

# Mécanique des fluides - M1

École Normale Supérieure de Lyon  
2011 - 2012

*Version du 26 Avril 2012*



## Avant-propos

Ce document est en bonne partie inspiré de mécanique des fluides donné en M1 de Physique en 2011-2012 à l'ENS de Lyon par Phillippe Odier mais également en complément du livre de Etienne Guyon, Jean- Pierre Hulin et Luc Petit - *Hydrodynamique physique* - CNRS Édition. On y discute les fluides, qui sont des systèmes où peuvent se manifester différents phénomènes en fonction du régime dans lequel on se place. Les équations que l'on peut établir sont extrêmement difficile à utiliser tel quel et il faut alors des hypothèses pour simplifier les équations et trouver la solution à notre problème.

On rappelle tout d'abord la cinématique et la dynamique des fluides en établissant toutes les équations de mouvement (chapitre 1 et 2). Afin de simplifier les équations nous utilisons par la suite une analyse dimensionnel (chapitre 3). On s'intéresse ensuite à une notion très importante dans les fluides qui est la vorticité (chapitre 4) Puis deux types particuliers d'écoulement sont étudiés (chapitre 5 et 6) : les écoulements parfaits et rampants. Enfin deux notions plus subtiles sont discutés (chapitre 7 et 8) qui sont la couche limite et les milieux stratifiés. Suivent diverses annexes. permettant notamment de dérouler les calculs.

Des erreurs de tous les types sont plus que probablement disséminées dans ce document. Il serait dangereux de le lire avec les yeux de la foi.

J'espère en tout cas que la rédaction est le plus clair possible ainsi que les notations. Je note juste le fait que lorsqu'un caractère est en gras c'est qu'il s'agit d'un vecteur et/ou possède une flèche au dessus.

JÉRÉMY FERRAND

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Cinématique</b>	<b>6</b>
1.1	Particules fluides . . . . .	6
1.2	Description Eulerienne-Lagrangienne . . . . .	6
1.3	Lignes de courant, filet de fluide, trajectoire de particules . . . . .	7
1.4	Dérivée particulaire . . . . .	9
1.5	Conservation de la masse . . . . .	10
1.6	Fonction de courant . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Les équations du mouvement</b>	<b>14</b>
2.1	Tenseur des contraintes . . . . .	14
2.2	Equation de la dynamique et de l'énergie . . . . .	16
2.3	Viscosité . . . . .	18
2.3.1	Relation entre contrainte et déformation . . . . .	18
2.3.2	Signe de la viscosité . . . . .	19
2.4	Equation du mouvement . . . . .	19
2.4.1	Equation de Navier-Stokes . . . . .	19
2.4.2	Conditions aux limites . . . . .	20
2.4.3	Bilan des équations et des inconnues . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Analyse dimensionnelle et ordres de grandeur en mécanique des fluides</b>	<b>25</b>
3.1	Théorème $\pi$ . . . . .	25
3.1.1	Enoncé . . . . .	25
3.1.2	Exemples . . . . .	25
3.2	Similitude . . . . .	28
3.2.1	À partir du théorème $\pi$ . . . . .	28
3.2.2	À partir des équations de Navier-Stokes . . . . .	29
3.3	Nombre de Reynolds . . . . .	30
3.3.1	Faible nombre de Reynolds . . . . .	30
3.3.2	Grand nombre de Reynolds . . . . .	30
3.4	Autres nombres sans dimension . . . . .	31

3.5	Incompressibilité . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Vorticité</b>	<b>34</b>
4.1	Définition et exemples . . . . .	34
4.2	Circulation . . . . .	36
4.2.1	Théorème de Kelvin . . . . .	36
4.2.2	Sens physique . . . . .	38
4.3	Sources de vorticité . . . . .	38
4.3.1	Viscosité . . . . .	38
4.3.2	Forces de volume non-conservatives . . . . .	39
4.3.3	Fluides non barotropes . . . . .	40
4.4	Dynamique de la vorticité . . . . .	40
4.4.1	Equation de la vorticité . . . . .	40
4.4.2	Vorticité gelée . . . . .	41
4.4.3	Étirement et torsion de la vorticité . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Ecoulements de fluides parfaits</b>	<b>43</b>
5.1	Ecoulements potentiels . . . . .	43
5.1.1	Unicité de la solution . . . . .	44
5.1.2	Potentiel d'écoulements élémentaires . . . . .	45
5.1.3	Exemples d'écoulements potentiels simples . . . . .	48
5.2	Relation de Bernoulli . . . . .	50
5.2.1	Conservation de l'énergie . . . . .	51
5.2.2	Cas de la couche limite . . . . .	52
5.3	Forces exercées par un écoulement de fluide parfait . . . . .	53
5.3.1	Exemples simples . . . . .	53
5.3.2	Cas général pour un objet bidimensionnel . . . . .	54
5.3.3	Origine de la circulation . . . . .	56
5.3.4	Objets tridimensionnels . . . . .	57
5.3.5	Cas d'un écoulement non stationnaire . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Écoulements rampants</b>	<b>59</b>
6.1	Équation de Stokes . . . . .	59
6.1.1	Écoulements parallèles . . . . .	60
6.1.2	Autres formes de l'équation . . . . .	60
6.2	Propriétés des solutions de l'équation de Stokes . . . . .	61
6.2.1	Linéarité . . . . .	61
6.2.2	Unicité . . . . .	61
6.2.3	Réversibilité . . . . .	62
6.3	Écoulement autour d'une sphère . . . . .	63
6.4	Forces exercées par un écoulement visqueux . . . . .	68

6.4.1	Argument dimensionnel . . . . .	68
6.4.2	Force de Stokes . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Couche limite</b>	<b>69</b>
7.1	Introduction . . . . .	69
7.2	L'approximation de la couche limite . . . . .	69
7.3	Cas d'une plaque plane . . . . .	73
7.3.1	Auto-similarité . . . . .	73
7.3.2	Profil de Blasius . . . . .	74
7.3.3	Force de traînée . . . . .	76
7.3.4	Déficit de débit . . . . .	76
7.4	Au-delà du modèle de Prandtl . . . . .	77
7.4.1	Décollement et influence sur la traînée . . . . .	77
7.4.2	Couche limite turbulente . . . . .	80
<b>8</b>	<b>Écoulements en milieux stratifiés</b>	<b>81</b>
8.1	Généralités et ordres de grandeurs . . . . .	81
8.1.1	Milieu stratifiés . . . . .	81
8.1.2	Nombre de Froude interne . . . . .	81
8.1.3	Blocage . . . . .	82
8.2	Ondes internes . . . . .	83
8.2.1	Principe . . . . .	83
8.2.2	Relation de dispersion . . . . .	83
8.2.3	Vitesse de phase et de groupe . . . . .	84
<b>A</b>	<b>Formulaire mathématique</b>	<b>85</b>
A.1	Théorème de Green-Ostrogradski . . . . .	85
A.2	Théorème de Stokes . . . . .	85
A.3	Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques . . . . .	85
A.4	Analyse vectorielle en coordonnées sphériques . . . . .	86
A.5	Relations vectorielles utiles . . . . .	86
<b>B</b>	<b>Dynamique d'un fluide dans les coordonnées cylindriques et sphériques</b>	<b>88</b>
B.1	Coordonnées cylindriques . . . . .	88
B.1.1	Notations $(r, \theta, x)$ . . . . .	88
B.1.2	Tenseur des contraintes . . . . .	89
B.1.3	Équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible . . . . .	89
B.1.4	Équation de Navier-Stokes . . . . .	89
B.2	Coordonnées sphériques . . . . .	90

---

B.2.1	Notations $(r, \varphi, \theta)$ . . . . .	90
B.2.2	Tenseur des contraintes . . . . .	90
B.2.3	Équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible . . . . .	90
B.2.4	Équation de Navier-Stokes . . . . .	91
<b>C</b>	<b>Résultats utiles</b>	<b>92</b>
C.1	Potentiels des vitesses et fonctions de courant d'écoulements plans . . . . .	92
C.2	Relation fonction de courant - composantes des vitesses . . . .	93
C.3	Relation potentiel des vitesses - composantes des vitesses . . .	93

# Chapitre 1

## Cinématique

### 1.1 Particules fluides

Si on trace des grandeurs comme la température ou la densité par rapport à l'échelle considérée on peut distinguer 3 différents régimes :

- Pour des échelles inférieures au libre particule moyen  $L_1$  on observe des fluctuations importantes,
- Pour des échelles intermédiaire on a des grandeurs constantes,
- Pour des échelles trop grandes supérieur à une échelle  $L_2$ , qui correspond à une longueur caractéristique du système, on observe à nouveau des fluctuations.

Il faut donc se placer entre  $L_1$  et  $L_2$  pour avoir des grandeurs constantes. On définit une *particule fluide* comme une quantité de fluide qui a une taille entre  $L_1$  et  $L_2$ . Dans une particule de fluide il a toujours un très grand nombre de molécules de fluide.

### 1.2 Description Eulerienne-Lagrangienne

La description *Lagrangienne* consiste à suivre une particule fluide au cours du temps que l'on repère par sa position initiale  $\mathbf{x}_0$  à un instant de référence  $t_0$  et ainsi la vitesse de cette particule  $\mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t)$ . Une image que l'on peut prendre est celle d'une rivière qui s'écoule. Le point de vue Lagrangien consiste à monter dans une barque qui est entraînée par le courant et on regarde l'eau à tout instant sous la barque. Au niveau expérimental ceci est très difficile à réaliser car les sondes sont en général fixes (sauf techniques très récentes) et donc on mesure une vitesse à une position fixe.

La description *Eulérienne* consiste à s'intéresser la vitesse d'une particule

fluide qui coïncide à l'instant  $t$  avec un point fixe  $M$  de vecteur position  $\mathbf{x}$  que l'on peut noter  $\mathbf{u}_E(\mathbf{x}, t)$ . A chaque instant, si le fluide est en mouvement, on observe la vitesse d'une particule fluide différente. Afin de retrouver les positions d'une particule il suffit, même si ce n'est pas toujours facile, d'intégrer l'équation :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{u}_E(\mathbf{x}, t)$$

Pour passer de d'une représentation à l'autre on a les relations entre les vitesses :

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{u}_E(f(\mathbf{x}_0, t), t)$$

$$\mathbf{u}_E = \mathbf{u}_L(f^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$$

On utilise le plus souvent le point de vue Eulérien qui est le plus utilisé en mécanique des fluides.

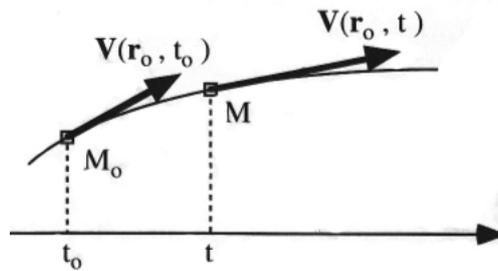


FIGURE 1.1 – Description lagrangienne du mouvement d'un fluide : chaque particule de fluide est repérée par sa position  $\mathbf{r}_0$  à un instant origine  $t_0$ , et suivie dans son mouvement. La vitesse du fluide est caractérisée par la vitesse de cette particule à l'instant considéré.

### 1.3 Lignes de courant, filet de fluide, trajectoire de particules

- On définit une *trajectoire* comme l'ensemble des positions  $\mathbf{x}$  accessibles d'une particule fluide au cours du temps. On obtient la trajectoire par intégration temporelle du champ de vitesse lagrangien.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t v_L(\mathbf{r}_0, t') dt'$$

Ainsi un ensemble de vecteurs de vitesse Lagrangienne définit la *trajectoire* d'une particule. Expérimentalement on peut utiliser des traceurs que l'on éclaire pendant un temps long afin de visualiser la trajectoire.

- En description Eulérienne on utilise *les lignes de courant* (ou de champ) qui est l'ensemble des vecteurs vitesses à un instant donnée. Si on note la vitesse  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  alors on peut traduire le fait que le vecteur vitesse est parallèle à la ligne de courant alors on obtient l'équation :

$$\mathbf{dM} \wedge \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}} \quad (1.1)$$

Où  $\mathbf{dM} = (dx, dy, dz)$  est un élément de longueur sur la ligne de courant. Expérimentalement si on trace les trajectoires pendant un temps assez court on aura une sorte des champs de vecteurs (champ de petites lignes) et ainsi visualiser les lignes de courant.

- Une autre manière de voir les choses est le *filet de fluide* (streakline) qui représente l'ensemble des positions successives d'une particule de fluide ayant coïncidé à un instant antérieur avec un point  $\mathbf{r}_0$ . Expérimentalement cela consiste à injecter un colorant dans le fluide à débit constant et de visualiser le colorant que l'on appelle filet de fluide.

On a donc ainsi trois types de lignes :

- Trajectoire,
- Ligne de courant,
- Filet de fluide.

**Lorsqu'un écoulement n'est pas stationnaire ces notions sont différentes.**

Par contre si l'écoulement est stationnaire (c'est à dire que la vitesse  $\mathbf{u}_E(\mathbf{x})$  ne dépend plus du temps) donc on a :

$$\mathbf{u}_E(\mathbf{x}, t_1) = \mathbf{u}_E(\mathbf{x}, t_2) = \mathbf{u}_E(\mathbf{x}, t_3) = \dots$$

Donc à un même instant tous les vecteurs vitesses tangents à une trajectoire n'évolue pas dans le temps et donc on aura trajectoire = ligne de courant. De plus pour un point fixe  $\mathbf{x}_0$  les particules qui passe par ce point auront les même vecteurs vitesses dans l'espace quelque soit l'instant donc lignes de courant = filets de fluide. Ainsi :

*Stationnarité  $\Rightarrow$  Trajectoires = Lignes de champ = Filets de fluides*

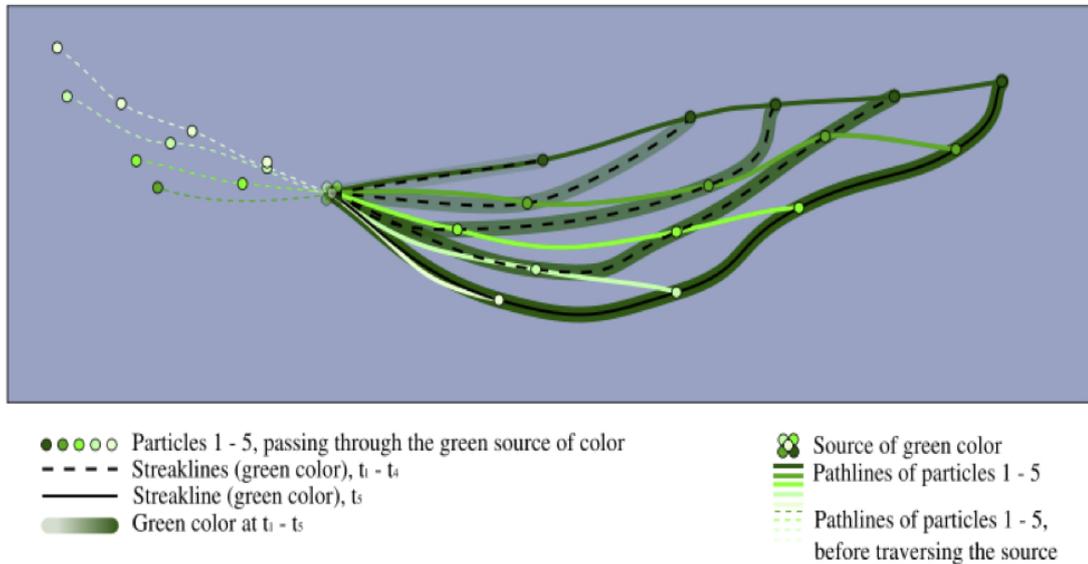


FIGURE 1.2 – Illustration des 3 différentes lignes dans un cas d'écoulement non-stationnaire

On définit un *tube de champ* comme un ensemble de ligne de champ s'appuyant sur un contour fermé. On définit deux sections perpendiculaires à ce tube de champ en entrée  $S_1$  et en sortie  $S_2$ . Ainsi si le fluide est incompressible on a conservation de la matière et du volume donc :

$$S_1 u_1 = S_2 u_2$$

## 1.4 Dérivée particulière

En mécanique du point on a juste à dériver la position par rapport au temps et on a directement la position. En description eulérienne ce n'est pas le cas

En description eulérienne, une particule de fluide peut changer de quantité de mouvement soit parce que le champ de vitesse dépend du temps ou parce que elle se déplace dans une région où la quantité de mouvement n'est pas la même. Si on prend une grandeur scalaire  $f$  on peut regarder sa variation :

$$\delta f = \underbrace{\frac{\delta f}{\delta x} \delta x + \frac{\delta f}{\delta y} \delta y + \frac{\delta f}{\delta z} \delta z}_{\text{dû au déplacement de la particule dans le fluide}} + \underbrace{\frac{\delta f}{\delta t} \delta t}_{\text{dû à la dépendance temporelle}}$$

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\delta f}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta f}{\delta y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\delta f}{\delta z} \frac{\delta z}{\delta t} + \frac{\delta f}{\delta t}$$

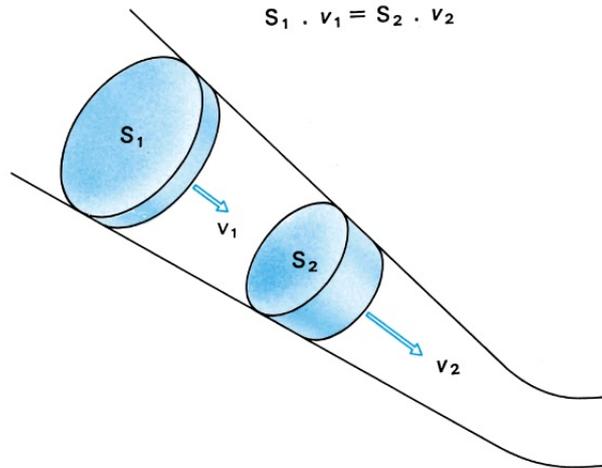


FIGURE 1.3 – Représentation d'un tube de champ

D'où

$$\frac{Df}{Dt} = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t} = \mathbf{u} \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{Df}{Dt} = \mathbf{u} \cdot \text{grad}(f) + \frac{\partial f}{\partial t}} \quad (1.2)$$

Pour une grandeur vectorielle  $\mathbf{A}$  on aura :

$$\boxed{\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \mathbf{u} \cdot \text{grad}(\mathbf{A}) + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}} \quad (1.3)$$

## 1.5 Conservation de la masse

Si on considère un flux d'une grandeur  $A$  intensive qui est la quantité de  $A$  qui passe à travers une surface unité par unité de temps, alors on définit  $a$  la densité volumique de  $A$ . La surface est caractérisée par un vecteur orthogonal unité  $d\mathbf{S}$ . Si on considère un cylindre de longueur  $udt$  alors la quantité de  $A$  qui passe à travers la surface est  $a\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}dt$  donc si on veut la quantité par unité de temps on aura  $a\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$  et donc on définit le flux :

$$\boxed{\text{flux}(A) = \int_S a\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}} \quad (1.4)$$

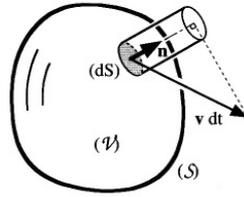


FIGURE 1.4 – Bilan de masse de fluide à l'intérieur d'un volume fixe  $V$ . Le vecteur normal unitaire  $\mathbf{n}$  est dirigé vers l'extérieur. Le flux de masse entrant par unité de temps est égale à  $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$ .

