

I. LIMITE DU MODÈLE DE J. J. THOMSON À TRAVERS L'EXPÉRIENCE DE E. RUTHERFORD

1 Si les électrons de charge négative sont répartis dans une sphère uniformément chargée positivement, la force électrostatique ressentie par les particules α est nulle car la sphère totale modélisant l'atome d'or est globalement neutre. Avec cette modélisation, les particules α ne sont pas déviées et il est impossible de comprendre pourquoi certaines « rebondissent » sur les atomes.

2 La force de Coulomb exercée sur la particule α par le noyau d'or est

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e \times Ze}{d^2} \vec{e}_r = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 d^2} \vec{e}_r$$

Par définition, la force électrostatique, conservative, est reliée au gradient d'énergie potentielle E_p par la relation

$$-\frac{dE_p}{dd} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 d^2}$$

En intégrant cette équation, il vient

$$E_p(+\infty) - E_p(d) = -\frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0} \int_d^{+\infty} \frac{dd}{d^2} = -\frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 d}$$

En prenant l'infini comme origine de l'énergie potentielle, on obtient

$$E_p = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 d}$$

En posant $K = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0}$, les deux expressions précédentes deviennent

$$\vec{F} = \frac{K}{d^2} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad E_p(d) = \frac{K}{d}$$

Puisque \vec{F} est la seule force qui s'exerce sur la particule α , son énergie mécanique totale E_M est conservative. La force électrostatique \vec{F} étant centrale, le moment cinétique \vec{L}_O est constant.

3 L'énergie mécanique étant constante, elle peut être évaluée à l'instant initial au point M_0 situé à l'infini. Ainsi

$$E_M = E_c(M_0) + E_p(M_0) = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2 + 0$$

d'où

$$E_M = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$$

4 Le moment cinétique \vec{L}_O étant constant, il peut être évalué à l'instant initial au point M_0 situé à l'infini. Ainsi

$$\vec{L}_O = \vec{OM}_0 \wedge m_\alpha \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} X \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} m_\alpha v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul du produit vectoriel donne

$$\vec{L}_O = -b m_\alpha v_0 \vec{e}_z$$

5 Le moment cinétique \vec{L}_O en un point M quelconque, dans la base cylindrique, est

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m_\alpha \vec{v}_M = m_\alpha \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{d} \\ d\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après calcul du produit vectoriel, on obtient

$$\vec{L}_O = m_\alpha d^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

En égalant cette expression avec celle obtenue à la question 5, on a

$$d^2 \dot{\theta} = -b v_0$$

6 La conservation de l'énergie mécanique entre un point M quelconque et le point M_0 implique que

$$\frac{1}{2} m_\alpha (\dot{d}^2 + d^2 \dot{\theta}^2) + \frac{K}{d} = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$$

Au niveau du sommet S de la trajectoire, la vitesse est perpendiculaire au vecteur \vec{OS} et par conséquent elle est uniquement orthoradiale. On en déduit que $\dot{d}_m = 0$ et

$$\frac{1}{2} m_\alpha d_m^2 \dot{\theta}_m^2 + \frac{K}{d_m} = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$$

De plus, la conservation du moment cinétique entre les points S et M_0 donne

$$m_\alpha d_m^2 \dot{\theta}_m = -b m_\alpha v_0$$

Ainsi, la vitesse angulaire en S vaut

$$\dot{\theta}_m = -\frac{b v_0}{d_m^2}$$

En remplaçant la vitesse angulaire dans l'équation de conservation de l'énergie mécanique, on obtient

$$\frac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{b v_0}{d_m}\right)^2 + \frac{K}{d_m} = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_0^2 d_m^2 - K d_m - \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2 b^2 = 0$$

d'où

$$d_m^2 - \frac{2K}{m_\alpha v_0^2} d_m - b^2 = 0$$

Le discriminant Δ de ce polynôme du second degré

$$\Delta = \frac{4K^2}{m_\alpha^2 v_0^4} + 4b^2 = \frac{4K^2}{m_\alpha^2 v_0^4} \left(1 + \frac{b^2 m_\alpha^2 v_0^4}{K^2}\right)$$

est strictement positif. L'équation admet donc deux solutions réelles. En ne gardant que la racine positive, on aboutit à

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{b^2 m_\alpha^2 v_0^4}{K^2}}\right)$$

7 L'application du principe fondamental de la dynamique à la particule α assimilée à un point matériel dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen donne

$$m_\alpha \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{K}{d^2} \vec{e}_r$$

En multipliant scalairement par le vecteur \vec{e}_x , il vient

$$m_\alpha \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e}_x = \frac{K}{d^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x = \frac{K}{d^2} \cos(\theta)$$

