

## 4.2 Spin 1/2 et expérience de Stern et Gerlach

### 4.2.1 Expérience de Stern et Gerlach

[Basdevant Ch. 8 et p.220; Le Bellac p. 85]

Un jet d'atome d'argent (collimaté) est envoyé dans l'entrefer d'un aimant dans lequel règne un champ magnétique inhomogène  $B_z \vec{e}_z$  fonction de  $z$  (Fig.4.2a). Un atome d'argent est électriquement neutre mais porte un moment magnétique  $\mu$  qui a donc une énergie potentielle

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad (4.19)$$

et subit une force

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{e}_z. \quad (4.20)$$

**Rq :** pour cela, il faut s'assurer que le trajet des atomes dans l'entrefer se fait dans une région où, par voie de symétrie, on peut considérer les dérivées de  $B$  selon  $y$  et  $x$  nulles (en négligeant les effets de bord). De plus, le couple  $\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \times \vec{B}$  subit par le moment entraîne une précession qu'on considère suffisamment rapide pour pouvoir moyenner la force  $\vec{F}$  sur une période de précession (nous reviendrons là-dessus) [Basdevant Ch. 8, p.174].

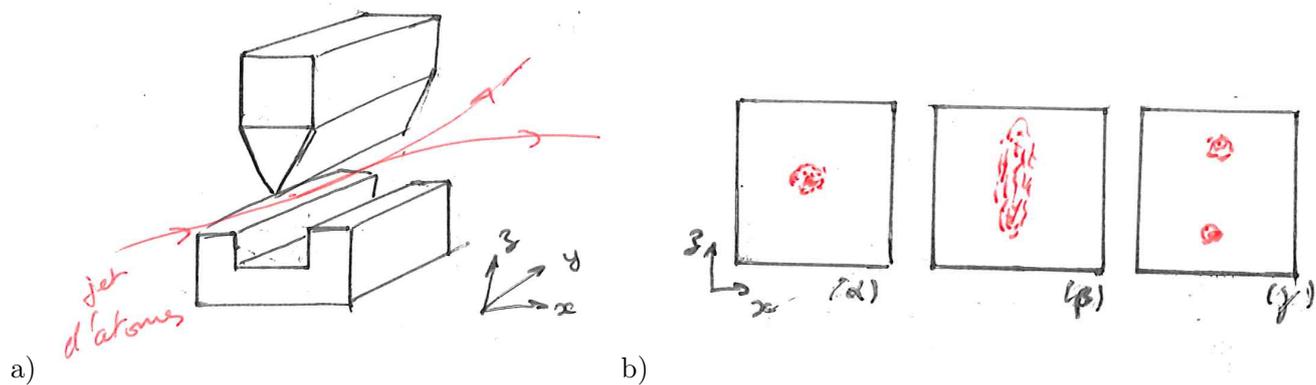


FIGURE 4.2 – a) Déviation d'un jet d'atome dans l'expérience de Stern et Gerlach. b) Résultats ( $\alpha$ ) sans champ magnétique, ( $\beta$ ) attendu classiquement avec un champ, ( $\gamma$ ) obtenu avec des atomes d'argent. (Schéma librement inspiré d'une figure de [Basdevant].)

En l'absence de champ, on obtient sur un écran en sortie de dispositif une tache autour de l'axe  $O_y$  (on aurait un point si la collimation était parfaite). Classiquement, en présence d'un champ, au vu de la forme de la force (Eq.4.20), on s'attendrait à ce que les atomes soient déviés et forment une tache élargie continue dans la direction  $O_z$ , la déviation étant d'autant plus importante que  $\mu_z$  est grand. Pourtant, on n'observe que deux taches symétriques par rapport à  $O_y$  (Fig.4.2b). Cela met en évidence la quantification du moment magnétique et donc du moment cinétique (nota : le facteur gyromagnétique ici est négatif, attention au sens de déviation!).

Le moment magnétique ne peut prendre que deux valeurs  $\mu_z = \pm\mu_0$ , or nous avons vu précédemment qu'un moment cinétique orbital était forcément quantifié par valeurs impaires. Cela peut s'interpréter en acceptant l'existence de moment cinétiques non orbitaux, intrinsèquement quantiques, dit de "spin". Ici, le moment cinétique de spin de l'électron de valence de l'atome d'argent est à l'origine du moment magnétique de ce dernier. Le moment cinétique ne peut prendre que deux valeurs  $s_z = \pm\hbar/2$  et on a donc  $\mu_0 = \hbar|\gamma_0|$  où  $\gamma_0$  est le facteur gyromagnétique d'un électron. Ce résultat est cohérent avec les valeurs mesurées de  $\mu_0$  et peut s'étendre aux autres espèces atomiques qui, elles, peuvent avoir des spins entiers ou demi-entiers de valeurs différentes qu' $1/2$ .