Si on prend l'exemple de la masse. On considère un volume  $V$  de surface  $S$  comme sur la FIG 1.4. La variation de la masse s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$$

Le signe "-" est due à une convention de signe car on définit  $d\mathbf{S}$  sortant à la surface et donc le volume perd de la masse dans ce cas là donc le signe est opposé.

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski on transforme l'intégrale de surface en intégrale de volume et on rentre la dérivée (puisque le volume est fixe au cours du temps) :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \text{div}(\rho \mathbf{u}) dV$$

Or cette équation est valable pour tout volume donc on trouve l'équation locale de la conservation de masse :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0} \quad (1.5)$$

Si on décompose la divergence<sup>1</sup> on a :

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \text{div}(\mathbf{u}) = 0} \quad (1.6)$$

Or pour un fluide incompressible on aura  $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$  et donc  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ .

1. L'analyse vectorielle nous dit que :  $\text{div}(\rho \mathbf{u}) = \rho \cdot \text{div}(\mathbf{u}) + \mathbf{grad}(\rho) \cdot \mathbf{u}$ . Et de plus on a :  $\frac{Df}{Dt} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}(f) + \frac{\partial f}{\partial t}$ .

## 1.6 Fonction de courant

La fonction de courant permet de ramener l'étude du champ de vitesse d'un fluide incompressible à un champ scalaire. On considère un fluide incompressible :  $div(\mathbf{u}) = 0$ .

Lorsqu'on a un écoulement à 2 dimensions (c'est à dire que la vitesse ne dépend que de 2 coordonnées et est invariant selon la troisième  $Oz$ )  $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))$ . On aura pour les coordonnées cartésiennes :

$$div(\mathbf{u}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

On introduit une fonction de courant  $\psi$  tel que :

$$\begin{cases} u = \partial_y \psi \\ v = -\partial_x \psi \end{cases}$$

Qui rend bien compte de la nullité de la divergence de la vitesse. Cette fonction est définie à une constante près qui nous importe peu. Cette fonction  $\psi$  a une signification physique intéressante, elle est invariante le long des lignes de courant. En effet on a :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -y dx + u dy$$

Or le long des lignes de courant on a  $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$  donc  $d\psi_{lc} = 0$ .

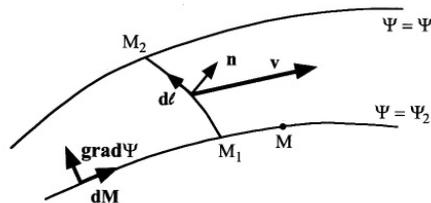


FIGURE 1.5 – Les lignes de courant d'un écoulement bidimensionnel incompressible (tangente en chaque point au vecteur vitesse) sont confondues avec les lignes suivant lesquelles la fonction de courant  $\psi$  est constante.

**Donc les lignes de courant sont des lignes d'iso- $\psi$ .**

De plus pour un écoulement plan la quantité  $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$  représente le débit  $Q$  de fluide dans le tube de courant de section rectangulaire compris entre les lignes de courant  $\psi_1$  et  $\psi_2$  et d'épaisseur unité dans la direction  $Oz$ .

On peut définir une fonction de courant pour les coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$  :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

## Chapitre 2

# Les équations du mouvement

### 2.1 Tenseur des contraintes

Dans un fluide on a deux types de forces :

- Les forces volumiques (gravitation, électromagnétique) que l'on appelle de manière générique  $\mathbf{f}$  qui sera la densité volumique de force de volume,
- Les forces de surface (pression). Pour modéliser cela on définit un tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  que l'on définit tel que  $\sigma_{xy}$  est la contrainte qui s'exerce dans la direction  $Ox$  sur la surface perpendiculaire à  $Oy$ . Et de même pour les autres composantes et autres repères orthonormés. Un exemple est donné sur la FIG 2.1.

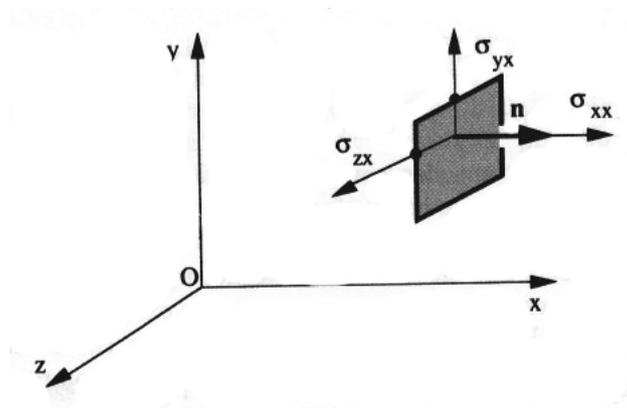


FIGURE 2.1 – Composantes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{yx}$  de la contrainte exercée sur une surface dont la normale est orienté suivant  $Ox$

On veut déterminer la contrainte  $\sigma_n$  exercée sur une surface  $dS$  de normale  $\mathbf{n}$  quelconque. Analysons pour cela les forces exercés sur un tétraèdre dont

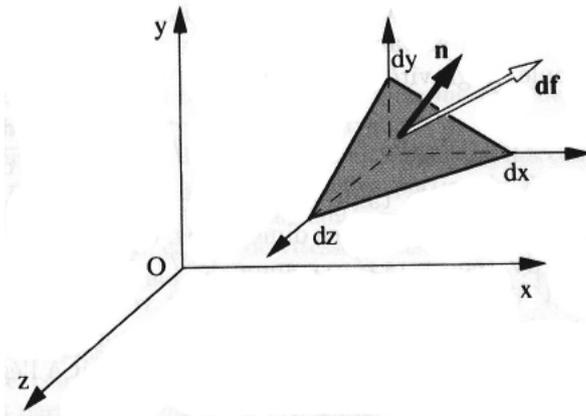


FIGURE 2.2 – Détermination de la contrainte sur une surface d'aide  $dS$  de normale  $\mathbf{n}$  d'orientation quelconque. En raison de l'existence de contraintes tangentielles sur la surface, la force  $d\mathbf{f}$  n'est pas colinéaire au vecteur  $\mathbf{n}$  normal à la surface.

trois des arêtes sont parallèles aux axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  comme indiqué sur la FIG 2.2. La face bordée par les trois autres arêtes a pour direction normale  $\mathbf{n}$ . On note  $\sigma_{xn}dS$ ,  $\sigma_{yn}dS$  et  $\sigma_{zn}dS$  les composantes de la force de contrainte exercée sur la surface  $dS$  de normale  $\mathbf{n}$ . Si on détermine par exemple la composante  $\sigma_{xn}dS$  en écrivant l'équilibre de l'ensemble des forces exercés sur les faces du tétraèdres. Les composantes suivant  $Ox$  des forces exercées sur les faces perpendiculaires à  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  sont respectivement :

$$(-\sigma_{xx})n_x dS \quad (-\sigma_{xy}n_y) dS \quad (-\sigma_{xz}n_z) dS$$

Les signes moins proviennent du fait que les normales sont dirigés vers l'extérieur de la surface. La contrainte totale sur l'ensemble des quatre faces du tétraèdre a donc pour composante suivant  $Ox$  :

$$\sigma_{xn}dS - \sigma_{xx}n_x dS - \sigma_{xy}n_y dS - \sigma_{xz}n_z dS = (\sigma_{xn} - \sigma_{xx}n_x - \sigma_{xy}n_y - \sigma_{xz}n_z)dS$$

Si on écrit la loi de Newton en notant  $dV$  le volume de l'élément et  $\rho$  sa densité avec  $f_x$  la composante selon  $Ox$  de la force volumique alors :

$$dV\rho \frac{d^2x}{dt^2} = (\sigma_{xn}dS - \sigma_{xx}n_x dS - \sigma_{xy}n_y dS - \sigma_{xz}n_z dS) + f_x dV$$

Si on fait tendre la taille de l'élément vers 0 alors  $dV$  et  $dS$  tendent vers 0 on a  $dV$  qui tend plus vite vers 0 (car comme  $dS^{3/2}$ ). Les deux termes en  $dV$  s'annulent donc et on a la contrainte :

$$\sigma_{xn} = \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z$$

De manière plus générale :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xn} \\ \sigma_{yn} \\ \sigma_{zn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

On peut utiliser les notations compactes :

$$\boxed{\frac{d\mathbf{F}}{dS_n} = \vec{\sigma} \otimes \mathbf{n}} \quad (2.1)$$

On peut aussi utiliser les notations indicielles :

$$\boxed{dF_i = \sigma_{ij} dS_j} \quad (2.2)$$

On peut extraire du tenseur des contraintes  $\vec{\sigma}$  la partie qui correspond aux contraintes de pression. La pression est normale à la surface et isotrope donc dans le tenseur des contraintes apparaîtra que sur la diagonale de manière isotrope (c'est à dire la même contribution suivant chaque direction). On peut ainsi réécrire le tenseur des contraintes :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

Où  $\sigma'_{ij}$  est le déviateur. Le signe négatif apparaissant devant  $p$  traduit le fait que le fluide est en compression au repos : la contrainte est donc opposé au vecteur normale  $\mathbf{n}$ .

Le tenseur des contraintes est **symétrique** c'est à dire que pour tout  $i, j$  on a  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Cela se démontre en effectuant un bilan des forces sur un cube de fluide.

## 2.2 Equation de la dynamique et de l'énergie

On considère un volume fixe quelconque  $V$  et on applique le principe fondamentale de la dynamique. Nous avons des forces de volume et de surface qui s'exerce sur  $V$ . Le tenseur des contraintes  $\vec{\sigma}$  prend en compte toutes les forces de surface (pression, viscosité) et la force  $\mathbf{f}$  est une force en volume par unité de masse (pesanteur, électrostatique).

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \mathbf{f} dV + \int_S \vec{\sigma} \otimes d\mathbf{S}$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski et le fait que  $\rho dV$  ne varie pas au cours du temps (car il représente la masse d'un élément matériel de fluide) donc la dérivée particulaire est nulle<sup>1</sup>.

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_V \mathbf{f} dV + \int_V \text{div}(\vec{\sigma}) dV$$

Où la divergence d'un tenseur est défini par :

$$\text{div}(\vec{\sigma})_i = \partial_j \sigma_{ij}$$

Comme le résultat est valable pour tout volume  $V$  donc on peut obtenir une équation locale :

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} + \text{div}(\vec{\sigma})} \quad (2.3)$$

Que l'on peut écrire la forme indicielle :

$$\boxed{\rho \frac{Du_i}{Dt} = f_i + \partial_j \sigma_{ij}} \quad (2.4)$$

Pour obtenir l'équation en énergie on multiplie le PFD par  $\mathbf{u}$  et on a :

$$\boxed{\rho \frac{D(u^2/2)}{Dt} = f_i u_i + u_i \partial_j \sigma_{ij}} \quad (2.5)$$

C'est une écriture du théorème de l'énergie cinétique où le premier terme est le travail des forces volumiques et le deuxième terme est le travail des forces de frottement (et pas le travail de toutes les forces surfaciques).

Si on utilise le premier principe de la thermodynamique qui dit que la variation de l'énergie totale est égale à la somme des travaux des forces et des échanges de chaleur. En notant  $U$  l'énergie interne,  $S_Q$  une source de chaleur volumique et  $\mathbf{j}_Q$  le vecteur flux de chaleur on a :

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left( \frac{u^2}{2} + U \right) dV = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_S u_i \sigma_{ij} dS_j + \int_V S_Q dV - \int_S \mathbf{j}_Q \cdot d\mathbf{S}$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left( \frac{u^2}{2} + U \right) dV = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_V \partial_j (u_i \sigma_{ij}) dV + \int_V S_Q dV - \int_V \text{div}(\mathbf{j}_Q) dV$$

1. En toute rigueur, un calcul complet du bilan des variations de quantité de mouvement dans le volume  $V$  serait nécessaire, mais le raisonnement simplifié contient toute la physique du problème.

Et l'équation locale est :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{u^2}{2} + U \right) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \partial_j (u_i \sigma_{ij}) + S_Q - \text{div}(\mathbf{j}_Q) \quad (2.6)$$

On peut réécrire le terme de travail des forces de surface :

$$\partial_j (u_i \sigma_{ij}) = u_i \partial_j \sigma_{ij} + \sigma_{ij} \partial_j u_i$$

Où le premier terme est bien le travail des forces de frottement et le second terme est un terme de déformation de la surface donc crée de la chaleur. Ainsi si on fait la différence de (2.5) et (2.6) alors :

$$\rho \frac{dU}{dt} = \sigma_{ij} \partial_j u_i + S_Q - \text{div}(\mathbf{j}_Q) \quad (2.7)$$

## 2.3 Viscosité

On veut étudier les lois de comportement du fluide et de sa déformation sous les contraintes imposées. On a l'apparition de contraintes lors des mouvement relatif des fluides. On peut faire l'approximation des fluides Newtonien qui consiste à avoir une dépendance linéaire de la vitesse avec la contrainte.

### 2.3.1 Relation entre contrainte et déformation

On s'intéresse seulement à la partie symétrique du tenseur des déformations :

$$s_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad (2.8)$$

Pour le tenseur de déviation on peut supposer que si il y a une relation linéaire entre les contraintes et le tenseur des déformations alors :

$$\sigma'_{ij} = A_{ijkl} s_{kl}$$

Or  $s$  et  $\vec{\sigma}$  sont symétriques donc  $A_{ijkl}$  doit être symétrique dans l'échange de  $i$  et  $j$  mais aussi de  $k$  et  $l$ . De plus la déformation est isotrope donc cela ne doit pas dépendre de l'indice  $i, j, k$  ou  $l$ . On peut montrer que à partir de 2 coefficients on a la forme la plus général de  $A$  :

$$A_{ijkl} = \alpha (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \beta \delta_{ij} \delta_{kl}$$

Et donc :

$$A_{ijkl}s_{kl} = 2\alpha s_{ij} + \beta \delta_{ij} \operatorname{div}(\mathbf{u})$$

Si on pose  $\alpha = \eta$  qui sera la viscosité dynamique et  $\beta = \xi$  la seconde viscosité ou viscosité de volume on a :

$$\sigma_{ij} = \eta(\partial_j u_i + \partial_i u_j) + (-p + \xi \operatorname{div}(\mathbf{u})) \delta_{ij} \quad (2.9)$$

### 2.3.2 Signe de la viscosité

On va montrer que la viscosité est nécessairement positif. L'équation de l'énergie cinétique (sans terme de volume) s'écrit :

$$\frac{\rho}{2} \frac{Du^2}{Dt} = u_i \partial_j \sigma_{ij} = \partial_j (u_i \sigma_{ij}) - \sigma_{ij} \partial_j u_i$$

Si on intègre sur un volume  $V$  alors :

$$\int_V \frac{\rho}{2} \frac{Du^2}{Dt} dV = \int_V \partial_j (u_i \sigma_{ij}) dV - \int_V \sigma_{ij} \partial_j u_i dV$$

D'après Green-Ostrogradski :

$$\int_V \frac{\rho}{2} \frac{Du^2}{Dt} dV = \int_S (u_i \sigma_{ij}) dS_j - \int_V \sigma_{ij} \partial_j u_i dV$$

On fait tendre le volume vers l'infini et donc la surface tend vers la surface limite qui est soit une paroi soit l'infini et la vitesse s'annule à cet endroit donc le premier terme s'annule et de plus :

$$\sigma_{ij} \partial_j u_i = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \partial_j u_i + \sigma_{ji} \partial_i u_j) = \frac{\sigma_{ij}}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j)$$

Et donc :

$$\int_V \frac{\rho}{2} \frac{Du^2}{Dt} dV = -\frac{\eta}{2} \int_V (\partial_j u_i + \partial_i u_j)^2 dV$$

Or la variation de  $u^2$  est nécessairement négative car le système total doit perdre de l'énergie et l'intégrale du membre de droite est positif donc la **viscosité est positive**.

## 2.4 Equation du mouvement

### 2.4.1 Equation de Navier-Stokes

Donc si on reprend le tenseur des contraintes on a :

$$\sigma_{ij} = \eta(\partial_j u_i + \partial_i u_j) + (-p + \xi \operatorname{div}(\mathbf{u})) \delta_{ij}$$

Fluide	$\mu$ (Pa s)	$\nu$ ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
air	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$
$\text{H}_2$	$8.7 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$
eau	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$
Ethanol	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-6}$
Glycérine	0.85	$6.8 \cdot 10^{-4}$
Huile d'olive	0.1	$1.1 \cdot 10^{-4}$
Mercure	$1.56 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$

FIGURE 2.3 – Valeurs de viscosité dynamique  $\eta = \mu$  et cinématique  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  pour différents fluides.