Ainsi

$$m_\alpha \frac{dv_x}{dt} = \frac{K}{d^2} \cos(\theta)$$

D'après la question 5, la conservation du moment cinétique implique que

$$d^2 \dot{\theta} = -b v_0$$

d'où

$$m_\alpha \frac{dv_x}{dt} = -\frac{K}{b v_0} \cos(\theta) \dot{\theta}$$

En intégrant cette équation entre $t = 0$ et $t = \infty$, c'est-à-dire entre $\theta = \pi$ et $\theta = \varphi$, il vient

$$\int_{v_x(\pi)}^{v_x(\varphi)} dv_x = -\frac{K}{m_\alpha b v_0} \int_{\pi}^{\varphi} \cos(\theta) d\theta$$

Ainsi

$$v_x(\varphi) - v_x(\pi) = -\frac{K}{m_\alpha b v_0} \sin(\varphi)$$

Sachant que $v_x(\pi) = v_0$ et $v_x(\varphi) = v_\infty \cos(\varphi)$, on en déduit que

$$v_\infty \cos(\varphi) - v_0 = -\frac{K}{m_\alpha b v_0} \sin(\varphi)$$

Or, la conservation de l'énergie mécanique entre $t = 0$ et $t = \infty$ donne

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\infty^2 = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$$

Par conséquent

$$v_\infty = v_0$$

Enfin, en utilisant les formules données dans l'énoncé, on aboutit à

$$v_0 (\cos(\varphi) - 1) = -\frac{2K}{m_\alpha b v_0} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

soit

$$-2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{2K}{m_\alpha b v_0^2} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Après simplification et en utilisant la définition de la fonction tangente, on a

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{K}{m_\alpha b v_0^2}$$

8 Les particules α rebondissent sur le noyau si l'angle de déviation φ est supérieur à $\pi/2$. Ainsi, les particules peuvent repartir en arrière si

$$b < \frac{K}{m_\alpha v_0^2}$$

À partir de la condition précédente, l'effet n'a lieu que si les particules α sont « assez proches » du noyau d'or.

9 En injectant l'expression de b^2 déduite du résultat de la question 7 dans la solution obtenue à la question 6, il vient

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}} \right)$$

En utilisant la définition de la fonction tangente, on a

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}} \right) = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}} \right)$$

d'où

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right)$$

10 Entre 0 et π , la fonction $\sin(\varphi/2)$ est croissante et son inverse est donc décroissante. Les constantes m_α , v_0^2 et K étant positives, on en déduit que la distance d'approche est également une fonction décroissante entre 0 et π . Le minimum de cette distance est atteint en $\varphi = \varphi_m = \pi$ et vaut

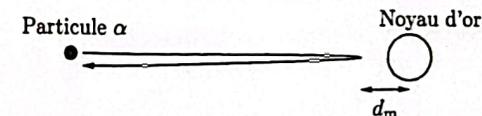
$$d_m(\pi) = \frac{2K}{m_\alpha v_0^2}$$

Pour éviter toute confusion, il aurait été plus judicieux d'utiliser une autre notation que d_m pour le minimum de la distance minimale d'approche. Par exemple, on aurait pu prendre $d_{m,\min}$.

11 Si $\varphi = \varphi_m = \pi$, on déduit d'après la question 7 que

$$b = 0$$

Dans ce cas, la trajectoire de la particule α est d'abord rectiligne orientée vers le noyau. Ensuite, comme on peut le voir ci-dessous, elle fait demi-tour lorsque $d = d_m$.



D'après la question 2, sachant que l'énergie potentielle électrostatique E_p varie comme l'inverse de la distance au noyau d , il faudrait une énergie cinétique initiale infinie pour que la particule α touche le noyau d'or. Par conséquent, la particule α , qui ne peut pénétrer le noyau, ne peut atteindre celui-ci et d_m est une borne supérieure de son rayon, avec numériquement

$$d_m = \frac{K}{E_c(M_0)} = 5 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$

12 D'après la question 11, la distance minimale d'approche est inversement proportionnelle à l'énergie cinétique initiale. Par conséquent, pour sonder la matière, c'est-à-dire pour s'approcher le plus près possible du noyau, les particules envoyées doivent avoir une énergie importante. Ainsi, pour effectuer des expériences de physique nucléaire, il faut disposer de particules à haute énergie cinétique.

