Chapitre 5
Travaux Dirigés

5.1 Moment cinétique : commutation et valeurs propres

1 - Démontrez les relations de commutations d'un moment cinétique $\hat{\mathbf{L}} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{L}} = i\hbar\hat{\mathbf{L}} \ .$$

2 - a. Montrez que pour tout moment $\hat{\mathbf{J}}$ respectant les règles de commutation démontrées en 1., $\hat{\mathbf{J}}_\pm = \hat{\mathbf{J}}_x \pm i\hat{\mathbf{J}}_y$ commutent avec $\hat{\mathbf{J}}^2$ et que $[\hat{\mathbf{J}}_z, \hat{\mathbf{J}}_\pm] = \pm\hbar\hat{\mathbf{J}}_\pm$.

2 - b. En considérant les vecteurs propres $|j, m\rangle$ de $\{\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathbf{J}}_z\}$, montrez que

$$\hat{\mathbf{J}}_\pm |j, m\rangle \propto |j, m \pm 1\rangle \ .$$

2- c. En utilisant la propriété $||\hat{\mathbf{J}}_\pm |j, m\rangle||^2 \geq 0$, montrez que

$$-j \leq m \leq j \ .$$

2- d. Conclure sur le caractère entier ou demi-entier des valeurs propres $\{\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathbf{J}}_z\}$.

3 - Considérons un spin 1/2. Quelles sont les actions de $\hat{S}_x$ et $\hat{S}_y$ sur les vecteurs propres $|\pm\rangle$ de $\hat{S}^2$ et $\hat{S}_z$? Exprimez les vecteurs propre de $\hat{S}_x$ et $\hat{S}_y$ dans la base des vecteurs propres $|\pm\rangle$.

5.2 Oscillateur harmonique quantique : opérateur création/annihilation

On connait bien le potentiel harmonique $V(x) = \frac{1}{2}Kx^2$. Le problème classique nous permet d'anticiper l'existence d'une pulsation caractéristique $\omega = \sqrt{K/m}$ et donc

$$\hat{V}(x) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \ .$$

C'est un potentiel qui permet de décrire de nombreuses situations physiques puisqu'il est une approximation simple d'un potentiel confinant. On a déjà mentionné le corps noir comme application de l'OH mais on peut aussi mentionner la physique moléculaire (vibrations d'une molécule diatomique par exemple) ou la dépendance en température de la capacité calorifique d'un solide...

L'équation aux valeurs propres est

$$\hat{H} |\phi(x)\rangle = E |\phi(x)\rangle \ ,$$

avec

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \ .$$

1 - Réécrivez le Hamiltonien en utilisant $\hat{X} = \hat{x}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ et $\hat{P} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}}$ et montrez que

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i \ .$$

2 - On pose

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}) \ , \ \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}) \ .$$

Montrez que

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \ ,$$

et que, en posant $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ l'opérateur "nombre",

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \ , \ [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \ ,$$

et que

$$\hat{H} = \hat{N} + 1/2 \ .$$

3 - a - Montrez que les valeurs propres ν de $\hat{N}$ (associée à $|\phi_\nu\rangle$) sont positives ou nulles.

3 - b - Montrez que $\hat{a}\,|\phi_\nu\rangle$ est un vecteur propre de $\hat{N}$ de valeur propre $\nu - 1$ et $\hat{a}^\dagger\,|\phi_\nu\rangle$ de valeur propre $\nu + 1$.

3 - c - En utilisant $||\hat{a}\,|\phi_\nu\rangle\,||^2 = \nu||\,|\phi_\nu\rangle\,||^2$ et les relations précédentes, montrez que les valeurs propres ν sont des entiers et donc que les niveaux d'énergie de l'OH sont $\hbar\omega(n + 1/2)$ où n est un entier positif ou nul.

4 - a - L'état fondamental $|\phi_0\rangle$ respecte $\hat{a}\,|\phi_0\rangle = 0$ d'où, en terme de fonction d'onde

$$\left(\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\phi_0(x) = 0 \ .$$

Résolvez cette équation.

4 - b - On renomme $|0\rangle$ l'état $|\phi_0\rangle$ puisque c'est le vecteur propre de $\hat{N}$ de valeur propre 0. Comment peut-on construire l'ensemble des vecteurs propres $|n\rangle$ du problème à partir de $|0\rangle$?