Et donc le PFD se réécrit pour la composante  $i$  :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = f_i + \eta \partial_j (\partial_j u_i + \partial_i u_j) - \partial_i p + \xi \partial_i (\text{div}(\mathbf{u}))$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = f_i + \eta \Delta u_i - \partial_i p + (\xi + \eta) \partial_i (\text{div}(\mathbf{u}))$$

Et donc en notation vectorielle on trouve l'équation de Navier-Stokes

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} + \eta \Delta \mathbf{u} - \mathbf{grad} p + (\xi + \eta) \mathbf{grad}(\text{div}(\mathbf{u}))} \quad (2.10)$$

On peut trouver une autre forme si on prend une autre convention ( $\xi = \frac{\xi}{3}$ ) et on trouve que le dernier facteur est multiplié par  $\left(\frac{\xi}{3} + \eta\right)$ .

Il sera intéressant d'introduire la *viscosité cinématique* :

$$\boxed{\nu = \frac{\eta}{\rho}} \quad (2.11)$$

On trouvera dans la FIG 2.3 des exemples de valeurs pour les viscosités dynamique et cinématique.

## 2.4.2 Conditions aux limites

La détermination complète du mouvement d'un fluide c'est à dire le champ de vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  nécessite, d'une part l'intégration de l'équation du mouvement

des particules de fluide, d'autre part la donnée des conditions aux limites, c'est à dire la valeur des champs de vitesse et de contraintes à la frontière du domaine qui limite le fluide. Deux cas sont à envisager, selon que le milieu qui limite le fluide est un corps solide ou un autre fluide.

### Conditions aux limites à la surface d'un corps solide

- Si la paroi est imperméable alors la non-pénétration du fluide dans le solide impose que la vitesse normale à la paroi est à la même vitesse que la paroi au niveau de la paroi :  $v_{\perp}(x_{paroi}, y_{paroi}, z_{paroi}) = v_{\perp \text{ paroi}}$
- Si la viscosité est pris en compte (c'est à dire qu'elle n'est pas négligeable dans le régime considéré) alors la vitesse tangentielle doit être égale à la vitesse de la paroi sinon on a un gradient infini et donc une contrainte infini. Ainsi :  $v_{\parallel}(x_{paroi}, y_{paroi}, z_{paroi}) = v_{\parallel \text{ paroi}}$

Les conditions aux limites peuvent également concerner les contraintes. Si on a une paroi solide c'est à dire que la surface ne bouge pas. On rappelle que la force  $F$  qu'exerce la particule fluide sur la paroi est donné par :

$$\frac{d\mathbf{F}_{paroi \rightarrow fluide}}{dS_n} = \vec{\sigma} \otimes \mathbf{n}$$

Ainsi la force d'une particule fluide sur la paroi alors :

$$\frac{d\mathbf{F}_{fluide \rightarrow paroi}}{dS_n} = -\vec{\sigma} \otimes \mathbf{n}$$

Si on prend un exemple d'une paroi plane tel que le vecteur normal soit :

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors on a :

$$\frac{d\mathbf{F}}{dS} = \begin{pmatrix} -\sigma_{xz} \\ -\sigma_{yz} \\ -\sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta(\partial_x w - \partial_z u) \\ -\eta(\partial_y w - \partial_z v) \\ p - 2\eta\partial_z w \end{pmatrix}$$

Si le système est à 2 dimensions alors  $v = 0$ . De plus le profil est uniforme donc  $\partial_x = \partial_y = 0$ . De plus le fluide est incompressible donc  $div(\mathbf{u}) = \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = \partial_z w = 0$ . Et ainsi on trouve :

$$\boxed{\frac{d\mathbf{F}}{dS} = \begin{pmatrix} -\eta\partial_z u \\ 0 \\ p \end{pmatrix}}$$

Ainsi on retrouve un résultat intuitif, comme les deux composantes sont positives et donc les forces exercées par le fluide sur la paroi sont la force de pression et la force de viscosité.

**Conditions aux limites entre deux fluides - effet de la tension superficielle**

Les conditions sur les champs de vitesse sont les mêmes que pour un solide.

Pour trouver les conditions sur les contraintes normales il faut utiliser la tension superficielle entre deux phases 1 et 2. Alors la différence de pression s'écrit :

$$P_1 - P_2 = \gamma \left( \frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \right)$$

Où  $\gamma$  est le coefficient de tension superficielle entre les deux fluides et  $R_\alpha$  et  $R_\beta$  les rayons de courbures principaux<sup>2</sup>.

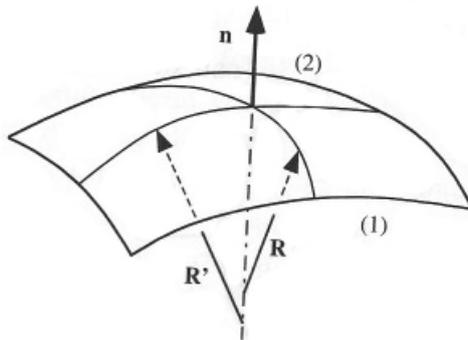


FIGURE 2.4 – Géométrie de la surface de séparation entre deux fluides (1) et (2) permettant de définir les rayons de courbure principaux. Pour cela on prend la courbure maximale et la courbure minimale.

De plus les rayons de courbure  $R_{\alpha,\beta}$  sont positifs si le centre de courbure est du coté (1). Pour le cas d'une sphère les deux rayons de courbures sont égaux donc :

$$P_1 - P_2 = \frac{2\gamma}{R}$$

2. Pour trouver les deux rayons de courbure principaux en un point donné il suffit de prendre la courbure maximale et la courbure minimale

Ainsi on peut exprimer la continuité des contraintes :

$$\boxed{(\vec{\sigma}_2 - \vec{\sigma}_1) \otimes \mathbf{n} = \gamma \left( \frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \right)}$$

Pour une des deux phases qui est un gaz on a une tension superficielle nulle :  $\gamma = 0$ . Ainsi on a  $P_1 = P_2$ . On a également :

$$\vec{\sigma}'_{liquide} \otimes \mathbf{n} = 0$$

On a une équation en plus avec la condition d'égalité des vitesses normales, mais une inconnue en plus qui est la position de la paroi mobile.

Pour l'équilibre des contraintes tangentielles à l'interface on écrit :

$$(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} = (\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}$$

Dans cette relation, pour  $i = 1, 2$ , les vecteurs résultant des produits tensoriels  $\vec{\sigma}^{(i)} \cdot \mathbf{n}$  représentent les contraintes  $\Sigma_{(i)}$  qui s'exercent sur l'interface de normale  $\mathbf{n}$ . Le produit scalaire de  $\Sigma_{(i)}$  par le vecteur unitaire  $\mathbf{t}$  tangent à l'interface donne les composantes tangentielles à ces contraintes.

### 2.4.3 Bilan des équations et des inconnues

On a des équations et des inconnues on va voir s'il est possible de résoudre théoriquement le problème. On distingue 2 cas :

1. Si le fluide est incompressible alors  $\rho = cte$  alors on a :
  - 4 inconnues :  $P, \mathbf{u}(u, v, w)$
  - 4 équations : équation de Navier-Stokes (3 équations) et incompressibilité :  $div(\mathbf{u}) = 0$

On peut aussi montrer que la vitesse et la pression peuvent se déterminer indépendamment. Par exemple pour une force qui dérive d'un potentiel on aura la force et la pression qui interviendra en :  $-\mathbf{grad}(\phi) - \mathbf{grad}(P) = -\mathbf{grad}(\phi + P)$ . en prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes ce terme disparaît et on se retrouve avec :

$$\begin{cases} div(\mathbf{u}) = 0 \\ rot \left( \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \eta \Delta \mathbf{u} \right) = 0 \end{cases}$$

Ainsi la pression "s'adapte" à la répartition des vitesses dans le système pour satisfaire l'équation de Navier-Stokes.

2. Si le fluide n'est pas incompressible et donc  $\rho \neq cte$ . On peut définir une équation d'état :

$$f(\rho, P, T) = 0$$

On a une équation pour l'énergie soit interne soit totale. Or on a une équation entre la température et l'énergie interne. Par exemple pour un gaz parfait monoatomique on a :  $U = \frac{3}{2}RT$ . Et de manière générale :

$$U = f(\rho, V, T)$$

Et donc au final :

- 7 inconnues :  $\mathbf{u}(u, v, w), P, T, \rho, U$
- 7 équations : équation de Navier-Stokes (3 équations), expression de  $div(\mathbf{u})$ , énergie, équation d'état et  $U = f(\rho, V, T)$ .

## Chapitre 3

# Analyse dimensionnelle et ordres de grandeur en mécanique des fluides

### 3.1 Théorème $\pi$

#### 3.1.1 Enoncé

Une équation physique complète, de la forme générale :

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

où les  $q_i$  représentent  $n$  variables physiques choisies pour la description du problème (là est la difficulté), exprimées en termes de  $k$  unités physiques indépendantes, peut être réécrite sous la forme :

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p) = 0$$

Où les  $\pi_i$  représentent  $p = n - k$  nombres sans dimension construits à partir des  $q_i$  par des équations de la forme :

$$\pi_i = q_1^{m_{1i}} q_2^{m_{2i}} \dots q_n^{m_{ni}}$$

#### 3.1.2 Exemples

##### Exemple 1

Taylor a mesuré le rayon d'un champignon atomique sur un film et ainsi trouver  $r = f(T)$ . Il a trouvé :

$$r \propto t^{2/5}$$

Il a choisit les variables :

- Le rayon  $r$  avec comme unité  $L$
- Le temps  $t$  avec comme unité  $T$
- L'énergie  $E$  avec comme unité  $ML^2T^{-2}$
- La densité  $\rho$  avec comme unité  $ML^{-3}$

Si on appliqué le théorème  $\pi$  alors il y a un seul nombre sans dimension (4 variables - 3 unités = 1 nombre sans dimension)  $\pi$  que l'on peut écrire :

$$\pi = r^a t^b E^c \rho^d$$

En terme de dimension on a :

$$\pi = L^a T^b (ML^2 T^{-2})^c (ML^{-3})^d = L^{a+2c-3d} T^{b-2c} M^{c+d}$$

Et donc :

$$\begin{cases} a + 2c - 3d = 0 \\ b - 2c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases}$$

On peut aussi raisonner par tâtonnement :

$$\frac{E}{\rho} = L^5 T^{-2}$$

Donc on peut dire que :

$$\pi = \frac{Et^2}{\rho r^5}$$

Or  $\pi = cte = \mathcal{O}(1)$  car  $F(\pi) = 0$  alors on a :

$$r = \frac{1}{\pi} \left( \frac{E}{\rho} \right)^{1/5} t^{2/5}$$

Ce qui confirme la mesure sur le film et il a ainsi réussi a remonter à l'énergie de la bombe.

## Exemple 2

L'expérience de Bose, Rambert, Bose.

Ils ont fait s'écouler un fluide dans un tuyau en mesurant la différence de pression entre les 2 bouts. Il y a un temps  $\tau$  de remplissage d'un volume  $V$  à travers ce tuyau. On trouve la courbe sur la gauche de la FIG 3.1.

On a 5 variables :

- La pression  $P$  avec comme unité  $ML^{-1}T^{-2}$
- Le temps  $\tau$  avec comme unité  $T$

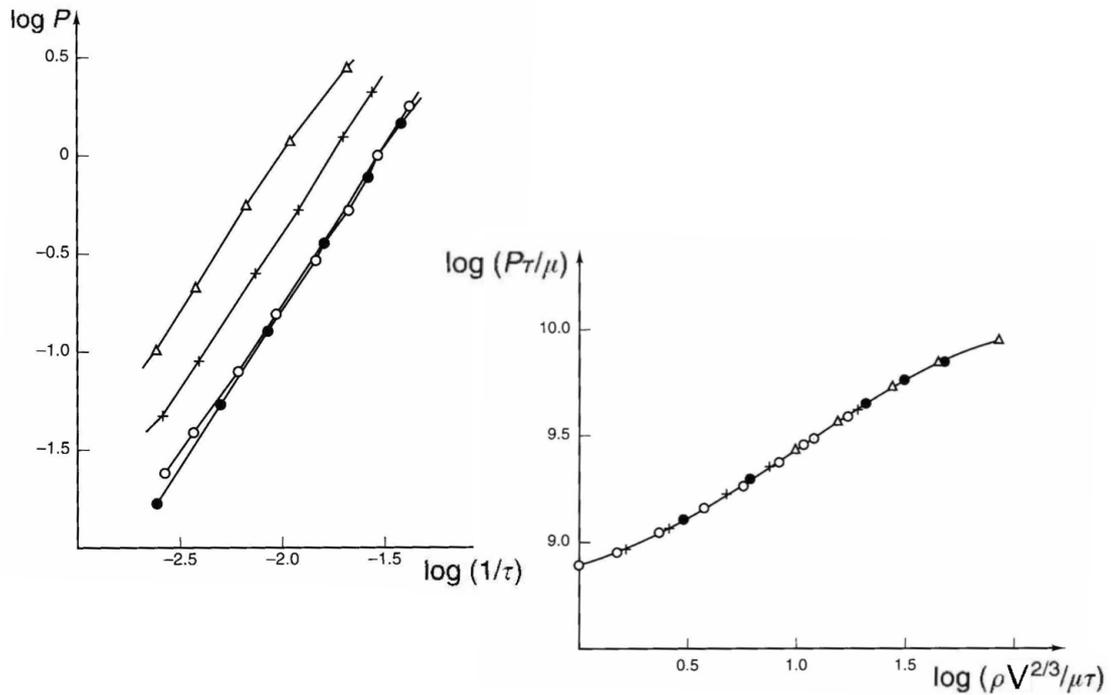


FIGURE 3.1 – À gauche : Résultats expérimentaux pour l'expérience de Bose, Rambert, Bose. À droite : Tracé de la fonction  $f(\pi_1, \pi_2) = 0$  du théorème  $\pi$

- Le volume  $V$  avec comme unité  $L^3$
- La viscosité  $\eta$  avec comme unité  $ML^{-1}T^{-1}$
- La densité  $\rho$  avec comme unité  $ML^{-3}$

On trouve 2 nombres sans dimension (5 variables - 3 unités = 2 nombres sans dimension) et on a :

$$\frac{P\tau}{\eta} = f\left(\frac{\rho V^{2/3}}{\eta \tau}\right)$$

Et on trouve la courbe sur la droite de la FIG 3.1. Ce résultat est faux car le rapport entre  $V$  et  $\tau$  est le débit volumique  $q$  (en  $L^3T^{-1}$ ) et il s'agit en fait d'un seul paramètre. On peut, pour corriger cela, rajouter 2 paramètres : la longueur et le diamètre du tuyau. Et on trouve :

$$\frac{PD^3}{\eta q} = f\left(\frac{L}{D}, \frac{\rho q}{\eta D}\right)$$

Hors la longueur ne joue pas un rôle déterminant car en doublant la longueur on double la variation de pression et donc on peut définir la variation de

pression par unité de longueur et on trouve :

$$\frac{PD^3}{\eta q} = \frac{L}{D} g\left(\frac{\rho q}{\eta D}\right)$$

$$\boxed{\frac{PD^4}{\eta q L} = g\left(\frac{\rho q}{\eta D}\right)}$$

Mais ils ont trouvé quelque chose d'assez correct en effet si  $d = \frac{V}{\tau}$  et donc :

$$\frac{D^4 P/L}{\eta V/\tau} = g\left(\frac{\rho V/\tau}{\eta D}\right) \Rightarrow \frac{P\tau D}{\eta L} \left(\frac{D}{V^{1/3}}\right)^3 = g\left(\frac{\rho V^{2/3}}{\eta\tau} \left(\frac{V^{1/3}}{D}\right)\right)$$

Or on a :

$$\frac{\rho q}{\eta D} = \frac{qUD^2}{\eta D} = \frac{UD}{\frac{\eta}{\rho}} = \frac{UD}{\nu} = Re$$

À bas nombre de  $Re$  on a  $\rho$  qui ne joue pas de rôle donc :

$$g(x) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{D^4 P/L}{\eta q} = cte$$

$$\frac{P}{L} = cte \times \frac{\eta q}{D^4}$$

On retrouve alors la loi de Poiseuille.

## 3.2 Similitude

Si on prend un fluide à la vitesse  $U$  loin de l'obstacle dans un tuyau de longueur  $L$  et de diamètre  $D$  qu'est ce qui nous dit qu'il aura le même comportement pour d'autre  $U, L, D$ ? On a aussi comme grandeur pertinente : la position, la vitesse, la densité et la viscosité cinématique. On ne prend pas la pression car elle découle de la vitesse donc ce n'est pas pertinent.

### 3.2.1 À partir du théorème $\pi$

On peut construire des nombres sans dimension :

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{D}{L}, \frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}, \frac{\rho U D}{\eta}\right)$$

Si on fait un modèle réduit on a  $\frac{D}{L} = \frac{x}{L} = \frac{y}{L} = \frac{z}{L} = cte$  donc cela enlève des paramètres.

$$\boxed{\frac{u}{U} = f(Re)}$$

Deux écoulements sont *similaires* si tous les nombres sans dimension sont les mêmes.

### 3.2.2 À partir des l'équations de Navier-Stokes

Si on se place à 2 dimensions et sans force de volume. La conservation de la masse s'écrit :

$$\partial_x u + \partial_y v = 0$$

La première composante de l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\partial_x u + u\partial_x u + v\partial_y u = -\frac{1}{\rho}\partial_x P + \nu(\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u)$$

On choisi alors des grandeurs caractéristiques et on adimensionne les variables :

$$x' = \frac{x}{L} \quad y' = \frac{y}{L} \quad u' = \frac{u}{U} \quad v' = \frac{v}{U} \quad t' = \frac{U}{L}t \quad P' = \frac{P}{\rho U^2}$$

Il n'y pas de variable caractéristique de temps ni de pression, on les construit à partir d'une analyse dimensionnelle à partir des autres grandeurs.