13 Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron supposé ponctuel dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen donne

$$m_e \vec{a} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \vec{e}_r$$

Or, pour un mouvement circulaire uniforme de rayon r , l'accélération et la vitesse ont pour expression en coordonnées polaires

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2 \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

En projetant sur le vecteur \vec{e}_r , on obtient

$$\dot{\theta}^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}$$

d'où

$$\vec{v} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}} \vec{e}_\theta$$

14 L'énergie mécanique E_M de l'électron est la somme de ses énergies cinétique E_c et potentielle électrostatique E_p . Par conséquent

$$E_M(r) = E_c(r) + E_p(r)$$

En utilisant la même méthode que celle utilisée dans la question 2 pour calculer l'énergie potentielle, on en déduit que

$$\begin{aligned} E_M(r) &= \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &= \frac{1}{2} m_e \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r} \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \\ E_M(r) &= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

Finalement, l'énergie mécanique s'écrit sous la forme

$$E_M(r) = A f(r) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \\ f(r) = \frac{1}{r} \end{cases}$$

15 En utilisant la vitesse angulaire de l'électron $\omega = \dot{\theta}$ obtenue dans la question 13, la puissance moyenne rayonnée s'écrit

$$P(r) = \left(\frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 m_e^2 r^6} \right) \frac{e^2 r^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^6}{192\pi^3 \epsilon_0^3 m_e^2 c^3 r^4}$$

soit

$$P(r) = \frac{P_0}{r^4} \quad \text{avec} \quad P_0 = \frac{e^6}{192\pi^3 \epsilon_0^3 m_e^2 c^3}$$

La constante P_0 s'exprime en W.m^4 . L'électron étant décéléré, il perd de l'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique et, par conséquent, le rayon de la trajectoire diminue au cours du temps.

16 D'après le théorème de la puissance mécanique appliqué à l'électron

$$\frac{dE_M}{dt} = P_{nc}$$

où P_{nc} est la puissance des forces non conservatives. Sachant que la seule force non conservative qui s'applique sur l'électron est la force de pression de radiation dont la puissance est $-P(r)$, on en déduit que

$$\frac{dE_M(r)}{dt} = -P(r)$$

En utilisant l'expression de l'énergie mécanique obtenue dans la question 14, il vient

$$\frac{d(A/r)}{dt} = -\frac{A}{r^2} \frac{dr}{dt} = -P(r) = -\frac{P_0}{r^4}$$

Finalement

$$r^2 \frac{dr}{dt} = \frac{P_0}{A}$$

La constante A étant négative, on retrouve bien le résultat de la question précédente car le rayon de la trajectoire diminue au cours du temps.

17 Après avoir séparé les variables, on obtient en intégrant la relation précédente

$$\int_R^0 r^2 dr = \frac{P_0}{A} \int_0^{t_f} dt \quad \text{soit} \quad \left[\frac{r^3}{3} \right]_R^0 = \frac{P_0}{A} t_f$$

Le temps t_f mis par l'électron pour atteindre le noyau est alors

$$t_f = -\frac{A R^3}{3 P_0} = 2,1 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

Pour l'application numérique, les valeurs de A et P_0 sont

$$A = -1,1 \cdot 10^{-28} \text{ J.m} \quad \text{et} \quad P_0 = 1,8 \cdot 10^{-49} \text{ W.m}^4$$

Le temps est très petit et l'électron devrait atteindre le noyau quasi instantanément. Par conséquent, aucun atome ne serait stable et la matière ne pourrait pas exister avec ce modèle classique.

III. POSTULATS DE N. BOHR

18 Sur une orbite de rayon r , le moment cinétique L de l'électron vaut

$$L = r m_e v = r m_e \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}} = \sqrt{\frac{r m_e e^2}{4\pi\epsilon_0}}$$

En utilisant la quantification du moment cinétique L , l'électron ne peut se trouver que sur certaines orbites de rayon r_n qui vérifient

$$L^2 = \frac{r_n m_e e^2}{4\pi\epsilon_0} = (n\hbar)^2 = n^2 \frac{\hbar^2}{4\pi^2}$$

d'où

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2}$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme

$$r_n = n^2 r_0 \quad \text{avec} \quad r_0 = \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

19 Si l'onde de matière interfère constructivement avec elle-même, la relation entre le périmètre \mathcal{P} et la longueur d'onde de de Broglie de l'électron est

$$\mathcal{P} = 2\pi r = n\lambda$$

De plus, la relation de de Broglie relie la quantité de mouvement de l'électron p à sa longueur d'onde λ selon

$$p = \frac{h}{\lambda} = n \frac{h}{2\pi r} = n \frac{h}{r}$$

En utilisant la définition de la quantité de mouvement et cette relation, il vient

$$p = m_e v = n \frac{h}{r}$$

La quantité de mouvement est donc quantifiée et on retrouve le postulat mécanique de Bohr puisque le moment cinétique L est lui aussi quantifié avec

$$L = r p = n\hbar$$

20 En utilisant le résultat obtenu à la question 18, l'énergie mécanique d'un électron se trouvant sur une orbite de rayon r_n vaut

$$E_M = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 \left(n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2}\right)} = -\frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}$$

Cette relation peut se mettre sous la forme

$$E_M = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^2} = 13,5 \text{ eV}$$

où E_0 représente l'énergie du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène.

