'Heisenberg temporelle

Soit un opérateur $\hat{A}$ représentant une propriété physique A supposée indépendante du temps, le théorème d'Ehrenfest nous donne

$$\frac{\mathrm{d}\,\langle \hat{A}\rangle_\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\left\langle [\hat{A}, H]\right\rangle_\phi \ .$$

où $\langle . \rangle_\phi = \langle \phi(t)|\,.\,|\phi(t)\rangle$ est la moyenne d'un opérateur pour l'état $|\phi(t)\rangle$. En utilisant la relation d'Heisenberg généralisée (Eq.3.28) pour $\hat{A}$ et H le Hamiltonien du système

$$(\Delta_\phi A)(\Delta_\phi H) \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle [\hat{A}, H]\right\rangle_\phi\right| = \frac{1}{2}\hbar\left|\frac{\mathrm{d}\,\langle \hat{A}\rangle_\phi}{\mathrm{d}t}\right| \ . \tag{3.29}$$

En définissant un temps caractéristique $\tau_\phi(A)$ par

$$\frac{1}{\tau_\phi(A)} = \left|\frac{\mathrm{d}\,\langle \hat{A}\rangle_\phi}{\mathrm{d}t}\right|\frac{1}{\Delta_\phi A} \ , \tag{3.30}$$

on trouve la forme rigoureuse de l'inégalité d'Heisenberg temporelle

$$\Delta_\phi H \tau_\phi(A) \geq \frac{\hbar}{2} \ , \tag{3.31}$$

souvent présentée sous la forme

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \ . \tag{3.32}$$

Cette inégalité a un status quelque peu particulier, elle mélange énergie, un opérateur, et temps, qui n'en n'est pas un. ΔE représente la dispersion en énergie et Δt un temps caractéristique d'évolution. On remarque que $\Delta E = 0$ implique un temps d'évolution infini et donc n'est possible que pour un état stationnaire, par exemple l'état fondamental d'un atome isolé. Par contre, si on considère la superposition libre de deux états $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ d'énergie E_1 et E_2, donc un état pour lequel on a une incertitude $\Delta E \approx |E_2 - E_1|$ en énergie, on aura effectivement une évolution appréciable de l'état du système en un temps $\Delta t \approx \frac{\hbar}{|E_2 - E_1|}$ qui est la période des oscillations entre les deux états. On pourra également s'intéresser au cas d'un paquet d'onde de largeur en énergie ΔE.

[LeBellac Ch. 4 (p.122) ; Cohen Ch. III §D-e (p.250)]

3.4.3 Largeur de raie et durée de vie d'un état excité

Une relation rapellant l'Eq.3.32 mais d'origine physique différente est celle reliant la durée de vie moyenne τ d'un état excité et la largeur de raie ΔE

$$\tau \Delta E \approx \hbar \ . \tag{3.33}$$

En effet, même isolé, un atome porté dans un état excité va émettre un photon au bout d'un temps moyen τ et l'énergie de ce photon a une dispersion ΔE. Ce phénomène provient du fait que l'atome, même isolé de toute perturbation, est toujours couplé avec les fluctuations du vide du champ électromagnétique (cf section 3.3.2) : le système totale est donc l'ensemble {atome+champ électromagnétique}, le champ électromagnétique étant initialement dans son état fondamental $|vide\rangle$ mais pouvant être placé dans un état excité $|1photon\rangle$.

La dispersion ΔE ne veut pas dire que le niveau d'énergie ne peut pas être défini avec une plus grande précision, on peut même en principe étudier la forme de la distribution d'énergie. La largeur ΔE de raie pour un atome isolé est appelée largeur naturelle. Cette largeur naturelle est le plus souvent négligeable devant celle due à divers phénomènes causant un élargissement des raies spectrales : effet Doppler, collisions avec les autres atomes d'un gaz ... L'étude de la forme des raies spectrales donne donc une information sur l'état et l'environnement des atomes.

[LeBellac Ch. 4 & Ch. 15 §3.4 ; Cagnac Ch. 1 p. 25 ; Cohen - Complément K_{III} (p.336) ; Cohen Tome II - Complément D_{XIII}]