Ainsi on trouve pour la conservation de la masse rien de nouveau :

$$\frac{U}{L}\partial'_x u' + \frac{U}{L}\partial'_y v' = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial'_x u' + \partial'_y v' = 0$$

Pour l'équation de Navier-Stokes les choses deviennent intéressantes :

$$\begin{aligned} \frac{U^2}{L}\partial'_t u' + \frac{U^2}{L}(u'\partial'_x u' + v'\partial'_y u') &= -\frac{1}{\rho}\frac{\rho U^2}{L}\partial'_x P' + \frac{\nu U}{L^2}(\partial'^2_{xx} u' + \partial'^2_{yy} u') \\ \partial'_t u' + (u'\partial'_x u' + v'\partial'_y u') &= -\partial'_x P' + \underbrace{\frac{\nu}{UL}}_{= \frac{1}{Re}}(\partial'^2_{xx} u' + \partial'^2_{yy} u') \end{aligned}$$

Donc le paramètre pertinent est le nombre de Reynolds.

Plus généralement on trouve (avec force de volume) :

$$\boxed{\frac{D'\mathbf{u}'}{Dt'} = -\mathbf{grad}'P' + \rho\mathbf{f} + \frac{1}{Re}\Delta'\mathbf{u}'} \quad (3.1)$$

### 3.3 Nombre de Reynolds

On définit donc :

$$\boxed{Re = \frac{UL}{\nu}} \quad (3.2)$$

Or on sait que le fluide transporte une quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  et donc on a un rapport de transport de quantité de mouvement :

$$Re = \frac{\text{flux convectif de } \mathbf{p}}{\text{flux diffusif de } \mathbf{p}} = \frac{\rho U^2}{\eta U/L} = \frac{\rho UL}{\eta} = \frac{UL}{\nu}$$

On peut aussi le définir comme un rapport de temps :

$$Re = \frac{\text{temps visqueux}}{\text{temps convectif}} = \frac{\frac{L^2}{\nu}}{\frac{L}{U}} = \frac{UL}{\nu}$$

Enfin on peut définir à partir de l'équation de Navier-Stokes comme un rapport des deux termes d'accélération :

$$Re = \frac{U \cdot \mathbf{grad} U}{U \Delta U} = \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu}$$

#### 3.3.1 Faible nombre de Reynolds

C'est le cas si on se place dans un fluide très visqueux et/ou avec une vitesse faible et/ou une longueur caractéristique faible et on trouve l'équation de Reynolds où l'on néglige les termes inertiels :

$$\boxed{0 = -\mathbf{grad}' P' + \rho \mathbf{f} + \frac{1}{Re} \Delta' \mathbf{u}'} \quad (3.3)$$

#### 3.3.2 Grand nombre de Reynolds

C'est le cas si on se place dans un fluide peu visqueux et/ou avec une vitesse grande et/ou une longueur caractéristique grande et on trouve l'équation d'Euler en négligeant le terme de viscosité  $\eta = 0$  :

$$\boxed{\frac{D' \mathbf{u}'}{Dt'} = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad}' P'} \quad (3.4)$$

On perd la condition sur la vitesse tangentielle car on fait approximation à  $\eta = 0$ . Or plus le  $Re$  est grand plus l'approximation est vraie or la condition

aux limites est soit vrai soit non. En fait pour être complet il y a une zone, appelé *couche limite*, où les forces visqueuses jouent un rôle. Cette zone sera d'autant plus petite que le  $Re$  sera grand.

On peut définir des forces caractéristiques :

- force d'inertie :  $\frac{U^2}{L}$
- force visqueuse :  $\frac{\nu U}{\delta^2}$  où  $\delta$  est une longueur caractéristique de la taille de la couche limite

Et donc pour avoir  $Re = 1$  on doit avoir :

$$\frac{\nu U}{\delta^2} = \frac{U^2}{L} \Rightarrow \frac{\delta^2}{L^2} = \frac{\nu}{UL} = \frac{1}{Re}$$

Donc à  $Re$  grand on a un  $\delta$  petit.

### 3.4 Autres nombres sans dimension

On a pas encore tenu compte des forces volumiques et donc on peut définir de nouveaux nombres sans dimension.

- Force de gravité :  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$ .  
 $g$  est une accélération donc pour créer un nombre sans dimension on divise par une accélération :

$$\frac{gL}{U^2}$$

Et on définit le nombre de Froude qui est la racine de l'inverse de ce nombre :

$$\boxed{Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}} \quad (3.5)$$

- Force de Coriolis due à une rotation de vitesse  $\Omega$ . Et on compare la rotation soit au temps de convection soit au temps visqueux et donc les nombres de Rossby ou Elman :

$$\boxed{Ro = \frac{U}{L\Omega} \quad Ek = \frac{\nu}{L^2\Omega}} \quad (3.6)$$

### 3.5 Incompressibilité

Cela signifie que on prend  $\rho = cte$  or cette condition s'écrit sur une longueur  $\delta x$  :

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \ll 1$$

Et donc le paramètre important est la compressibilité :

$$\chi = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_T$$

Et donc on a :

$$\delta\rho = \chi\rho\delta P$$

Et donc la condition  $\frac{\delta\rho}{\rho} \ll 1$  devient :

$$\chi\delta P \ll 1$$

Or  $\delta P \simeq \rho U^2$  à grand  $Re$  donc :

$$\chi\rho U^2 \ll 1$$

Et donc on peut comparer ça à la vitesse du son  $c = \frac{1}{\sqrt{\chi\rho}}$  :

$$\boxed{\frac{U^2}{c^2} \ll 1}$$

Et ainsi on définit le nombre de Mach :

$$\boxed{Ma = \frac{U}{c}} \quad (3.7)$$

Si on a  $Re \ll 1$  alors :

$$\mathbf{grad} P = \eta\Delta\mathbf{u}$$

$$\delta P = \frac{\eta U}{L}$$

Et donc la condition s'écrit :

$$\chi \frac{\eta U}{L} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \chi\rho U^2 \frac{\eta}{\rho UL}$$

Et donc :

$$\frac{Ma^2}{Re} \ll 1$$

Du point de vue thermodynamique l'incompressibilité traduit le fait que l'écoulement n'est qu'une petite perturbation par rapport à la thermodynamique du système. Par exemple pour un gaz parfait :

$$c^2 = \gamma RT$$

$$U_m = c_v T = \gamma RT$$

Et donc la condition est :

$$\rho u^2 \ll \rho c^2 \quad \Rightarrow \quad \rho u^2 \ll \rho U$$

C'est à dire que l'énergie cinétique de l'écoulement est très petit devant l'énergie interne.

# Chapitre 4

## Vorticité

### 4.1 Définition et exemples

On définit le vecteur vorticité comme le rotationnel du champ de vitesse vitesse :

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

La vorticité correspond à la partie antisymétrique du tenseur des gradients de vitesses. La vorticité intervient dans les écoulements non potentiels mais aussi dans les fluides visqueux. Elle joue un rôle particulièrement important dans les écoulements turbulents, qu'on peut souvent considérer comme la superposition d'une translation moyenne et d'un mouvement de rotation local avec des échelles de tailles très variables.

Exemple 1 : Rotation solide de vitesse angulaire  $\Omega$ .

Dans ce cas là on a la vitesse qui vaut :

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}$$

Avec  $\boldsymbol{\Omega}$  un vecteur fixe et uniforme sur tout la particule de fluide.

On peut utiliser la notation indicielle pour le rotationnel et le produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \omega_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j u_k \\ u_k &= \epsilon_{klm} \Omega_l x_m \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 \omega_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \Omega_l x_m) \\
 &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j (\Omega_l x_m) \\
 &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j (\Omega_l x_m) \\
 &= \partial_j (\Omega_i x_j) - \partial_j (\Omega_j x_i) \\
 &= \Omega_i \partial_j x_j - \Omega_j \partial_j x_i \\
 &= 3\Omega_i - \Omega_j \delta_{ij} \\
 &= 2\Omega_i
 \end{aligned}$$

Donc on a une vorticité uniforme :

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\Omega}} \quad (4.2)$$

*On aurait pu utiliser la formule d'un rotationnel d'un produit vectoriel du formulaire pour tomber sur le résultat.*

Exemple 2 : Rotation avec une distribution de vitesse différente :

$$u_r = 0 \quad u_\theta = \frac{K}{r} \quad u_z = 0$$

Or on connaît le rotationnel en coordonnées cylindrique :

$$\mathbf{rot} \mathbf{A}|_{r \neq 0} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \partial_\theta A_z - \partial_z A_\theta \\ \partial_z A_r - \partial_r A_z \\ \frac{1}{r} (\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r) \end{vmatrix} \quad \mathbf{rot} \mathbf{u} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ainsi pour  $r \neq 0$  on a  $\mathbf{rot} \mathbf{u} = 0$ . Pour calculer la vorticité en  $r = 0$  on va utiliser la circulation. Si on prend un cercle perpendiculaire et concentrique à l'axe alors on peut écrire par le théorème de Stokes :

$$\begin{aligned}
 \oint_{C_r} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{S_r} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \frac{K}{r} 2\pi r \\
 &= 2\pi K \\
 &= \int_{S_r} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S}
 \end{aligned}$$

Si on fait tendre la surface vers 0 alors comme le terme doit rester constant on va avoir  $\omega$  qui tend vers l'infini.

$$\omega(r = 0) = \infty$$

Exemple 3 : Cisaillement simple. On a la vitesse qui vaut :

$$\mathbf{u} = \begin{vmatrix} u(z) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Et donc on trouve :

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{vmatrix} 0 \\ \partial_z u \\ 0 \end{vmatrix}$$

**Ainsi la vorticité ne représente pas si le fluide tourne mais si une particule de fluide tourne individuellement.** Ainsi dans nos exemples 1 et 3 la particule tourne lors du déplacement et dans l'exemple 2 la particule à un mouvement circulaire uniforme mais ne tourne pas (comme une grande roue) sauf au centre mais on y reviendra plus tard.

## 4.2 Circulation

On a déjà défini la circulation<sup>1</sup> :

$$\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S}$$

### 4.2.1 Théorème de Kelvin

La circulation se conserve sur un contour fermé dans un écoulement sous certaines conditions :

- On a un fluide parfait :  $\nu = 0$
- Les forces extérieures  $\mathbf{f}$  dérivent d'un potentiel :  $\mathbf{f} = -\mathbf{grad} \phi$
- Il faut que l'écoulement soit barotrope c'est à dire que la densité ne soit qu'une fonction de la pression :  $\rho = f(P)$ . Pour le cas d'une densité constante la condition est satisfaite.

Démonstration :

*On peut dériver la circulation mais l'élément différentiel dépend du temps car il évolue avec C dans le temps :*

$$\frac{D}{Dt} \left[ \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \right] = \oint_C \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{u} \cdot \frac{Dd\mathbf{l}}{Dt}$$

---

1. La circulation a deux forme grâce au théorème de Stokes

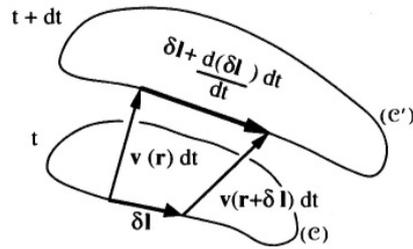


FIGURE 4.1 – Variation des éléments d'une courbe matérielle ( $C$ ) suivant le mouvement du fluide.

On va montrer que les deux termes sont nuls séparément. Tout d'abord par Navier-Stokes on a comme le fluide est parfait :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} P + \mathbf{f} + \nu \Delta \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} P + \mathbf{f}$$

On montre que la circulation des deux termes est nul :

$$\mathbf{f} = -\mathbf{grad} \phi \quad \Rightarrow \quad \oint_C -\mathbf{grad} \phi \cdot d\mathbf{l} = \int_S \underbrace{-\mathbf{rot}(\mathbf{grad} \phi)}_{=0} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Pour l'autre terme on a :

$$\oint_C \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} P \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot} \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} P \right) \cdot d\mathbf{S}$$

Or par les formules d'analyse vectorielle on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} P \right) &= \frac{1}{\rho} \mathbf{rot}(\mathbf{grad} P) + \mathbf{grad} \left( \frac{1}{\rho} \right) \wedge \mathbf{grad} P \\ &= 0 - \frac{1}{\rho^2} \mathbf{grad} \rho \wedge \mathbf{grad} P \end{aligned}$$

Comme l'écoulement est barotrope on a que les lignes de même densités sont parallèles aux lignes de même pression.

$$\mathbf{grad} \rho = \frac{\partial f}{\partial P} \mathbf{grad} P$$

Et donc :

$$\mathbf{grad} \rho \wedge \mathbf{grad} P = 0$$

Donc on a montré que le premier terme est nul :

$$\oint_C \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Pour le second terme l'élément de la courbe évolue selon l'équation :

$$d\mathbf{l}(t + dt) = d\mathbf{l}(t) + \mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{l}, t)dt - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$$

$$\frac{d\mathbf{l}(t + dt) - d\mathbf{l}(t)}{dt} = d\mathbf{l} \cdot \text{grad } \mathbf{u}$$

$$\frac{D(d\mathbf{l})}{Dt} = d\mathbf{l} \cdot \text{grad } \mathbf{u}$$

Et donc :

$$\oint \mathbf{u} \cdot \frac{Dd\mathbf{l}}{Dt} = \oint_C \mathbf{u} \cdot (d\mathbf{l} \cdot \text{grad } \mathbf{u}) = \oint_C \text{grad} \left( \frac{u^2}{2} \right) \cdot d\mathbf{l} = 0$$

### 4.2.2 Sens physique

Ce résultat peut être interprété comme une conservation du moment cinétique en mécanique du solide pour un fluide parfait. Pour une rotation local  $\frac{\omega}{2}$  d'un cylindre de rayon  $r$  on a le moment cinétique qui vaut :

$$\sigma = J \frac{\omega}{2} = \frac{mr^2}{2} \frac{\omega}{2} = \frac{m}{4} (r^2 \omega)$$

Et donc on a :

$$\oint_{C_r} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int \text{rot } \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \omega \pi r^2 = K J \Omega$$

Où  $\delta m = \rho \pi r^2 \delta l$  est la masse de fluide de densité  $\rho$  contenue dans l'élément de cylindre,  $J = \delta m r^2 / 2$  est le moment d'inertie associé à ce fluide, et  $K = 4\pi / \delta m$ .

$$\sigma \propto \oint_{C_r} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$$

**Une conséquence de ce théorème est que si un flux est irrotationnel à un moment donné il le reste car le flux de la vorticité est constant. Ainsi on ne peut pas créer de vorticité si on est dans ces conditions.** Il reste à voir dans quel cas on peut créer de la vorticité.

## 4.3 Sources de vorticité

### 4.3.1 Viscositt 

Si on prend un cylindre rempli d'eau. Au repos il n'y a pas de vorticité. Si on fait tourner le solide, au bout d'un certain temps on va avoir une rotation

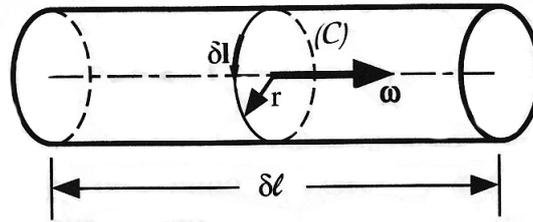


FIGURE 4.2 – Calcul du moment cinétique pour un élément de tube de vorticité.

du fluide et donc de la vorticité. Le cylindre peut mettre en mouvement le fluide grâce à la viscosité. Ainsi on a un profil de vitesse avec un gradient de vitesse qui crée de la vorticité. On peut aussi voir que pour avoir de la vorticité il faut des forces tangentielles et pour cela il faut de la viscosité. On peut prendre aussi l'exemple d'un fluide qui arrive sur une plaque comme sur la FIG 4.3 où on voit très bien le gradient de vitesse et donc la rotation locale des particules de fluides.

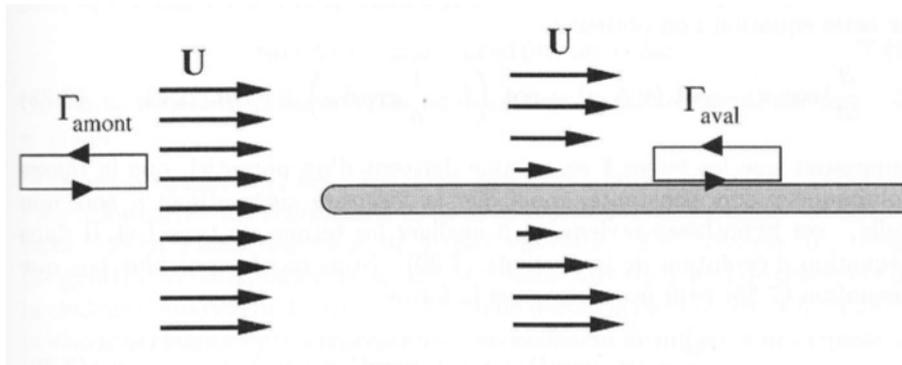


FIGURE 4.3 – Création de vorticité associ e aux forces de viscosité dans un fluide incident sur une plaque plane.

### 4.3.2 Forces de volume non-conservatives

On a plusieurs types de forces non-conservatives :

- Force de Coriolis qui apparait sous la forme d'un terme  $-2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}$  lorsqu'on écrit le Principe Fondamental de la Dynamique dans le référentiel tournant.
- Force magnétique<sup>2</sup> :  $\frac{1}{\rho}(\mathbf{j} \wedge \mathbf{B})$

2. Tabelaing Patrick : expérience avec 10000 aimants

Ces forces créent de la vorticité car elles créent du cisaillement.

### 4.3.3 Fluides non barotropes

Cela signifie que les isobares sont différentes des isopycnes<sup>3</sup>. Ainsi le centre de gravité et le centre de pouss  e ne sont pas confondus. Ainsi les particules de fluides peuvent tourner comme sur la FIG 4.4.