21 L'électron, qui se désexcite en partant de l'orbite d'énergie E_i , de nombre quantique n_i et qui finit sur l'orbite d'énergie E_f et de nombre quantique n_f , émet un photon de longueur d'onde λ et d'énergie hc/λ . Par conséquent

$$E_i - E_f = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{c'est-à-dire} \quad -\frac{E_0}{n_i^2} + \frac{E_0}{n_f^2} = \frac{hc}{\lambda}$$

On peut alors écrire la relation précédente sous la forme

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad \text{avec} \quad R_H = \frac{E_0}{hc} = 1,1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

22 Les longueurs d'onde émises étant légèrement inférieures à 400 nm, elles appartiennent au domaine de l'ultraviolet. À partir des valeurs expérimentales, on peut déduire la valeur de la constante de Rydberg par la relation

$$R_H = \frac{n_f^2 n_i^2}{n_i^2 - n_f^2} \frac{1}{\lambda} = \frac{n_i^2}{n_i^2 - 1} \frac{1}{\lambda}$$

car $n_f = 1$, l'électron étant revenu sur la couche K. On peut dresser le tableau suivant :

Niveau n_i	λ (nm)	R_H (m^{-1})
2	121,5	$1,097 \cdot 10^7$
3	102,5	$1,098 \cdot 10^7$
4	97,2	$1,097 \cdot 10^7$

La valeur moyenne de la constante de Rydberg est

$$R_H = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Le bon accord entre la prédiction théorique de la question 21 et les mesures expérimentales faites ci-dessus valide le modèle et les postulats de Bohr.

IV. EXPÉRIENCE DE O. STERN ET W. GERLACH

23 Le moment magnétique \vec{m} est par définition

$$\vec{m} = I S \vec{e}_z$$

où S est la surface de la boucle de courant et I l'intensité du courant qui circule dans cette dernière. Sachant que $S = \pi r^2$ et $I = -e/T$ où T est le temps mis par l'électron pour faire un tour sur la boucle, on en déduit que

$$\vec{m} = -\frac{e}{T} \pi r^2 \vec{e}_z$$

Enfin, la vitesse v de l'électron sur la boucle vaut

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

d'où

$$\vec{m} = -\frac{e}{2} r v \vec{e}_z$$

De plus, le moment cinétique orbital \vec{L} de l'électron sur la boucle par rapport au point C vaut

$$\vec{L} = \vec{CM} \wedge m_e \vec{v} = m_e \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m_e r v \vec{e}_z$$

Des deux dernières équations, il vient

$$\vec{m} = -\frac{e}{2} \frac{\vec{L}}{m_e}$$

c'est-à-dire

$$\vec{m} = \gamma_e \vec{L} \quad \text{avec} \quad \gamma_e = -\frac{e}{2m_e}$$

24 Le théorème du moment cinétique appliqué à l'électron par rapport au point C donne

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma}(C) = \vec{m} \wedge \vec{B}(C)$$

En utilisant la relation obtenue entre le moment magnétique et le moment cinétique dans la question 23, on a

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma_e \vec{m} \wedge \vec{B}(C)$$

En faisant le produit scalaire de cette relation avec le moment magnétique \vec{m} , on a

$$\frac{d\vec{m}}{dt} \cdot \vec{m} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{m} \cdot \vec{m} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\vec{m}\|^2 \right) = \gamma_e (\vec{m} \wedge \vec{B}(C)) \cdot \vec{m}$$

Le vecteur résultant du produit vectoriel est perpendiculaire au moment magnétique \vec{m} . Ainsi, $(\vec{m} \wedge \vec{B}(C)) \cdot \vec{m}$ est nul et par conséquent $\|\vec{m}\|$ est une constante indépendante du temps. De la même manière, en faisant le produit scalaire du théorème du moment cinétique avec \vec{e}_z , il vient

$$\frac{d\vec{m}}{dt} \cdot \vec{e}_z = \frac{dm_z}{dt} = \gamma_e (\vec{m} \wedge \vec{B}(C)) \cdot \vec{e}_z$$

Le vecteur résultant du produit vectoriel est perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}(C)$ (donc à \vec{e}_z). Ainsi $(\vec{m} \wedge \vec{B}(C)) \cdot \vec{e}_z$ est nul et par conséquent m_z est une constante indépendante du temps.