### 4.2.2 Formalisme du spin 1/2

#### Spin 1/2 et matrices de Pauli

[Basdevant Ch. 12]

Le spin est un degré de liberté sans équivalent classique (il ne peut pas correspondre à une rotation de la particule sur elle-même) des particules fondamentales (électron, positon, neutrinos, quarks sont des particules de spin 1/2). Nous nous intéressons au cas du spin 1/2 :  $j = 1/2, m = \pm 1/2$ . Par "spin", on entend tout moment cinétique intrinsèque (non orbital), il peut prendre toute valeur entière ou demi-entière.

On a déjà vu les règles s'appliquant à tout moment cinétique, y compris le spin 1/2. Les observables  $\{\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z\}$  suivent  $\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{S}} = i\hbar\hat{\mathbf{S}}$ . On peut choisir une base d'états de l'espace de Hilbert à deux dimensions  $\mathcal{E}_{spin} \{|+\rangle, |-\rangle\}$  diagonalisant  $\{\hat{\mathbf{S}}^2, \hat{S}_z\}$

$$\hat{\mathbf{S}}^2 |\pm\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |\pm\rangle, \hat{S}_z |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle .$$

À l'aide des relations de commutation des opérateurs de moments cinétiques on peut montrer que

$$\hat{S}_x |\pm\rangle = \frac{\hbar}{2} |\mp\rangle; \hat{S}_y |\pm\rangle = \pm \frac{i\hbar}{2} |\mp\rangle . \quad (4.21)$$

Ceci qui nous amène à la représentation matricielle

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; |\Sigma\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

avec  $|\Sigma\rangle$  un état quelconque et les matrices de Pauli

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

respectant  $\hat{\sigma} \times \hat{\sigma} = 2i\hat{\sigma}$  permettent de construire les observables  $\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}$ .

Un spin quelconque peut toujours être écrit

$$|\Sigma\rangle = e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) |+\rangle + e^{i\phi/2} \sin \theta/2 |-\rangle , \quad (4.24)$$

avec  $\theta \in [0, \pi]$  et  $\phi \in [0, 2\pi]$ .  $|\Sigma\rangle$  est vecteur propre de

$$\hat{S}_{\vec{u}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta)e^{i\phi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = \vec{u} \cdot \hat{\mathbf{S}}, \quad (4.25)$$

avec  $\vec{u}$  la direction données par l'angle polaire  $\theta$  et l'azimut  $\phi$ . Le vecteur  $\vec{u}$  trace alors se qu'on appelle la sphère de Bloch représentant les états purs du spin considéré.

#### Particule de spin 1/2 et produit tensoriel

[Basevant Ch.3 p. 121 et fin du Ch. 8]

Lorsqu'un système a  $N$  degrés de liberté, il peut être décrit par un espace de Hilbert  $\mathcal{E}$  produit tensoriel des  $N$  sous espaces propres associés à chaque ddl  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3 \dots$ . Par exemple, on résout des problèmes à plusieurs dimension en séparant les variables  $\psi(x, y, z) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$  (ce que l'on peut toujours faire a priori, ce qui ne veut pas forcément dire qu'on obtiendra trois problèmes découplés pour chaque dimension d'espace). On peut donc associer l'état de spin (décrit dans  $\mathcal{E}_{spin}$ ) d'une particule à son état relatif aux degrés de liberté spatiaux décrits dans  $\mathcal{E}_{externe}$

$$|\psi\rangle = |\psi_+\rangle \otimes |+\rangle + |\psi_-\rangle \otimes |-\rangle , \quad (4.26)$$

les observables agissant dans  $\mathcal{E}_{externe}$  et  $\mathcal{E}_{spin}$  "commutant" (par définition) puisque n'agissant pas dans le même espace

$$(A_{ext} \otimes B_{spin}) |\psi_+\rangle \otimes |+\rangle = A_{ext} |\psi_+\rangle \otimes B_{spin} |+\rangle . \quad (4.27)$$

On pourra adopter des notations hybrides

$$\psi_+(\vec{r}, t) |+\rangle + \psi_-(\vec{r}, t) |-\rangle ,$$

ou "à deux composantes"

$$\begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}, t) \\ \psi_-(\vec{r}, t) \end{pmatrix} .$$

### 4.2.3 Retour sur Stern et Gerlach : conséquences des règles de commutation

[Basdevant Ch. 8, Le Bellac Ch. 3 p. 86]

L'expérience de Stern et Gerlach telle qu'elle a été décrite ci-dessus permet de séparer spatialement les atomes dans un état  $|+\rangle$  de ceux dans un état  $|-\rangle$ . Plus précisément, replacé dans une description de mécanique quantique, un atome arrivant sur le dispositif de S&G est dans un état indéterminée  $|\mu\rangle = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle$  et le dispositif effectue une mesure

$$\hat{\mu}_z = \mu_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

et à l'issue de cette mesure l'atome est projeté soit dans l'état  $|+\rangle$  soit  $|-\rangle$ . Ces deux états étant séparés spatialement on peut les sélectionner.