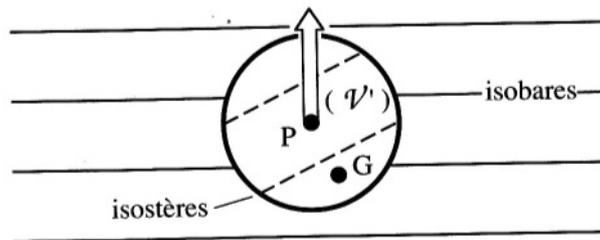


FIGURE 4.4 –   quilibre des forces de pression et de gravité dans un fluide non barotrope.

On peut donner comme exemple de fluide non barotrope un fluide entre deux plaques verticales avec des températures différentes.

## 4.4 Dynamique de la vorticité

### 4.4.1 Equation de la vorticité

Si on prend le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes on obtient :

$$\text{rot} \left( \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} P + \mathbf{f} + \nu \Delta \mathbf{u} \right)$$

On suppose que les forces extérieures dérivent d'un potentiel et que le fluide est incompressible donc  $\rho = \text{cte}$ . Ainsi les deux termes en  $\text{grad} P$  et  $\mathbf{f}$  vont s'annuler.

De plus comme  $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$  on a par les formules vectorielles que :

$$\begin{aligned} \text{rot}(\Delta \mathbf{u}) &= \text{rot}(-\text{rot rot})\mathbf{u} \\ &= -\text{rot rot}(\text{rot}\mathbf{u}) \\ &= \Delta \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

3. Ce sont les lignes joignant les points de même densité.

Et que :

$$\mathbf{grad} \left( \frac{u^2}{2} \right) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{rot} \mathbf{u}$$

Et ainsi :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u}) = \underbrace{\mathbf{rot} \left( \mathbf{grad} \left( \frac{u^2}{2} \right) \right)}_{=0} - \mathbf{rot}(\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega})$$

On peut alors développer le rotationnel tout en sachant que  $\mathit{div}(\mathbf{u}) = \mathit{div}(\boldsymbol{\omega}) = 0$  :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u}$$

Donc l'équation de départ devient :

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u} = 0 + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}$$

Et donc on trouve l'équation de Helmholtz :

$$\boxed{\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}} \quad (4.3)$$

Notons que cette équation de transport de la vortacité s'applique à tous les écoulements. La description d'un écoulement à partir de champ de vortacité est toujours une possibilité pour la description par l'intermédiaire du champ de vitesse. Cette équation montre qu'un fluide parfait qui est initialement irrotationnel le reste.

#### 4.4.2 Vortacité gelée

On a vu dans la démonstration du théorème de Kelvin que :

$$\frac{D\mathbf{dl}}{Dt} = \mathbf{dl} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u}$$

Qui ressemble à l'équation de Helmholtz et même égale dans le cas d'une fluide parfait :

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u}$$

Les lignes de vortacité coïncide avec les lignes matérielles car elles sont régies par les mêmes équations. Ainsi on dit que la vortacité est gelée dans un fluide parfait car les lignes de vortacité suivent les lignes matérielles.

### 4.4.3 Étirement et torsion de la vorticité

L'idée est que le terme en  $\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad } \mathbf{u}$  est un terme de source de vorticité dans le fait qu'il couple la vorticité existante et le gradient de vitesse. Nous allons représenter les variations de  $\boldsymbol{\omega}$  à partir des déformations d'un élément de tube de vorticité de longueur  $\delta l$  de section  $S$  parallèle à  $\boldsymbol{\omega}$ . Le terme d'étirement  $\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad } \mathbf{u}$  peut être décomposé suivant deux directions : l'une parallèle à la direction du vecteur  $\boldsymbol{\omega}$  suivant  $Oz$  l'autre quand le plan perpendiculaire. On a donc :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$$

Et donc on peut écrire en projetant l'équation de Helmholtz suivant  $e_z$  ou une direction perpendiculaire :

$$\frac{D\omega_z}{Dt} = \omega_z \partial_z w$$

$$\frac{D\omega_\perp}{Dt} = \omega_z \partial_z u_\perp$$

La première équation nous dit que si le tube de vorticité sera rétrécit car comprimé donc  $\delta l$  augmente pendant que  $S$  diminue. Or le flux de vorticité est conservé alors la vorticité  $\omega_z$  doit forcément croitre. On peut faire le raisonnement inverse lorsque le tube de vorticité se dilate.

La seconde équation rend compte de la torsion su tube de vorticité. Le tube tourne à cause du gradient de vitesse selon la direction perpendiculaire au tube.

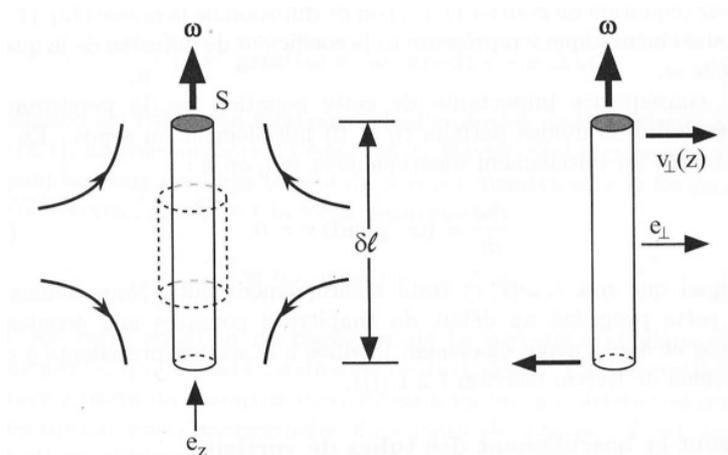


FIGURE 4.5 –   gauche la variation de la vorticité  $\boldsymbol{\omega}$  associé à la déformation d'un tube de vorticité par étirement.   droite la variation de  $\boldsymbol{\omega}$  par basculement d'un tube de vorticité.

## Chapitre 5

# Écoulements de fluides parfaits

On considère un fluide **incompressible** et **non-visqueux**. Ainsi il vérifie l'équation d'Euler :

$$\rho D_t \mathbf{u} = \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u} = -\mathbf{grad} P + \rho \mathbf{f} \quad (5.1)$$

### 5.1 Écoulements potentiels

D'après le théorème de Kelvin, pour un fluide parfait, un écoulement irrotationnel au départ reste irrotationnel tout le long de l'expérience. Donc à tout temps on a  $\mathbf{rot} \mathbf{u} = 0$ . Donc on peut définir<sup>1</sup> une fonction scalaire  $\Phi$ , appelé *potentiel des vitesses* qui vérifie :

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad} \Phi \quad (5.2)$$

Or le fluide est incompressible donc  $div(\mathbf{u}) = 0$  donc :

$$div(\mathbf{grad} \Phi) = \Delta \Phi = 0 \quad (5.3)$$

On retrouve l'équation de Laplace qui est la même équation en électrostatique en l'absence de charge. Il s'agit d'une équation différentielle donc il faut des conditions aux limites. Or dans le cas d'un fluide parfait on a :

$$u_{\perp \text{paroi}} = v_{\text{paroi}}$$

Si on définit une direction normale à la paroi  $n$  alors on a :

$$\partial_n \Phi = 0$$

Pour deux fluides non miscibles on a :

$$\partial_n \Phi_1 = \partial_n \Phi_2$$

---

1. On peut le faire car on fait que pour tout champ scalaire  $\Phi$  on a  $\mathbf{rot}(\mathbf{grad} \Phi) = 0$  et donc la condition d'irrotationnalité est à tout instant vérifiée.

### 5.1.1 Unicité de la solution

Ce qui est essentiel est le système de conditions aux limites car c'est ici que se trouve toute la physique du système. Pour un système donné est-ce que la solution est unique ou pas ?

Supposons qu'il existe deux solutions avec les mêmes conditions aux limites  $(\mathbf{u}_1, \Phi_1)$  et  $(\mathbf{u}_2, \Phi_2)$ . On pose alors :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \quad \Phi = \Phi_1 - \Phi_2$$

Pour montrer qu'un champ de vecteur est nul on peut intégrer le carré de celui là qui est positif :

$$\int_V \mathbf{u}^2 dV = \int_V \mathbf{u} \cdot \text{grad } \Phi dV$$

Or on sait que :

$$\text{div}(\Phi \mathbf{u}) = \underbrace{\Phi \text{div}(\mathbf{u})}_{=0} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } \Phi$$

Donc :

$$\int_V \mathbf{u}^2 dV = \int_V \text{div}(\Phi \mathbf{u}) dV = \oint_S \Phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{dS}$$

Pour le cas d'une paroi on a  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{dS} = 0$  car la vitesse est tangente à la paroi.

Pour le cas de la surface à l'infini on peut montrer qu'une perturbation qui vient de l'infini peut s'écrire tel que :  $\Phi = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} + \dots$  et donc l'intégrale sera nulle car  $\Phi$  sera nulle à l'infini.

Si on applique la démonstration à  $\mathbf{u}_1$  alors on montre que l'on ne peut pas avoir d'écoulement irrotationnel dans un volume fini. Mais la perturbation venant de l'infini ne s'applique qu'à la différence  $\Phi$  et pas à  $\Phi_1$  ou  $\Phi_2$  car on a une vitesse à l'infini et donc pas  $\Phi$  en puissance négative de  $r$ .

Il existe des écoulements régis par l'équation d'Euler alors que l'on n'est pas à très grand nombre de Reynolds en effet pour certaines symétries on a  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$  et ainsi on a  $\Delta \mathbf{u} = 0$ .

Cette démonstration ne fonctionne que si on est dans un espace simplement connexe (par exemple un tore ne fonctionne pas). L'unicité de la vitesse est conservé mais le potentiel peut prendre plusieurs valeurs.

### 5.1.2 Potentiel d'écoulements élémentaires

- Pour un écoulement uniforme en 2 dimensions on a :

$$\begin{cases} u = U_0 = \partial_x \Phi = \partial_y \psi \\ v = 0 = \partial_y \Phi = -\partial_x \psi \\ w = 0 \end{cases} \quad \psi : \text{fonction de courant}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \Phi = U_0 x \\ \psi = U_0 y \end{cases}}$$

Les iso- $\Phi$  sont les plans perpendiculaires à  $(O_x)$ .

Les iso- $\psi$  sont les plans perpendiculaires à  $(O_y)$ .

- Tourbillon :

$$\begin{cases} u_r = 0 \\ u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi = \frac{\Gamma\theta}{2\pi} \\ \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \end{cases}$$

Les iso- $\Phi$  sont tel que  $\theta = cte$  donc sont les plans passant par l'origine.

Les iso- $\psi$  sont tel que  $r = cte$  donc sont des cercles (ou cylindre ou sphère).

Ici on est pas dans un espace simplement connexe donc le potentiel est multi-valué car  $\phi$  est défini à  $2\pi$  près.

**Les iso- $\Phi$  et les iso- $\psi$  sont toujours perpendiculaires.**

$\Gamma$  est la circulation. En effet :

$$\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\Gamma}{2\pi} \oint_C d\theta = \Gamma$$

- Source ou puits : Un écoulement qui s'écoule à partir d'un point ou vers un point (ou une ligne). Il s'écoule avec un certain débit volumique  $Q$ . Et on a :

$$\begin{cases} u_r = \frac{Q}{2\pi r} \\ u_\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \\ \psi = \frac{Q\theta}{2\pi} \end{cases}$$

On définit le débit comme :

$$d = \oint_{C_r} u_r \cdot dl = Q$$

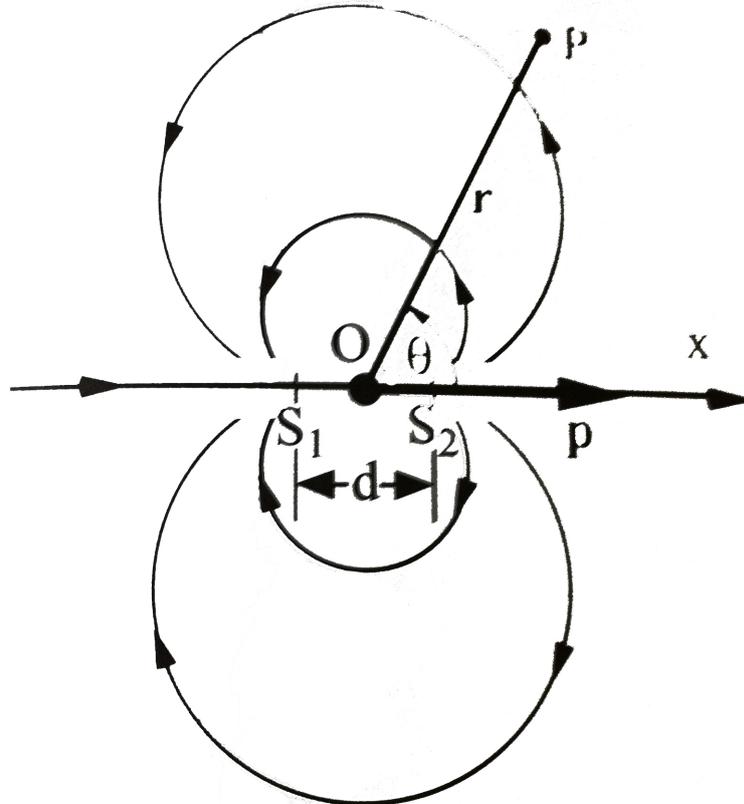


FIGURE 5.1 – Écoulement à deux dimensions créé par l'ensemble d'un puits  $S_1$  et une source  $S_2$ , de même débit  $Q$ .

• Lorsque l'on prend un puits  $S_1$  de débit  $-Q$  et une source  $S_2$  avec un débit  $+Q$  comme sur la FIG 5.1. Alors on peut sommer les potentiels pour trouver l'écoulement :

$$\Phi = \Phi_1(\text{puits}) + \Phi_2(\text{source})$$

$$\Phi_1 = -\frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)$$

$$\Phi_2 = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_0}\right)$$

Après on décompose les vecteurs sachant que  $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 = \mathbf{d}$  :

$$r_1 = \sqrt{r_1^2} = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}$$

Or  $d \ll r$  donc le terme en  $d^2$  disparaît :

$$r_1 = r \sqrt{1 + \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^2}} = r \left( 1 + \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{2r^2} \right)$$

$$\ln(r_1) = \ln(r) + \ln \left( 1 + \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{2r^2} \right) = \ln(r) + \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{2r^2}$$

De même :

$$\ln(r_2) = \ln(r) - \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{2r^2}$$

Ainsi on a :

$$\Phi = -\frac{Q}{2\pi} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^2}$$

On pose alors  $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$  et on a :

$$\Phi = -\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{2\pi r^2}$$

$$u_r = \partial_r \Phi = \frac{p \cos \theta}{2\pi r^2} \quad u_\theta = \frac{1}{r} \partial_\theta \Phi = \frac{p \sin \theta}{2\pi r^2} \quad (5.4)$$

On peut calculer la fonction de courant :

$$\psi = \frac{p \sin \theta}{2\pi r} = \frac{\mathbf{p} \wedge \mathbf{r}}{2\pi r^2}$$

On peut effectuer le même travail pour le dipôle à trois dimensions et on trouve les relations :

$$\Phi = -\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad u_r = \frac{p \cos \phi}{2\pi r^3} \quad u_\phi = \frac{p \sin \phi}{4\pi r^3}$$

*On va utiliser ces écoulements élémentaires pour décrire les écoulements autour d'un obstacle. En effet, par suite de la linéarité de l'équation de Laplace, des combinaisons linéaires de solutions de celle-ci le vérifieront également. On peut donc construire un champ de vitesse d'un problème potentiel en superposant des solutions simples, de façon à satisfaire aux conditions aux limites pour la fonction totale.*

### 5.1.3 Exemples d'écoulements potentiels simples

#### Écoulement autour d'un cylindre circulaire

On considère un écoulement uniforme de vitesse  $\mathbf{U}$  perturbé par la présence d'un cylindre circulaire de rayon  $R$  et d'axe perpendiculaire à la vitesse. Compte tenu de la symétrie on se placera à 2 dimensions. On repère la particule de fluide en coordonnées cylindrique par le vecteur  $\mathbf{r}$  et donc on a :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

\* On considère tout d'abord un cylindre sans circulation c'est à dire que pour n'importe quel cercle  $C$  autour du cylindre on a :

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

On considère en coordonnées polaires à deux dimensions, le potentiel  $\Phi$  des qui résulte de la superposition des potentiels correspondant à un écoulement uniforme de vitesse  $\mathbf{U}$  orientée dans la direction  $\theta$  et à un dipôle de moment  $\mathbf{p}$  orienté dans la même direction donc, par superposition des solutions, on a :

$$\Phi = \Phi_{\text{écoulement uniforme}} + \Phi_{\text{dipôle}} = Ur \cos \theta - \frac{p \cos \theta}{2\pi r} = \left( Ur - \frac{p}{2\pi r} \right) \cos \theta$$

Cette expression constitue une première approche logique car le potentiel du dipôle sera en effet le première terme non nul du développement multipolaire. Il faut à présent utiliser les conditions aux limites de la non-pénétration du fluide dans le cylindre :

$$\partial_n \Phi = 0 = \partial_r \Phi|_{r=R} = U \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{2\pi R^2} = 0$$

$$\boxed{p = -2\pi R^2 U}$$

Et donc on a :

$$\Phi = Ur \cos \theta \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right)$$

Et donc on a les vitesses :

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = U \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -U \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta$$