25 Dans la question 24, on a vu que le moment magnétique \vec{m} vérifie l'équation

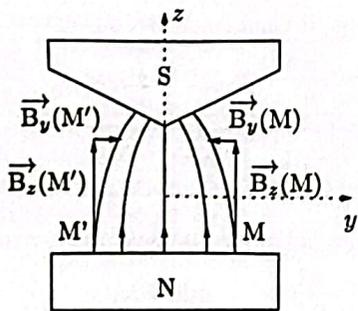
$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma_e \vec{m} \wedge \vec{B}(C) = -\gamma_e \vec{B}(C) \wedge \vec{m} = -\gamma_e B \vec{e}_z \wedge \vec{m}$$

Par analogie avec l'équation fournie dans l'énoncé, le moment magnétique tourne (ou précesse) autour de l'axe \vec{e}_z à la vitesse angulaire (ou pulsation)

$$\vec{\Omega}_L = \Omega_L \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \Omega_L = -\gamma_e B = \frac{eB}{2m_e}$$

26 Il faut qu'une force \vec{F} s'exerce sur les atomes pour qu'ils soient déviés. Or, dans cette expérience, celle-ci est proportionnelle au gradient du champ magnétique \vec{B} . Ainsi, le champ doit être inhomogène pour qu'elle apparaisse; sinon, si le champ est homogène, il n'y a pas de force et les atomes ne sont pas déviés.

27 Comme on peut le voir sur le schéma ci-dessous, les lignes de champ sont quasiment verticales ce qui signifie que la composante B_z du champ magnétique selon z en un point M quelconque est intense.



De plus, la composante B_y du champ magnétique selon y est bien moins élevée car la courbure des lignes de champ est faible. De plus, si M' est le symétrique du point M par rapport à l'axe (Oz) , on a

$$\begin{cases} B_z(-y, z) = B_z(y, z) \\ B_y(-y, z) = -B_y(y, z) \end{cases}$$

On en déduit que B_z est une fonction paire. Enfin, en évaluant la relation précédente en $y = 0$, on obtient $2B_y(0, z) = 0$. Ainsi

$$B_y(0, z) = 0$$

28 Dans le vide, les équations de Maxwell sont

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Puisque le champ électromagnétique ne dépend pas du temps, l'équation de Maxwell-Ampère devient

$$\text{rot } \vec{B} = 0$$

Or, le champ magnétique, qui ne dépend que des variables y et z , n'est porté que par les axes (Oy) et (Oz) . Ainsi

$$\text{rot } \vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x$$

d'où

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial z}$$

En particulier en $y = 0$ et en utilisant la relation donnée dans l'énoncé

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial z} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

29 La force exercée sur les atomes a pour expression

$$\vec{F}(y, z) = (\vec{m} \cdot \text{grad}) \vec{B} = m_y \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \right) + m_z \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \right)$$

d'où

$$\vec{F}(y, z) = m_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial B_z}{\partial y} \vec{u}_z \right) + m_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} \vec{u}_y + \frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{u}_z \right)$$

Dans l'énoncé, les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x}$ sont implicitement négligées.

En particulier en $y = 0$, il vient, en utilisant les résultats de la question 28,

$$\vec{F}(y = 0, z) = m_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \right)_{y=0,z} \vec{u}_y + m_z \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_{y=0,z} \vec{u}_z$$

30 La force moyenne ressentie par les atomes d'argent lors du passage dans l'entrefer correspond à la valeur moyenne temporelle de la force calculée à la question 29 pendant $T = 6 \mu s$. Ainsi

$$\vec{F}(y = 0, z) = \left\langle m_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \right)_{y=0,z} \vec{u}_y + m_z \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_{y=0,z} \vec{u}_z \right\rangle_T$$

et

$$\vec{F}(y = 0, z) = \left\langle m_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \right)_{y=0,z} \vec{u}_y \right\rangle_T + \left\langle m_z \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_{y=0,z} \vec{u}_z \right\rangle_T$$

où $\langle \rangle_T$ représente l'opérateur valeur moyenne sur la période de durée T . Sachant que le champ magnétique est indépendant du temps, la force devient

$$\vec{F}(y = 0, z) = \langle m_y \rangle_T \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \right)_{y=0,z} \vec{u}_y + \langle m_z \rangle_T \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_{y=0,z} \vec{u}_z$$