**1** - Un premier point important est que si l'on place un deuxième système de S&G, d'axe de champ magnétique parallèle au premier, sur le trajet du faisceau contenant les atomes dans l'état  $|+\rangle$ , on n'obtiendrait en sortie qu'un seul faisceau puisque tous les atomes sont avec une probabilité 1 dans l'état  $|+\rangle$ . C'est une conséquence du postulat de réduction du paquet d'onde. Ici, on ne tient pas compte de la complication expérimentale due à la déviation du faisceau qui change la directions de l'axe "z". En pratique, on peut utiliser des filtres de S&G, constitués de 3 dispositifs de S&G successifs permettant de sélectionner un état  $|+\rangle$  (ou  $|-\rangle$ ) tout en gardant un faisceau unidirectionnel.

**2** - Plaçons nous maintenant dans le cas où nous aurions sélectionné un faisceau d'atomes d'argent dans l'état  $|+\rangle$  grâce à un premier dispositif de S&G et utilisons ce faisceau comme faisceau incident. Plaçons alors un dispositif de S&G orienté selon  $x$  sur le trajet du faisceau. Celui-ci effectue une mesure de

$$\hat{\mu}_x = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (4.28)$$

puisque'on a vu plus haut que la mesure de moment cinétique selon  $x$  est donnée par

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (4.29)$$

dans la base  $|\pm\rangle$ . Pour comprendre ce que l'on obtient en sortie du dispositif, il est utile de considérer les états propres de  $\hat{\mu}_x$

$$\begin{aligned} |+\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) , \\ |-\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Ainsi on voit que

$$\hat{\mu}_x |+\rangle = \mu_0 |-\rangle = \mu_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_x + |-\rangle_x) , \quad (4.31)$$

et on voit qu'en sortie du dispositif on obtiendra deux jets atomiques de même intensité contenant des atomes dans l'état  $|+\rangle_x$  pour l'un et  $|-\rangle_x$  pour l'autre. (Rq : on aurait aussi pu considérer une mesure dans une direction quelconque avec  $\hat{\mu}_\theta = \sin(\theta)\hat{\mu}_x + \cos(\theta)\hat{\mu}_z$ .)

On voit alors que les mesures selon  $z$  et  $x$  sont incompatibles. En suivant le protocole **1**, on obtient avec certitude une mesure de moment magnétique des atomes de  $+\mu_0$ . Alors qu'en suivant le protocole **2** on obtient avec une distribution égale de  $+\mu_0$  et  $-\mu_0$ . La non commutativité des observables modifie en profondeur la notion de mesure en mécanique quantique par rapport à la logique classique. Le tri effectué selon  $z$  par le premier dispositif de S&G n'a plus aucun sens si on effectue un second tri selon  $x$ .

**Rq :** Ici nous nous sommes contentés de regarder l'effet d'un dispositif de S&G sur le moment magnétique et implicitement considéré que les atomes étaient déviés en fonction de la valeur de leur moment selon l'axe du champ magnétique. Cela a besoin d'être explicité, ce qui est fait en détaille dans le [Basdevant Ch. 8] où le produit tensoriel présenté plus haut est utilisé pour décrire à la fois les ddl de spin et de position des atomes. Une conclusion de cette approche explicite est qu'une mesure en mécanique quantique ne peut pas être instantanée et nécessite une extension spatiale. On y trouve aussi une construction des matrices de Pauli en montrant que seules celles-ci sont adaptées à décrire l'expérience de S&G.

### 4.3 Précession et résonance magnétique

[Basdevant Ch. 12, Ch. 10 p 219, Le Bellac Ch. 4 p.129]

#### 4.3.1 Précession d'un moment magnétique dans un champ magnétique constant

La relation  $\vec{\mu} = \gamma \vec{J}$  a une conséquence d'une grande importance, qui confirme sa validité. Le théorème du moment cinétique nous donne

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\vec{\Gamma} , \quad (4.32)$$

ce qui, pour un moment magnétique dans un champ magnétique  $\vec{B}$  donne

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\gamma \vec{B} \times \vec{\mu} . \quad (4.33)$$

Un moment ne va donc pas s'aligner avec le champ magnétique mais précesser autour de celui-ci. Au niveau quantique, ce phénomène de *précession de Larmor* s'écrit à l'aide du théorème d'Ehrenfest

$$\frac{d\langle \vec{\mu} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\vec{\mu}, H_M] \rangle , \quad (4.34)$$

où

$$H_M = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\frac{1}{i\hbar\gamma} (\vec{\mu} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{B} ,$$

ce qui donne

$$\frac{d\langle \vec{\mu} \rangle}{dt} = -\gamma \vec{B} \times \langle \vec{\mu} \rangle . \quad (4.35)$$

Le phénomène de précession de Larmor permet une mesure du facteur gyromagnétique : électron  $\gamma_e = \frac{-e}{m_e}$ , proton  $\gamma_p = \frac{5.59e}{2m_p}$ , neutron  $\gamma_n = \frac{-3.83e}{2m_p}$ . De plus, il confirme que par une mesure de moment magnétique on peut remonter au moment cinétique. (Rq : il existe des méthodes de mesure du moment cinétique indépendantes du moment magnétique).

Choisissons un champ  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  de telle sorte que le Hamiltonien devient pour un spin 1/2

$$H_M = -\mu_0 B_0 \hat{\sigma}_z , \quad (4.36)$$