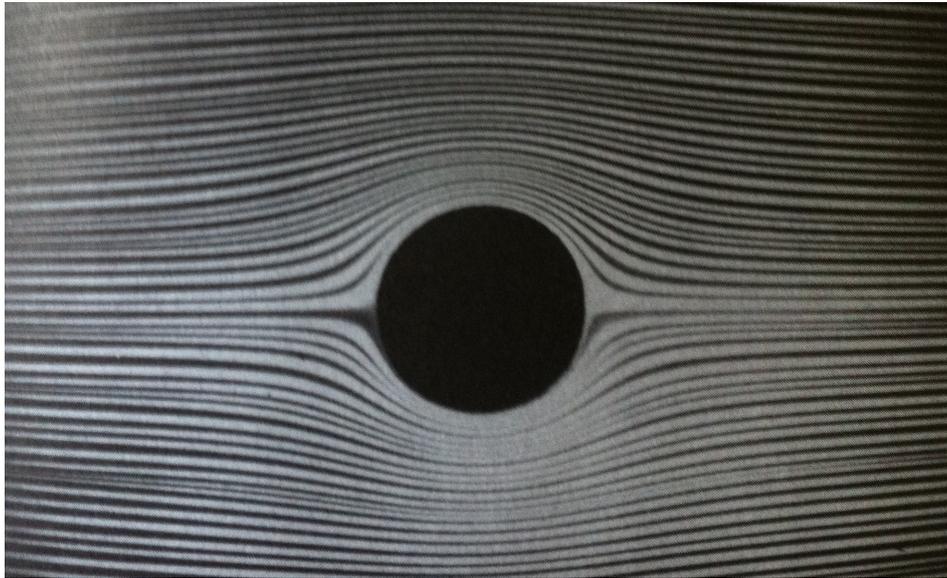


FIGURE 5.2 – *Forme des lignes de courant autour d'un cylindre circulaire placé dans un écoulement uniforme à l'infini, dans le cas où la circulation de la vitesse autour du cylindre est nulle.*

La solution de l'équation de Laplace étant unique, ce champ de vitesse, qui satisfait les conditions aux limites à l'infini et sur la surface du cylindre, est donc bien la solution de notre problème. On peut alors calculer la fonction de courant  $\Psi$  :

$$\Psi = Ur \sin \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

\* Si on prend à présent un cylindre avec circulation on doit ajouter le potentiel d'un tourbillon de circulation  $\Gamma$ . Cela vérifie les conditions aux limites sur le cylindre et à l'infini donc on peut ajouter le potentiel à celui sans circulation et on obtient :

$$\Phi = \Phi_{\text{écoulement uniforme}} + \Phi_{\text{dipôle}} + \Phi_{\text{tourbillon}} = Ur \cos \theta \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma \theta}{2\pi}$$

Et donc on obtient les solutions à partir de la superposition de solutions qui vérifient indépendamment les conditions aux limites :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{cylindre}} + \mathbf{v}_{\text{tourbillon}}$$

Et donc :

$$u_r = U \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta$$

$$u_\theta = -U \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Pour chercher les points d'arrêt on doit avoir  $u_\theta(r = R) = 0$  et donc on aura :

$$u_\theta(r = R) = -U \left( 1 + \frac{R^2}{R^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \quad \text{soit} \quad \sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi R U}$$

Ainsi si  $0 < |\Gamma| < 4\pi R|U|$  alors on a deux points d'arrêt  $P_1$  et  $P_2$  symétriques. Pour  $|\Gamma| > 4\pi R|U|$  on a plus de point d'arrêt sur la surface du cylindre. On a alors un point d'arrêt unique tel que  $\sin \theta = \pm 1$  et on a :

$$-|U| \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{|\Gamma|}{2\pi r} = 0$$

Ainsi on a la solution :

$$r = R \left( \frac{|\Gamma|}{4\pi R|U|} + \sqrt{\left( \frac{|\Gamma|}{4\pi R|U|} \right)^2 - 1} \right)$$

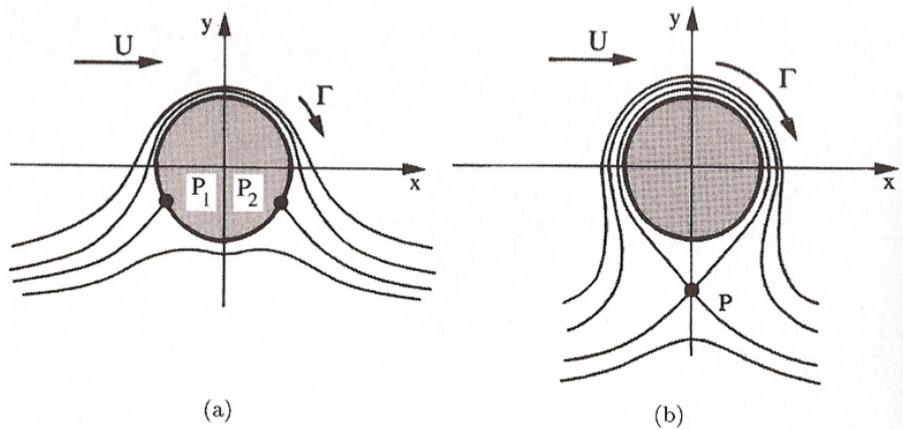


FIGURE 5.3 – *Forme des lignes de courant autour d'un cylindre circulaire placé dans un écoulement uniforme à l'infini. Cas où la circulation  $\Gamma$  de la vitesse autour du cylindre est non nulle (négative dans le cas de la figure); (a) :  $0 < |\Gamma| < 4\pi R|U|$ ; (b)  $|\Gamma| > 4\pi R|U|$*

## 5.2 Relation de Bernoulli

La relation de Bernoulli traduit le bilan d'énergie pour les fluides parfaits, incompressibles dans le cas où les forces en volume  $\mathbf{f}$  dérivent d'un potentiel  $\phi$ .

### 5.2.1 Conservation de l'énergie

Le bilan d'énergie que l'on avait fait est :

$$\frac{\rho}{2} D_t(u^2) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \text{div}(\vec{\sigma})$$

Or on est dans le cas d'un fluide parfait non-visqueux :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$$

$$\mathbf{u} \cdot \text{div}(\vec{\sigma}) = u_i \partial_j (-P\delta_{ij}) = -\mathbf{u} \cdot \text{grad } P$$

On se place dans le régime stationnaire donc :

$$\partial_t(u^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho}{2} D_t(u^2) = \mathbf{u} \cdot \text{grad} \left( \frac{\rho}{2} u^2 \right)$$

De plus :

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \text{grad}(-\phi)$$

Et donc :

$$\mathbf{u} \cdot \text{grad} \left( \frac{\rho u^2}{2} + P + \phi \right) = 0$$

$$D_t \left( \frac{\rho u^2}{2} + P + \phi \right) = 0$$

Ainsi on a le long d'une ligne de courant.

$$\boxed{\frac{\rho u^2}{2} + P + \phi = cte}$$

La quantité  $\frac{\rho u^2}{2}$  homogène à une pression, est appelée pression dynamique.

Si maintenant on n'est pas dans le régime stationnaire mais que le fluide est irrotationnel alors on se place un écoulement potentiel et on a :  $\mathbf{u} = \text{grad } \Phi$  et donc l'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho D_t \mathbf{u} = -\text{grad } P - \text{grad } \phi$$

Or on a :

$$D_t \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{u}$$

$$\text{grad} \frac{u^2}{2} = \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge \text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{u}$$

Donc on a :

$$D_t \mathbf{u} = \partial_t(\mathbf{grad} \Phi) + \mathbf{grad} \frac{u^2}{2}$$

Et ainsi on obtient :

$$\mathbf{grad} \left( \rho \partial_t \Phi + \frac{\rho u^2}{2} + P + \phi \right) = 0$$

Ainsi partout dans le fluide on a :

$$\rho \partial_t \Phi + \frac{\rho u^2}{2} + P + \phi = cte$$

### 5.2.2 Cas de la couche limite

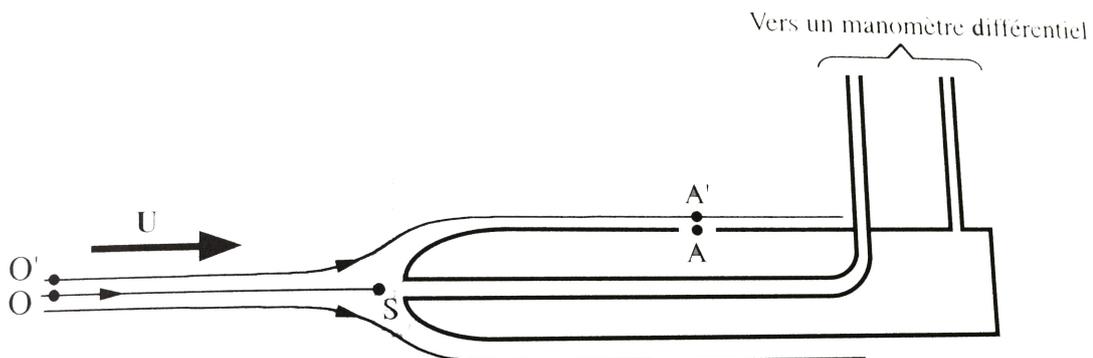


FIGURE 5.4 – Principe du tube de Pitot. La relation de Bernoulli est appliquée le long des deux lignes de courant allant de  $O$  à  $S$  et de  $O'$  à  $A'$

Le *tube de Pitot* est une application directe de l'équation de Bernoulli car il permet de déterminer la vitesse d'un écoulement fluide à partir d'une mesure de pression. Ce dispositif est constitué de deux tubes concentriques, représenté sur la FIG 5.4 avec un tube intérieur percé d'une ouverture  $S$  à son extrémité placée face à l'écoulement et un autre tube percé d'une série d'orifices  $A$  répartis sur une couronne. Un manomètre différentiel relié à chacun des deux tubes permet de mesurer la différence de pression  $\Delta P$  entre  $S$  et  $A$ .

Si on se place à  $(u, v, w) = (u, 0, 0)$  alors :

$$\text{div}(\mathbf{u}) = \partial_x u = 0$$

L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{u} = -\text{grad}P + \nu \Delta \mathbf{u}$$

Qui donne :

$$0 = \partial_z P + 0$$

Dans la couche limite la pression ne dépend pas de  $z$ .

Négligeons les effets de viscosité en les supposant seulement importants dans une mince couche limite près de la paroi des tubes. Nous pouvons appliquer l'équation de Bernoulli le long de la ligne de courant  $OS$  qui coïncide avec l'axe des tubes :

$$p_O + \rho \frac{U^2}{2} = P_S$$

On applique également la relation de Bernoulli sur la ligne de courant  $O'A'$  :

$$P_{O'} + \rho \frac{U^2}{2} = P_{A'} + \rho \frac{u_{A'}^2}{2} = P_A + \rho \frac{u_{A'}^2}{2}$$

Comme nous l'avons vu, la pression reste constante lorsqu'on traverse l'écoulement quasi-unidirectionnel dans la couche limite normalement à l'écoulement. Et on a donc  $P_A = P_{A'}$ . Par ailleurs, la vitesse en  $A'$  est pratiquement égale à  $U$ , si  $A'$  est suffisamment en aval de  $S$  et si la section du tube de Pitot est faible devant la taille du canal d'écoulement. Enfin les pressions aux points  $O$  et  $O'$ , infiniment voisins l'un de l'autre et situés loin en amont de l'obstacle, ont la même valeur. On en déduit alors, en combinant les équations on a :

$$\boxed{\Delta P = P_S - P_A = \rho \frac{U^2}{2}} \quad (5.5)$$

## 5.3 Forces exercées par un écoulement de fluide parfait

### 5.3.1 Exemples simples

On se place dans le cas bidimensionnel. Nous allons calculer la portance  $\mathbf{F}_p$  et la traînée  $\mathbf{F}_t$  c'est à dire les forces exercées sur le corps respectivement dans les directions perpendiculaire et parallèle à l'écoulement.

On suppose tout d'abord qu'on a un objet symétrique. Si on note  $\Phi$  le potentiel lorsque  $\mathbf{U}$  provient de l'infini vers la gauche et  $\Phi'$  lorsque  $\mathbf{U}$  provient

de l'infini vers la droite alors on vérifie en changeant ou non l'axe de sens on a :

$$\Phi'(x) = \Phi(-x) \quad \& \quad -\Phi(x) = \Phi'(x)$$

Donc :

$$\Phi(-x) = -\Phi(x)$$

Ainsi on a  $\Phi$  impaire en  $x$  donc  $u$  paire et  $v$  impaire et donc  $P$  est paire donc la force de traînée est nulle. Ce résultat se généralise pour un objet non symétrique.

À présent si on considère une aile d'avion qui fait un angle  $\theta$  avec l'horizontal (défini par l'écoulement) et d'une longueur  $l$  selon  $x$ . Alors on peut noter  $P_H(x)$  et  $u_H(x)$  la pression et la vitesse au dessus de l'aile et  $P_B(x)$  et  $u_B(x)$  la pression et la vitesse au dessous de l'aile. Donc on a :

$$F_p = \int_0^l (P_B(x) - P_H(x)) dx = \frac{\rho}{2} \int_0^l (u_H^2 - u_B^2) dx = \frac{\rho}{2} \int_0^l (u_H + u_B)(u_H - u_B) dx$$

On suppose que  $(u_H + u_B) = 2U$  et donc :

$$F_p = \rho U \int_0^l (u_H - u_B) dx = -\rho U \left[ \int_0^l u_B dx + \int_l^0 u_H dx \right]$$

D'où :

$$F_p = -\rho U \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = -\rho U \Gamma$$

### 5.3.2 Cas général pour un objet bidimensionnel

On considère un cylindre, comme représenté sur la FIG 5.5, autour de l'objet de rayon  $r$  pour éviter l'intégration du champ de pression sur toute la surface de l'objet.

On intègre l'équation d'Euler :

$$\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u} = -\mathbf{grad} P + \mathbf{f}$$

$$\int_V (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u} + \mathbf{grad} P) = \mathbf{F}_{obj \rightarrow fluide}$$

Et donc :

$$\mathbf{F}_{fluide \rightarrow obj} = - \int_V (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u} + \mathbf{grad} P)$$

Si on prend un cylindre assez grand on va connaître la vitesse car on connaît la vitesse  $\mathbf{U}$  à l'infini. on a :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u}|_i = u_j \partial_j u_i = \partial_j (u_j u_i) - u_i \partial_j u_j$$

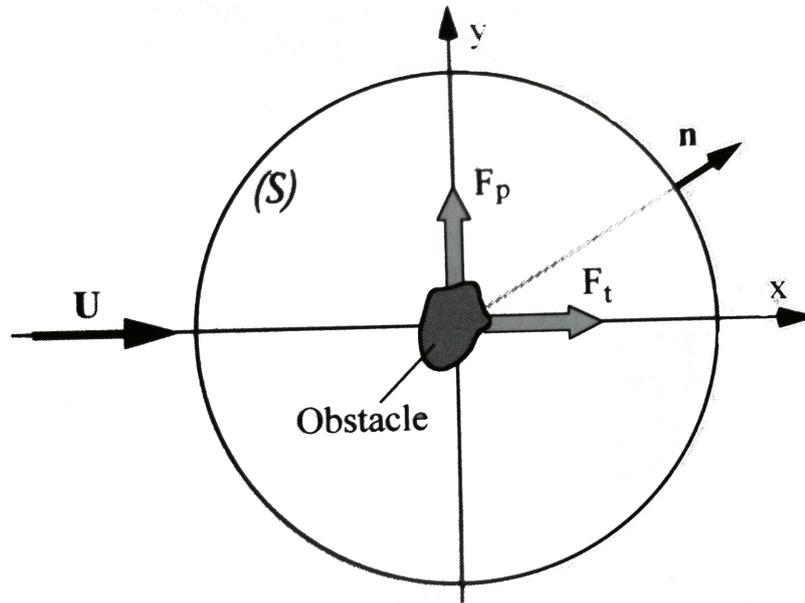


FIGURE 5.5 – Évaluation de la portance  $\mathbf{F}_p$  et de la trainée  $\mathbf{F}_t$  sur un obstacle cylindrique placé dans un écoulement uniforme, en présence d'une circulation de la vitesse autour de l'obstacle.  $(S)$  représente la surface du cylindre circulaire à l'intérieur duquel est effectué le bilan de quantité de mouvement.

Or :

$$\partial_j u_j = \text{div}(\mathbf{u}) = 0$$

Et :

$$\text{grad}|_i P = \partial_i P = \partial_j (P \delta_{ij})$$

Donc la composante  $i$  de  $\mathbf{F}$  est :

$$F_i = - \int_V \partial_j (\rho u_i u_j + P \delta_{ij}) dV = - \int_S (\rho u_i u_j + P \delta_{ij}) dS_j$$

$$\mathbf{F} = - \int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}) + P d\mathbf{S}$$

Or :

$$P + \frac{u^2}{2} = P_0 + \frac{U^2}{2}$$

Donc :

$$\mathbf{F} = - \int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}) + \left( \left( \frac{P_0}{\rho} + \frac{U^2}{2} \right) - \frac{u^2}{2} \right) d\mathbf{S}$$

On décompose la vitesse à une distance grande de l'obstacle :

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

Où :

- $u_1$  est la vitesse due à la circulation et on a  $u_1 \sim \frac{1}{r}$
- $u_2$  est le reste qui est composé de multipôle et on prend un quadripôle  $u_2 \sim \frac{1}{r^2}$

Il reste à intégrer sur la surface extérieure car la surface intérieure soit ne contribue pas soit a été compté dans  $\mathbf{F}$ .

Les seuls termes qui ne vont pas s'annuler pour  $r$  grand est  $\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{u}_1$ . On trouve :

$$\mathbf{F} = -\rho U \left[ \int_0^{2\pi} (u_{1x} \cos \theta + u_{1y} \sin \theta) r d\theta \right] \mathbf{e}_x - \rho U \left[ \int_0^{2\pi} (u_{1y} \cos \theta - u_{1x} \sin \theta) r d\theta \right] \mathbf{e}_y$$

$$F_t = -\rho U \left[ \int_0^{2\pi} (u_{1x} \cos \theta + u_{1y} \sin \theta) r d\theta \right] = -\rho U \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{dS} = -\rho U \int_V \text{div}(\mathbf{u}_1) dV = 0$$

$$\boxed{F_t = 0} \quad (5.6)$$

Si cette force n'était pas nulle alors cette force travaillerait mais il faudrait que le fluide évacue de l'énergie mais il ne peut pas car il est non visqueux. Donc on ne peut pas avoir de force qui travaille.