Or, d'après la question 24, la composante du moment magnétique selon z est indépendante du temps, donc $\langle m_z \rangle_T = m_z$. Enfin, lors du passage dans l'entrefer, le moment magnétique a beaucoup précessé puisque le nombre de tours N qu'il a effectué est

$$N = \frac{T \Omega_L}{2\pi} = 83950$$

Cette valeur est très grande et par conséquent la valeur moyenne de la composante du moment magnétique sur y (m_y)_T est nulle, donc

$$\vec{F}(y=0, z) = m_z \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_{y=0, z} \vec{u}_z$$

31 Les lignes de champ magnétique sont toujours orientées du pôle Nord (N) au pôle Sud (S) donc B_z est positif. Par ailleurs, comme on peut le voir sur le schéma de la question 27, la courbure des lignes de champ magnétique augmente avec y . Par conséquent, la composante $B_y(y, z)$ est une fonction décroissante avec y et

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \right) < 0$$

Puisque le champ magnétique est à divergence nulle, on en déduit que

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \right)$$

d'où
$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) > 0$$

Par conséquent, si la composante m_z du moment magnétique est positive, on en déduit que $m_z \partial B_z / \partial z$ est positive et la force est orientée vers le haut. Les atomes d'argent sont déviés vers le haut.

Cette démonstration est équivalente à la suivante : le champ magnétique étant à flux conservatif, on en déduit que dans un tube de courant le produit $B_z(y, z) S(z)$, où $S(z)$ est la surface du tube à une altitude z , est constant. La section $S(z)$ décroissant avec z , $B_z(y, z)$ croît avec z et

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) > 0$$

De la même manière, les lignes de champ se resserrant, on obtient la même conclusion que précédemment.

32 Les atomes d'argent ne passent pas tous exactement par l'axe (Ox). En revanche, la plupart d'entre eux passent par le plan (Oxz). Par suite, si le moment magnétique n'était pas quantifié, ils ressortiraient tous en étant déviés vers le haut et l'ensemble des valeurs de déviation serait continu. La trace laissée sur l'écran serait alors une mince ligne selon l'axe (Oz).

33 Le moment magnétique est donc quantifié et l'existence de deux faisceaux distincts permet de conclure à deux états possibles ; l'un haut et l'autre bas. Cette expérience met donc en évidence les deux spins possibles de l'électron.

La mécanique quantique prévoit d'ailleurs l'existence de trois valeurs possibles de m_z correspondant au triplet de nombres quantiques $\{-1, 0, 1\}$.

V. L'EFFET ZEEMAN NORMAL

34 La longueur d'onde λ_0 du photon émis entre le niveau $E_{2(0)}$ et le niveau E_1 vérifie la relation

$$\frac{hc}{\lambda_0} = E_{2(0)} - E_1$$

De la même manière, les longueurs d'onde λ_{\pm} des photons émis entre les niveaux d'énergie $E_{2(0)} \pm \mu_B B$ et E_1 valent

$$\frac{hc}{\lambda_{\pm}} = E_{2(0)} \pm \mu_B B - E_1$$

En faisant la soustraction entre ces deux dernières relations, on obtient

$$hc \left(\frac{1}{\lambda_{\pm}} - \frac{1}{\lambda_0} \right) = \pm \mu_B B$$

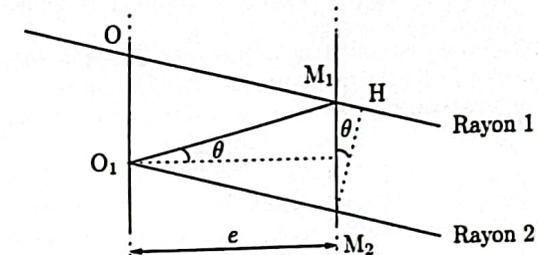
Puisque les niveaux d'énergie $E_{2(0)}$ et $E_{2(0)} \pm \mu_B B$ sont proches, on a $\lambda_0 \approx \lambda_{\pm}$ et

$$\frac{\lambda_0 - \lambda_{\pm}}{\lambda_0^2} = \pm \frac{\mu_B B}{hc}$$

Finalement, l'écart de longueur d'onde $\Delta \lambda = \lambda_0 - \lambda_{+} = \lambda_{-} - \lambda_0$ entre deux raies consécutives vaut

$$\Delta \lambda = \frac{\mu_B B \lambda_0^2}{hc} = 2,0 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 20 \text{ pm}$$

35 Considérons le schéma suivant :



La différence de marche δ entre les rayons 1 et 2 est

$$\delta = (M_1 M_2) - (M_1 H) = 2 (M_1 O_1) - (M_1 H)$$

Or,
$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{e}{(M_1 O_1)} \\ \sin(\theta) = \frac{(M_1 H)}{M_1 M_2} = \frac{(M_1 H)}{2e \tan(\theta)} \end{cases}$$