4 - c - Exprimez $\phi_n(x)$ en fonction de $\phi_0(x)$ pour tout n. Comment appelle-t-on les polynômes ainsi générés ?

5.3 Forme de la fonction d'onde d'une particule dans un double puits potentiel

On cherche la forme de la fonction d'onde d'une particule dans un double puits de potentiel représenté en pointillés en figure 5.1.

1- Comment une particule classique se comporterait dans un tel potentiel ? Quelle différence pour une particule quantique ?

2- Trouvez les états stationnaires de ce problème dans le cas $E < V_0$. Montrez qu'il existe des solutions symétriques et antisymétriques et esquissez la forme des deux solutions de plus basse énergie χ_+ (symétrique) et χ_- (antisymétrique).

Dans le cas $E \ll V_0$ et $\Delta \ll 1/\kappa$ où $1/\kappa$ est la longueur typique de pénétration de la fonction d'onde dans la barrière, on peut montrer par une résolution graphique que

$$E_- - E_+ \equiv 2A \approx \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\frac{4e^{-\kappa\Delta}}{\kappa a} \ .$$

3 - On peut construire les états $\psi_G = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+ - \chi_-)$ et $\psi_D = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+ + \chi_-)$ dans lesquels la particule est localisée dans le puits de gauche (ψ_G) ou de droite (ψ_D). Comment évolue un système initialement préparé dans l'état ψ_D ? On fera apparaitre la fréquence de Bohr $\hbar\omega = E_- - E_+$.

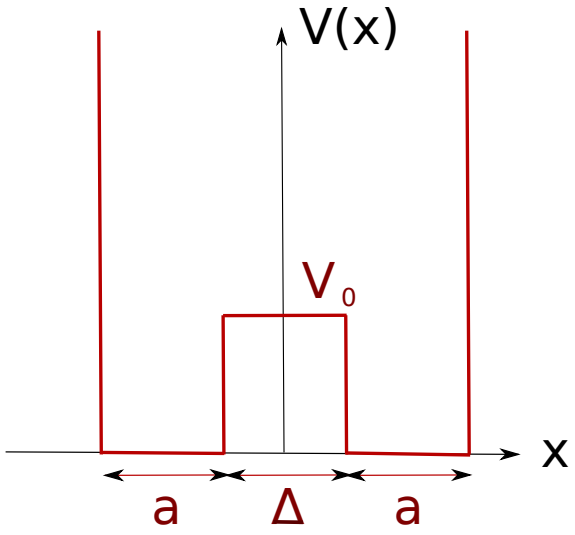

FIGURE 5.1 – Double puits de potentiel.

5.4 Principe de correspondance et commutations canoniques

1 - En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier (TF) et en exprimant la valeur moyenne de l'impulsion pour une fonction d'onde $\phi(\vec{p}) = \mathrm{TF}(\psi(\vec{r}))$ justifiez que le principe d'équivalence amène à ce que l'opérateur impulsion $\hat{P}$ corresponde dans l'espace des positions à $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$. On pourra utiliser le théorème de Parceval-Plancherel énonçant :

$$\int f_1^*(\vec{r}) f_2(\vec{r}) \mathrm{d}^3\vec{r} = \int g_1^*(\vec{p}) g_2(\vec{p}) \mathrm{d}^3\vec{p}\,,$$

avec g_1 la TF de f_1 et g_2 celle de f_2.

2 - Établissez les relations de commutation canoniques pour $[\hat{x}, \hat{p_x}]$ et $[\hat{y}, \hat{p_x}]$.

5.5 Solutions

Moment cinétique : commutation et valeurs propres

[Basdevant Ch. 10 et p. 251]

Oscillateur harmonique quantique : opérateur création/annihilation

[Basdevant p.81] et lien avec opérateurs création/annihilation [Basdevant Ch. 7 p.164].

Forme de la fonction d'onde d'une particule dans un double puits potentiel

[Basdevant Ch. 4 p. 96]

Principe de correspondance et commutations canoniques

1 - [Basdevant Ch. 2 p. 45 et Ch. 3 p. 83]

2 - [Basdevant Ch. 3 p. 60]