Si on note  $\mathbf{dl} = (-r \sin \theta d\theta, r d\theta \cos \theta)$  un déplacement sur le cylindre alors :

$$F_p = \rho U \left[ \int_0^{2\pi} (u_{1y} \cos \theta - u_{1x} \sin \theta) r d\theta \right] = -\rho U \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{dl} = -\rho U \Gamma$$

Cette force est perpendiculaire au déplacement donc elle ne travaille pas. On l'appelle *force de Magnus* et elle peut s'exprimer de façon vectorielle en utilisant un vecteur circulation  $\mathbf{\Gamma}$  axial parallèle à la direction  $z$ .  $\mathbf{\Gamma}$  sera orienté vers l'arrière du plan de la figure, si la rotation se fait dans le même sens que la FIG 5.5. La portance devient alors :

$$\mathbf{F}_p = \rho \mathbf{U} \wedge \mathbf{\Gamma} \quad (5.7)$$

### 5.3.3 Origine de la circulation

Pour une aile d'avion il faut qu'il y ait un angle entre l'horizontale et la direction de l'aile. La portance est proportionnel à l'angle que fait l'aile avec l'horizontal (son sinus en fait) et la vitesse de l'écoulement.

### 5.3.4 Objets tridimensionnels

À trois dimensions c'est un peu plus compliqué. Pour des objets qui n'ont pas de direction privilégiée on ne peut pas se ramener à un cas simple à deux dimensions et il faut traiter la couche limite. Pour une aile d'avion par exemple on a une direction privilégiée avec une longueur d'aile bien plus grande que ses autres dimensions comme sur la FIG 5.6. Localement on peut se placer à deux dimensions sauf au bout de l'aile. Dans ce cas là on a un vortex qui se crée à l'arrière de l'avion pour que la vorticité de l'écoulement soit nul puisque qu'un vortex se crée au bout de l'aile.

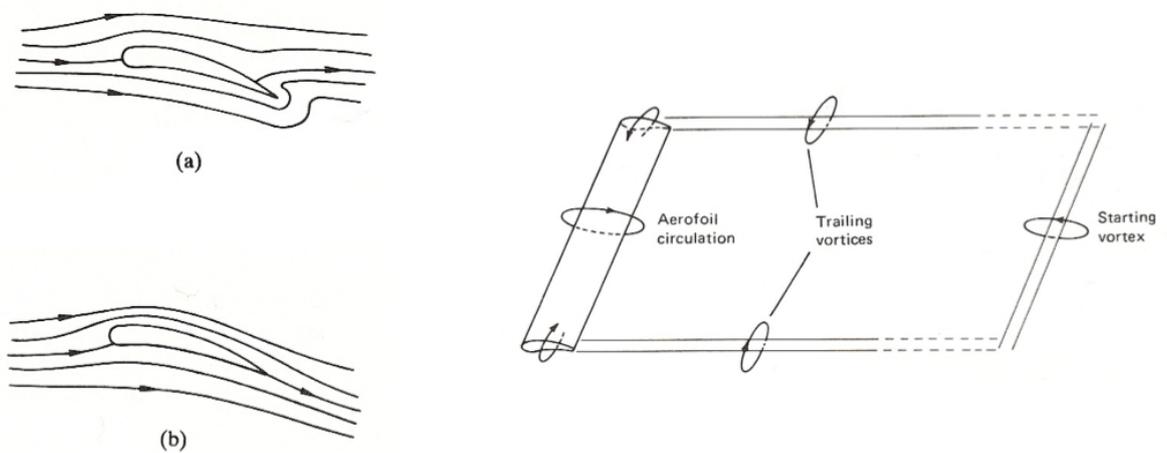


FIGURE 5.6 – À gauche, on a une représentation de l'écoulement autour d'une aile d'avion. À droite on a l'explication de la création d'un tourbillon à l'arrière de l'aile pour en avoir un à l'avant.

### 5.3.5 Cas d'un écoulement non stationnaire

  partir de la seconde expression de Bernoulli en non-stationnaire :

$$\rho \partial_t \Phi + \frac{\rho u^2}{2} + P + \phi = cte$$

On peut montrer qu'il existe une force de traînée non nulle. Par exemple pour une sphère de volume  $V$  et de vitesse  $U$  qui accélère dans un fluide on a :

$$F_t = -\frac{\rho V}{2} \frac{dU}{dt}$$

Où  $\frac{\rho V}{2}$  est la masse de fluide accéléré par la sphère. On parle de *masse ajoutée*.  
Le travail de  $F_t$  est non nul mais n'est pas dissipé.

## Chapitre 6

# Écoulements rampants

Rappelons tout d'abord l'expression du nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta}$$

Physiquement ce nombre représente le rapport du temps caractéristique  $\tau_d$  de transport de quantité de mouvement par diffusion sur la distance  $L$  au temps caractéristique  $\tau_c$  de transport de quantité de mouvement par convection sur la distance  $L$ . Il représente aussi le rapport des contraintes associées à l'inertie du fluide ( $\rho U^2$ ) aux contraintes de frottement visqueux ( $\frac{\eta U}{L}$ ).

Les écoulements à petit nombre de Reynolds, parfois appelés écoulements rampants, peuvent avoir des origines physiques très variées, puisque ce nombre est obtenu par combinaison de trois facteurs différents :

1. Déplacements d'objets microscopiques (bactéries, particules) :  $L \ll 1 \Rightarrow Re \ll 1$
2. Déplacements à vitesse lente de matériaux géologiques (glacier, manteau terrestre) :  $U \ll 1 \Rightarrow Re \ll 1$
3. Écoulements de fluides très visqueux (goudrons, pâtes, miel) :  $\eta \gg 1 \Rightarrow Re \ll 1$

### 6.1 Équation de stokes

On considère un fluide incompressible (dans le cas du faible nombre de Reynolds on doit avoir  $\frac{Ma^2}{Re} \ll 1$ ). L'équation de Navier-Stokes s'écrit alors :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{u} = -\text{grad } P + \rho \mathbf{f} + \eta \Delta \mathbf{u}$$

On peut éliminer le terme  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u}$  car on se place à petits Reynolds et il compare les effets visqueux au terme inertiel. Or pour le terme en  $\partial_t \mathbf{u}$  on peut dire qu'il est d'ordre  $\frac{U}{L/U} = \frac{U^2}{L}$  qui est le même ordre de grandeur que le terme en  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u}$ . Dans ce cas là on considère que le temps caractéristique est le temps de l'écoulement et donc qu'il n'y a pas d'excitation extérieure avec un temps caractéristique. Ce n'est pas le cas si on considère une échelle de temps extérieure (type excitation) ; dans ce cas là on introduit le nombre de Strouhal.

On aboutit à l'équation de Stokes :

$$\boxed{-\mathbf{grad}(P) + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = 0} \quad (6.1)$$

Si la force volumique dérive d'un potentiel tel que  $\rho \mathbf{f} = -\mathbf{grad}(\phi)$  (où  $\phi$  est en fait homogène à une pression due aux forces volumiques) on a :

$$\boxed{-\mathbf{grad}(P + \phi) + \mu \Delta \mathbf{u} = -\mathbf{grad}(P') + \mu \Delta \mathbf{u} = 0} \quad (6.2)$$

Par la suite on omettra le ' par commodité.

### 6.1.1 Écoulements parallèles

On considère un cas d'écoulement unidimensionnel :  $\mathbf{u}(u, v, w) = (u, 0, 0)$  et donc :

$$\text{div}(\mathbf{u}) = \partial_x u = 0$$

Et maintenant le terme :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u} = u \partial_x u \mathbf{e}_x = 0$$

Et donc même à grands nombres de Reynolds cet écoulement vérifie l'équation de Stokes mais en réalité à aux nombres de Reynolds le champ va dépendre explicitement du temps et donc le terme en  $\partial_t \mathbf{u}$  ne sera pas nul. On peut donner comme exemple l'écoulement de Poiseuille plan ou de couette.

### 6.1.2 Autres formes de l'équation

Si on réécrit l'équation sous forme indicielle alors :

$$-\partial_i P + \eta \partial_j \partial_j u_i = \partial_j (-\delta_{ij} P + \eta \partial_j u_i + \eta \partial_i u_j)$$

On peut rajouter le dernier terme car il s'agit de la divergence de  $\mathbf{u}$  qui est nul. Et on reconnaît le tenseur des contraintes :

$$\partial_j \sigma_{ij} = 0$$

Et donc :

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{\sigma}) = 0} \quad (6.3)$$

On peut réécrire cette équation également sous 3 autres formes. La vorticité s'écrit  $\boldsymbol{\omega}$  et en écrivant que  $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$  alors on peut r ecrire l'équation :

$$\boxed{\mathbf{grad}P = -\eta \mathbf{rot}(\boldsymbol{\omega})} \quad (6.4)$$

Ceci implique en particulier que :

$$\boxed{\Delta P = 0} \quad (6.5)$$

Si on prend le rotationnel de l'équation (6.4) alors on trouve que :

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{\omega} = 0} \quad (6.6)$$

Cette relation est un cas particulier de l'équation d'évolution de la vorticité.

## 6.2 Propriétés des solutions de l'équation de Stokes

### 6.2.1 Linéarité

Si  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  sont solutions de l'équation de Stokes alors pour tout  $\lambda_1$  et  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2$  est aussi solution de l'équation de Stokes.

De plus on a vu que :

$$\frac{\mathbf{u}}{U} = f(Re, \mathbf{r})$$

Or si on fait le changement  $U \rightarrow \lambda U$  alors on a  $Re \rightarrow \lambda Re$ . Or la linéarité nous dit que  $\mathbf{u} \rightarrow \lambda \mathbf{u}$  donc :

$$\frac{\lambda \mathbf{u}}{\lambda U} = f(\lambda Re, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{u}}{U} = f(Re, \mathbf{r})$$

Ainsi dans la limite des petits nombres de Reynolds on a la fonction  $f$  qui ne doit pas dépendre de  $Re$ .

### 6.2.2 Unicité

Une solution donnée de l'équation pour des conditions aux limites fix es (à l'infini ou à distance finie) est unique. Cette propri ete essentielle est une conséquence de la linéarité de l'équation. En revanche, pour un écoulement d'un fluide réel à un nombre de Reynolds suffisamment  elev e, il existe une

infinité de solutions de l'équation de Navier-Stokes, qui évoluent dans temps : les termes non linéaires convectifs et la présence de la vorticité sont à l'origine de la multiplicité des solutions et de leur évolution.

Démonstration :

Supposons que  $(\mathbf{u}_1, P_1)$  et  $(\mathbf{u}_2, P_2)$  sont solutions de l'équation de Stokes pour les mêmes conditions aux limites. On pose alors :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \quad P = P_1 - P_2$$

On calcule la quantité :

$$\begin{aligned} \int_V (\partial_j u_i)^2 dV &= \int_V \partial_j u_i \partial_j u_i dV \\ &= \int_V \partial_j (u_i \partial_j u_i) dV - \int_V u_i \underbrace{\partial_j \partial_j u_i}_{=\Delta u_i = \frac{1}{\eta} \partial_i P} dV && \text{par l'équation de Stokes} \\ &= \underbrace{\oint_S u_i \partial_j u_i dS_j}_{=0} - \frac{1}{\eta} \int_V u_i \partial_i P dV \\ &= -\frac{1}{\eta} \int_V \partial_i (u_i P) dV + \frac{1}{\eta} \int_V P \underbrace{\partial_i u_i}_{=0} dV && \text{incompressibilité du fluide} \\ &= -\frac{1}{\eta} \oint_S u_i P dS_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les intégrales de surfaces sont nulles car on prend les surfaces où sont définies les conditions aux limites et donc on a  $u_i$  nul à cette endroit comme la différence des deux solutions qui ont la même condition aux limites. Ainsi on a  $\partial_j u_i = 0$  pour tout  $i, j$  et ainsi  $u_i = 0$  pour tout  $i$ . Donc  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ .

### 6.2.3 Réversibilité

Si on inverse la cause de l'écoulement (conditions aux limites) la trajectoire des particules de fluides est la même mais les particules de fluides se déplacent dans l'autre sens.

Si on crée un écoulement autour d'un corps symétrique alors l'écoulement sera symétrique.

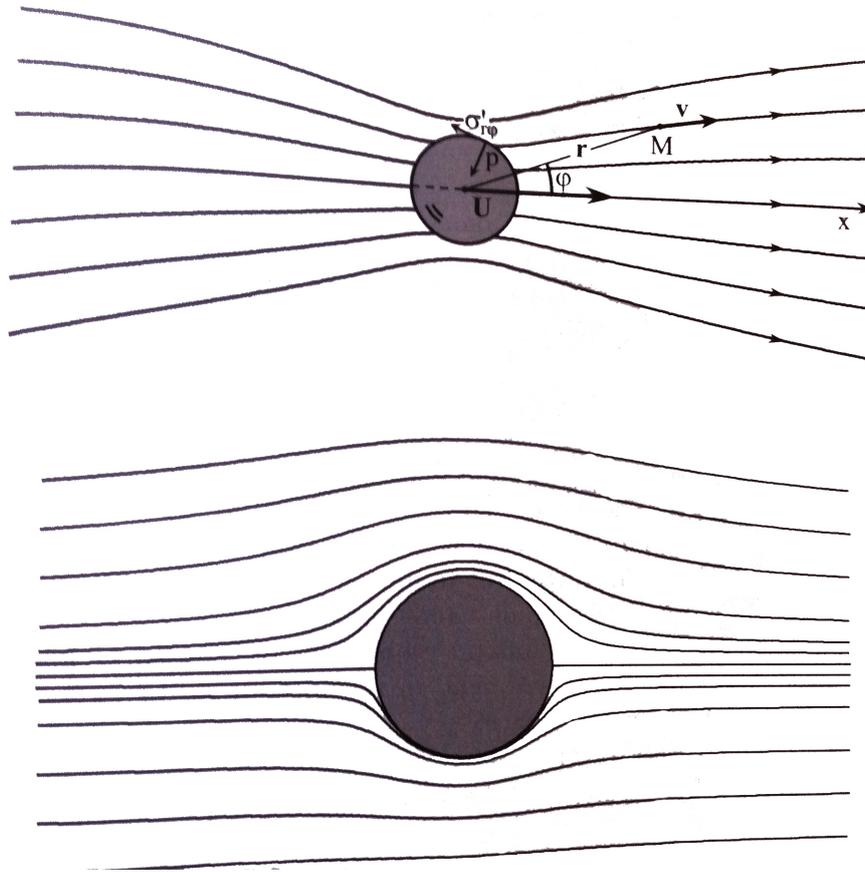


FIGURE 6.1 – En haut, les lignes de courant de l'écoulement autour d'une sphère se déplaçant à vitesse constante  $\mathbf{U}$  dans un fluide au repos. Il est également indiqué les composantes des contraintes normale et tangentielle qui s'exercent sur un point de la surface de la sphère. En bas, on voit que la moitié supérieure de la figure représente les lignes de courant de l'écoulement autour d'une sphère placée dans un fluide en écoulement à une vitesse  $\mathbf{U}$  loin de la sphère et à petit nombre de Reynolds. La moitié inférieure représente pour comparaison les lignes de courant dans le cas de l'écoulement potentiel autour de la sphère.

### 6.3 Écoulement autour d'une sphère

On suppose le fluide au repos à l'infini et on exprime le champ de vitesse en coordonnées sphériques  $(r, \phi, \theta)$  dans un repère au sein duquel le fluide loin de la sphère est au repos et est tel que son origine  $O$  coïncide à chaque instant avec le centre de la sphère. L'axe  $Ox$  ( $\phi = 0$ ) coïncide avec la direction de la

vitesse  $\mathbf{U}$  de la sphère de rayon  $R$ . A cause de la symétrie du problème on a :

$$v_\theta = 0 \quad v_r = v_r(r, \phi) \quad v_\phi = v_\phi(r, \phi)$$

Nous allons faire une démonstration, par étapes, du calcul qui conduit au champ de vitesse. Cette démonstration est basée sur une détermination intuitive initiale d'une fonction d'essai pour la distribution de pression autour de la sphère. À partir de celle-ci, on calcule ensuite un champ de vitesse qui vérifie les conditions aux limites imposées, puis les valeurs des paramètres inconnus de la fonction d'essai. D'après le théorème d'unicité, on obtient alors le champ de vitesse cherché.

### Détermination du champ de pression

Le champ de pression  $P(r)$  vérifie  $\Delta P = 0$  et est, par suite, une fonction harmonique. On peut donc développer  $P(r)$  dans un système de coordonnées sphériques  $(r, \varphi, \theta)$  sous forme d'une combinaison linéaire d'un terme en  $1/r$  et de ses dérivées successives par rapport aux coordonnées ; celles-ci sont solutions de l'équation de Laplace scalaire, et correspondent au champ créé par une charge, un dipôle, un quadripôle... Les premiers termes de ce développement sont :

$$\phi_0 \propto \frac{A}{r} \quad \phi_1 \propto \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad |\phi_2| \text{ tel que } \phi_{2ij} \propto \left( \frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3\frac{x_i x_j}{r^5} \right)$$

Si on néglige le terme de pression hydrostatique et qu'on suppose que  $P$  est nulle à l'infini, il n'apparaît pas de terme constant ou contenant une puissance positive de  $r$  dans  $P(r)$ . Utilisons comme fonction d'essai la plus simple de ces fonctions respectant la symétrie du problème. Le champ de pression doit se mettre sous la forme  $\phi U$  puisque  $P$  est proportionnel à  $U$ . La seule composante compatible avec la forme scalaire de  $P$  est la composante de  $\phi_1$  parallèle à  $\mathbf{U}$ , soit  $(\partial/\partial x)(1/r) = -(\cos \varphi)/r^2$  (en effet les termes en  $(\sin \varphi \cos \theta)/r^2$  et  $(\sin \varphi \sin \theta)/r^2$  ne respectent pas la symétrie de révolution autour de l'axe  $Ox$  parallèle à  $\mathbf{U}$ ). On peut donc écrire :

$$P = C\eta U \frac{\cos \varphi}{r^2} = -C\eta \mathbf{U} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = -C\eta \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{U}}{r} \right) \quad (6.7)$$

Les forces exercées sont donc proportionnelles à la vitesse et à la viscosité. Nous allons maintenant examiner s'il existe un champ de vitesse correspondant à cette distribution de pression, et vérifiant l'équation de Stokes et les conditions aux limites sur les parois de la sphère. Si ce n'était pas le cas, il faudrait introduire dans  $P(r)$  les termes du développement d'ordre supérieur.