Ainsi, la différence de marche vaut

$$\delta = 2e \left(\frac{1}{\cos(\theta)} - \sin(\theta) \tan(\theta) \right) = 2e \left(\frac{1}{\cos(\theta)} - \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)} \right) = 2e \left(\frac{\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)} \right)$$

d'où

$$\delta = 2e \cos(\theta)$$

La différence de phase φ est alors

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{4\pi e}{\lambda} \cos(\theta)$$

36 Pour observer la figure d'interférence sur l'écran, il faut placer ce dernier dans le plan focal de la lentille. On observe alors sur l'écran des anneaux concentriques successivement sombres et clairs. Ces anneaux sont également appelés anneaux d'égalé inclinaison. Une figure d'interférence similaire peut être obtenue avec un interféromètre de Michelson configuré en lame d'air.

37 L'intensité est maximale lorsque les interférences sont constructives, c'est-à-dire

$$\varphi = p2\pi \quad \text{où } p \in \mathbb{Z}$$

38 Le coefficient de réflexion en amplitude r est relié au coefficient de réflexion en énergie R par la relation $R = |r|^2$. De la même manière, le coefficient de transmission en amplitude t est relié au coefficient de transmission en énergie T par la relation $T = |t|^2$. Le coefficient de finesse m vaut alors

$$m = \frac{4R}{T^2}$$

De plus, la conservation de l'énergie implique que

$$R + T = 1$$

Finalement, le coefficient de finesse a pour expression

$$m = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

Les relations $R = |r|^2$ et $T = |t|^2$ ne sont pas au programme.

39 D'après la relation vue à la question 38, plus le coefficient de réflexion en énergie R est important, plus la finesse m est grande. Par conséquent, les anneaux sont d'autant plus fins. L'association des courbes à la valeur de R est alors

R	m	Courbe
0,1	0,5	a
0,5	8	b
0,9	360	c

Pour observer des franges lumineuses fines sur fond obscur, il faut que le contraste soit maximal, c'est-à-dire que la différence entre les intensités lumineuses maximale et minimale soit la plus grande possible. En comparant les courbes, la courbe c est la plus favorable. Ainsi, il faut que $R = 0,9$.

L'étude de la fonction intensité I_{tot} montre qu'elle est minimale lorsque

$$\varphi = (2k + 1)\pi$$

Son minimum vaut alors

$$I_{\text{min}} = \frac{I_0}{1+m}$$

On en déduit que pour chaque courbe

Courbe	m	I_{min}/I_0
a	0,5	0,67
b	8	0,11
c	360	0,00

Ce tableau et l'étude des minima confirment la réponse apportée.

40 Dans la question 39, on a vu que plus le coefficient de réflexion en énergie R est grand, plus la finesse m est importante. Puisque

$$\Delta\varphi_{1/2} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} = \frac{4}{\sqrt{m}}$$

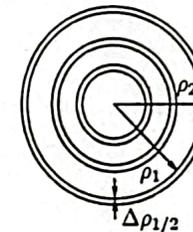
on en déduit que plus la finesse est importante, plus la largeur à mi-hauteur est petite.

41 La différence de marche au centre de la figure correspond à un angle d'incidence nul. Ainsi $\delta = 2e$. Or, cette différence de marche n'est pas forcément égale à un multiple entier de la longueur d'onde. Ainsi, l'ordre d'interférence p_0 au centre de la figure vaut

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda}$$

La valeur numérique de p_0 est a priori non entière et l'éclairement au centre des anneaux est donc quelconque.

42 Comme on peut le voir sur la figure ci-dessous, chacune des longueurs d'onde λ_1 et λ_2 produit sur l'écran son propre système d'anneaux concentriques.



Si on note ρ_1 le rayon d'un anneau brillant produit par la longueur d'onde λ_1 , et si on note ρ_2 le rayon de l'anneau brillant le plus proche du précédent produit par la longueur d'onde λ_2 , il est possible de les distinguer si

$$\rho_1 + \Delta\rho_{1/2} < \rho_2$$

c'est-à-dire si

$$\Delta\rho_{1/2} < |\rho_2 - \rho_1|$$

43 L'application numérique donne

$$\Delta\lambda_{\text{min}} = 0,7 \text{ pm}$$

Dans la question 34, le calcul de l'écart de longueur d'onde $\Delta\lambda$ entre les différents niveaux a donné

$$\Delta\lambda = 20 \text{ pm}$$

Cette valeur est très supérieure à la résolution minimale en longueur d'onde $\Delta\lambda_{\text{min}}$ de l'interféromètre de Fabry-Pérot. Il est donc possible d'observer l'effet Zeeman normal d'une lampe au cadmium.

VI. ORBITALES ATOMIQUES

44 À l'échelle microscopique, un système physique est décrit en mécanique quantique par une fonction a priori complexe dépendant de la position \vec{r} et du temps t appelée fonction d'onde.

45 La quantité $|\varphi(\vec{r})|^2$ représente la densité de probabilité de présence au point de position \vec{r} .

46 La probabilité élémentaire $d\mathcal{P}$ de trouver l'électron dans le volume $d\mathcal{V}$ est reliée à la fonction d'onde $\varphi_{1s}(\vec{r})$ par la relation

$$d\mathcal{P} = |\varphi_{1s}(\vec{r})|^2 d\mathcal{V}$$

Sachant que l'électron est sûr de se trouver quelque part dans l'espace \mathcal{V} , ceci implique que la probabilité totale est égale à 1. Ainsi

$$\iiint_{\mathcal{V}} d\mathcal{P} = 1$$

La normalisation de la fonction d'onde φ_{1s} vérifie alors la condition

$$\iiint_{\mathcal{V}} |\varphi_{1s}(\vec{r})|^2 d\mathcal{V} = 1$$

qui permet d'expliquer le préfacteur $1/\pi r_0^3$.

47 En régime stationnaire, la fonction d'onde φ_{1s} vérifie l'équation de Schrödinger. Ainsi, on peut écrire

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m_e} \Delta \varphi_{1s}(\vec{r}) - \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r} \varphi_{1s}(\vec{r}) = E_{1s} \varphi_{1s}(\vec{r})$$

Or,

$$\Delta \varphi_{1s}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(-\frac{r^2 e^{-r/r_0}}{r_0 \sqrt{\pi r_0^3}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{2}{r r_0} \right) \frac{e^{-r/r_0}}{\sqrt{\pi r_0^3}}$$

$$\Delta \varphi_{1s}(\vec{r}) = \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{2}{r r_0} \right) \varphi_{1s}(\vec{r})$$

En utilisant l'expression du rayon de Bohr trouvée à la question 18, on a alors

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m_e} \Delta \varphi_{1s}(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m_e} \left[\frac{1}{\left(\frac{\hbar^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} \right)^2} - \frac{2}{r \left(\frac{\hbar^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} \right)} \right] \varphi_{1s}(\vec{r})$$

Finalement il vient, en remplaçant le laplacien par la relation précédente dans l'équation de Schrödinger

$$\left[\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r} - \frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \right] \varphi_{1s}(\vec{r}) - \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r} \varphi_{1s}(\vec{r}) = E_{1s} \varphi_{1s}(\vec{r})$$

$$d'où \quad -\frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \varphi_{1s}(\vec{r}) = E_{1s} \varphi_{1s}(\vec{r})$$

soit

$$E_{1s} = -\frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 \hbar^2}$$

En comparant cette expression à celle obtenue à la question 20, on a

$$E_{1s} = -E_0$$

48 D'après la question 46, la probabilité élémentaire de trouver l'électron dans un volume $d\mathcal{V}$ en coordonnées sphériques est

$$d\mathcal{P} = |\varphi_{1s}(\vec{r})|^2 r^2 dr \sin(\theta) d\theta d\varphi$$

Ainsi, la probabilité élémentaire $d\mathcal{P}_r$ de trouver l'électron entre deux sphères de rayons r et $r + dr$ est

$$\begin{aligned} d\mathcal{P}_r &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\varphi_{1s}(\vec{r})|^2 r^2 dr \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ &= \frac{r^2}{\pi r_0^3} e^{-2r/r_0} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{r^2}{\pi r_0^3} e^{-2r/r_0} dr 4\pi \\ d\mathcal{P}_r &= \frac{4r^2}{r_0^3} e^{-2r/r_0} dr \end{aligned}$$

Finalement, la densité radiale de probabilité $P(r)$ vaut bien

$$P(r) = \frac{d\mathcal{P}_r}{dr} = \frac{4r^2}{r_0^3} e^{-2r/r_0}$$

49 La courbe représentant la densité radiale de probabilité $P(r)$ n'étant pas symétrique par rapport à son maximum situé au niveau du rayon de Bohr r_0 , la distance moyenne entre l'électron et le noyau (r) est différente de r_0 .

Les deux distances ne sont pas simplement différentes, l'asymétrie de la fonction implique même que $\langle r \rangle > r_0$.