### Champ de vorticité correspondant à la répartition de pression

On part de la forme de l'équation de Stokes suivante :

$$\mathbf{grad} P = -\eta \mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}$$

En utilisant (6.7) elle devient :

$$-C\eta \mathbf{grad} \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{U}}{r} \right) = -\eta C \mathbf{rot} \mathbf{rot} \left( \frac{\mathbf{U}}{r} \right) - C\eta \Delta \left( \frac{\mathbf{U}}{r} \right) = -\eta \mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}$$

Or on a :

$$\Delta \left( \frac{\mathbf{U}}{r} \right) = \mathbf{U} \Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0$$

Donc :

$$\boldsymbol{\omega} = C \mathbf{rot} \left( \frac{\mathbf{U}}{r} \right) + \mathbf{grad} g(r) \quad (6.8)$$

Où  $g(r)$  est une fonction de Laplacien nul, comme on le voit en prenant la divergence de la relation (6.8). Or, la seule composante  $\omega_\theta$  est non nulle, car  $u_\theta = 0$  et  $\mathbf{u}$  ne dépend pas de  $\theta$ . La fonction inconnue  $g(r)$  doit être de la forme  $\alpha\theta + \beta$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes. Mais  $\boldsymbol{\omega}$  est indépendant de  $\theta$  car  $\mathbf{u}$  l'est aussi ; la constante  $\alpha$  est donc nulle. De plus, comme  $g$  intervient uniquement par son gradient, on peut prendre  $\beta = 0$ . Ainsi,  $g$  est la fonction nulle. En utilisant l'identité  $\mathbf{rot}(m\mathbf{A}) = m\mathbf{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{grad} m) \wedge \mathbf{A}$ , on en déduit que :

$$\boldsymbol{\omega} = C \mathbf{rot} \left( \frac{\mathbf{U}}{r} \right) = -C\mathbf{U} \wedge \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (6.9)$$

Soit :

$$\omega_\theta = CU \frac{\sin \varphi}{r^2} \quad (6.10)$$

### Calcul de la fonction de courant $\Psi$ à parité du champ de vorticité

Introduisons maintenant la fonction de courant de Stokes telle que :

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \quad v_\varphi = -\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (6.11)$$

On a alors :

$$\omega_\theta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(ru_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) = -\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right)$$

Ainsi en égalisant les deux valeurs de  $\omega_\theta$  on a :

$$-\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) = CU \frac{\sin \varphi}{r^2}$$

On peut séparer les variables en posant  $\Psi = \sin^2 \varphi \cdot f(r)$ . Ce choix se justifie car l'axe  $Ox$  doit être une ligne de courant. L'équation devient alors, après simplification par  $\sin \varphi$  :

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2f}{r^3} = \frac{CU}{r^2}$$

$CU \frac{r}{2}$  est une solution particulière, et les solutions générales de l'équation sans second membre sont  $L'/r$  et  $M'r^2$  où  $L'$  et  $M'$  sont des constantes. D'où en posant  $L = L'/U$  et  $M = M'/U$  :

$$\Psi = U \sin^2 \varphi \left( \frac{L}{r} + Mr^2 + \frac{Cr}{2} \right) \quad (6.12)$$

### Calcul du champ de vitesse

Les composantes du champ de vites peuvent maintenant être calculées à partir des relations (6.11) :

$$v_r = U \cos \varphi \left( \frac{C}{r} + \frac{2L}{r^3} + 2M \right)$$

$$v_\varphi = -U \sin \varphi \left( \frac{C}{2r} - \frac{L}{r^3} + 2M \right)$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à partir des conditions aux limites :

- Pour  $r \rightarrow \infty$ ,  $u \rightarrow 0$  donc  $M = 0$
- Pour  $r = R$  on doit avoir  $u_r = U$  pour  $\varphi = 0$  et  $u_\varphi = -U$  pour  $\varphi = \pi/2$ .

$$\text{Donc } C = \frac{3R}{2} \text{ et } L = -\frac{R^3}{4}$$

On obtient donc les champs de vitesse suivant :

$$u_r = U \cos \varphi \left( \frac{3R}{2r} - \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (6.13)$$

$$u_\varphi = -U \sin \varphi \left( \frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3} \right) \quad (6.14)$$

On obtient aussi les champs de pression et de vorticité suivants ( $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire le long du vecteur  $\mathbf{OM}$ ) :

$$P = \frac{3}{2}\eta UR \frac{\cos \varphi}{r^2} = \frac{3}{2}\eta R \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}}{r^2} \quad (6.15)$$

$$\omega_\theta = \frac{3}{2}UR \frac{\sin \varphi}{r^2} = \frac{3}{2}R \frac{(\mathbf{U} \wedge \mathbf{n})_\theta}{r^2} \quad (6.16)$$

Cette solution est valable seulement si le nombre de Reynolds est très petit devant l'unité, et si la vitesse  $U$  de la sphère est constante.

Le point le plus remarquable de ce résultat est la lente décroissance en  $\frac{1}{r}$  de la vitesse de l'écoulement à petit nombre de Reynolds avec la distance  $r$  à la sphère. Ce résultat doit ˆetre compar e à la décroissance plus rapide en  $\frac{1}{r^2}$  pour la vitesse autour d'une sphère, dans le problème d'écoulement potentiel. Cette décroissance lente de la perturbation de la vitesse est due à la faible efficacité de la diffusion pour transporter loin du corps la quantité de mouvement communiquée au fluide par les forces de frottement visqueux. Nous pouvons retrouver cette variation en  $\frac{1}{r}$  par un raisonnement physique simple. Supposons que la vitesse décroisse en  $r^{-\alpha}$  loin de la sphère ; le flux de quantité de mouvement associ e à la diffusion s'exprime par des gradients des composantes de vitesse et varie en  $r^{-\alpha-1}$ . L'int egr ale de ce flux sur une sphère de rayon  $r$  varie en  $r^{\alpha+1}$  et doit ˆetre une composante indépendante de  $r$ , de l'ordre de la force de frottement totale sur tout le corps. On retrouve bien  $\alpha = 1$ , correspondant à un champ de vitesse en  $\frac{1}{r}$ .

Pour une sphère immobile dans un écoulement de vitesse  $\mathbf{U}$  loin de la sphère, la vitesse  $\mathbf{V}$  du fluide s'obtient en retranchant de la vitesse  $\mathbf{U}$ , la vitesse donnée par les équations :

$$V_r = (U \cos \varphi) - u_r = U \cos \varphi \left( 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (6.17)$$

$$V_\varphi = (-U \sin \varphi) - u_\varphi = -U \sin \varphi \left( 1 + \frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3} \right) \quad (6.18)$$

Dans ce référentiel où la sphère est au repos, les lignes de courant retournent beaucoup plus à une configuration de vitesse uniforme lorsqu'on s'éloigne de la sphère que pour un écoulement potentiel, on peut le voir sur la FIG 6.1.

## 6.4 Forces exercées par un écoulement visqueux

### 6.4.1 Argument dimensionnel

On a les forces suivantes :

- Contraintes de viscosité :  $\eta \partial \mathbf{u}$  de dimension  $\frac{\eta U}{L}$  qui correspond à une force de la contrainte multiplié par  $L^2$  donc en  $\eta U L$ ,
- Forces de pression : on a  $\mathbf{grad} P = \eta \Delta \mathbf{u}$  et donc  $P \propto \frac{\eta U}{L}$  comme la contrainte ce qui nous apporte rien dimensionnellement.

Pour rendre compte des grands nombres de Reynolds aussi on définit un *coefficient de trainée* (où la pression est en  $\rho U^2$ ) :

$$C = \frac{\eta U L}{\rho U^2 L^2} = \frac{\eta / \rho}{U L} = \frac{\nu}{U L} = \frac{1}{Re} \quad (6.19)$$

### 6.4.2 Force de Stokes

On étudie la force sur une sphère. La contrainte s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{F}}{dS} = \vec{\sigma} \wedge \mathbf{n} = \vec{\sigma} \wedge \mathbf{e}_r = \sigma_{rr} \mathbf{e}_r + \sigma_{r\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \sigma_{r\theta} \mathbf{e}_\theta$$

Or on a :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -p + 2\eta \partial_r u_r|_{r=R} = -\frac{3}{2} \frac{\eta U \cos \varphi}{R} \\ \sigma_{r\varphi} = \eta \left( \frac{1}{2} \partial_\varphi u_r + \partial_r u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r} \right) \Big|_{r=R} = \frac{3}{2} \frac{\eta \sin \varphi}{R} \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\frac{d\mathbf{F}}{dS} = -\frac{3}{2} \frac{\eta U}{R} (\cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi) = -\frac{3}{2} \frac{\eta \mathbf{U}}{R}$$

Et donc pour avoir la force il suffit juste de multiplier par la surface car il n'y a pas de dépendance en  $\theta$  ou en  $\varphi$  donc l'intégrale est triviale donc :

$$\mathbf{F} = 4\pi R^2 \left( -\frac{3}{2} \frac{\eta \mathbf{U}}{R} \right)$$

Et on trouve la force de Stokes :

$$\boxed{\mathbf{F} = -6\pi\eta R \mathbf{U}} \quad (6.20)$$

Si on fait chuter une sphère quand un tube de largueur  $10R$  alors la force de trainée augmente de 20% par rapport à celle des parois à l'infini.

# Chapitre 7

## Couche limite

### 7.1 Introduction

La notion de couche limite laminaire intervient lorsqu'on étudie les écoulements laminaires à grand nombre de Reynolds autour d'un solide. Loin du corps, et tant que l'écoulement incident n'est pas turbulent, les termes de forces de viscosité de l'équation du mouvement sont négligeables, et l'écoulement a pratiquement le profil qui correspond à celui d'un fluide parfait. Le raccordement entre la solution d'écoulement de fluide parfait et la condition de vitesse nulle sur les parois solides se fait sur une zone appelée couche limite, d'épaisseur d'autant plus faible que le nombre de Reynolds est grand. Dans cette région, les termes de viscosité et de convection sont à prendre en compte simultanément. On peut voir l'exemple d'un tel écoulement sur la FIG 7.1. Ce chapitre est donc un complément nécessaire à l'étude du fluide parfait en écoulement potentiel. On construira cette couche limite sous certaines approximations. On effectuera également quelques exemples simples. Enfin on verra quels conditions font sortir de ce modèle. La vorticité générée près des parois est ensuite entraînée dans un sillage en aval.

### 7.2 L'approximation de la couche limite

On fait les approximations suivantes pour trouver le cas la FIG 7.2 :

1. Tout d'abord on se place à 2 dimensions qui est un peu restrictif dans la pratique mais n'enlève rien à la physique du problème,
2. On se place dans le régime stationnaire,
3. On s'intéresse à la couche limite sur une paroi plane ou au moins sur une paroi où le rayon de courbure est grand devant l'épaisseur de la

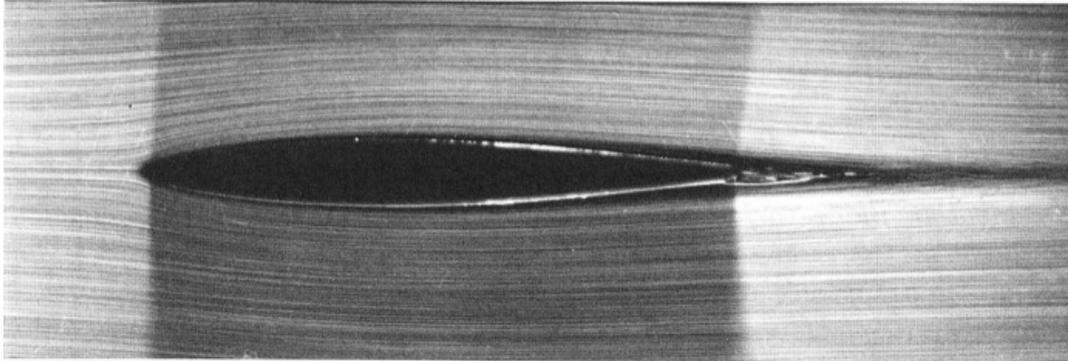


FIGURE 7.1 – Couche limite et sillage laminaires le long d'un profil d'aile placé sous incidence nulle dans un écoulement uniforme.

couche limite,

4. On suppose que on a résolu le problème en dehors de la couche limite et que celle-ci est donné par :

$$\mathbf{u}_0(x, y) \quad \& \quad P_0(x, y)$$

5. On a vu que :

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad Re = \frac{UL}{\nu}$$

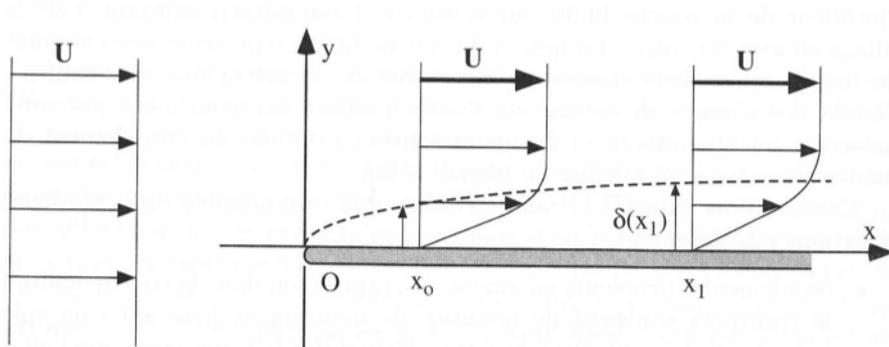


FIGURE 7.2 – Développement d'une couche limite le long d'une plaque plane semi-finie, d'arête perpendiculaire en  $O$  au plan de la figure, et placée dans un écoulement uniforme de vitesse  $U$ . Les gradients de vitesse générés près de la paroi, par suite de la condition de vitesse nulle sur la surface, diffusent perpendiculairement à la plaque, en même temps qu'ils sont entraînés par l'écoulement. Notons qu'ici nous avons dilaté fortement l'échelle suivant  $Oy$ .

On pose donc :

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \ll 1$$

Et on développe les grandeurs en puissance de  $\epsilon$  :

$$\begin{cases} u = u^0 + \epsilon u^1 + \epsilon^2 u^2 + \dots \\ v = v^0 + \epsilon v^1 + \epsilon^2 v^2 + \dots \\ p = p^0 + \epsilon p^1 + \epsilon^2 p^2 + \dots \end{cases}$$

De plus au niveau des dérivées spatiales on a :

$$\partial_y = \frac{1}{\epsilon} \partial_{y'} \quad \partial_x = \partial_{x'}$$

L'incompressibilité s'écrit :

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 = \partial_{x'}(u^0 + \epsilon u^1) + \frac{1}{\epsilon} \partial_{y'}(v^0 + \epsilon v^1)$$

À l'ordre  $\frac{1}{\epsilon}$  on a :

$$\partial_{y'} v^0 = 0 \quad \Rightarrow v^0 = k(x)$$

Or en  $y = 0$  on a  $v^0(x, 0) = 0 = k(x)$ . Donc :

$$v^0 = 0$$

À l'ordre 0 on a :

$$\boxed{\partial_{x'} u^0 + \partial_{y'} v^1 = 0}$$

Pour l'équation de Navier-Stokes selon  $\mathbf{e}_x$  on a :

$$u \partial_x u + v \partial_y u = -\frac{1}{\rho} \partial_x p + \nu \partial_{xx}^2 u + \nu \partial_{yy}^2 u$$

Or on sait que :

$$\frac{\nu}{UL} = \epsilon^2 \quad \nu = UL\epsilon^2 \quad \nu = \epsilon^2 \nu'$$

Donc pour Navier-Stokes on a :

$$\begin{aligned} & (u^0 + \epsilon u^1) \partial_{x'}(u^0 + \epsilon u^1) + \epsilon v^1 \frac{1}{\epsilon} \partial_{y'}(u^0 + \epsilon u^1) \\ &= -\frac{1}{\rho} \partial_{x'}(p^0 + \epsilon p^1) + \underbrace{\nu' \epsilon^2 \partial_{x'x'}^2 (u^0 + \epsilon u^1)}_{=0} + \nu' \epsilon^2 \frac{1}{\epsilon^2} \partial_{y'y'}^2 (u^0 + \epsilon u^1) \end{aligned}$$

À l'ordre 0 :

$$u^0 \partial_{x'} u^0 + v^1 \partial_{y'} u^0 = -\frac{1}{\rho} \partial_{x'} p^0 + \nu' \partial_{y' y'}^2 u^0$$

Maintenant si on écrit Navier-Stokes selon  $\mathbf{e}_y$  alors :

$$u \partial_x v + v \partial_y v = -\frac{1}{\rho} \partial_y p + \underbrace{\nu \partial_{xx}^2 v}_{=0} + \nu \partial_{yy}^2 v$$

Ce qui donne :

$$(u^0 + \epsilon u^1) \partial_{x'} \epsilon v^1 + \epsilon v^1 \frac{1}{\epsilon} \partial_{y'} v^1 = -\frac{1}{\rho \epsilon} \partial_{y'} (p^0 + \epsilon p^1) + \nu' \epsilon^2 \frac{1}{\epsilon^2} \partial_{y' y'}^2 \epsilon v^1$$

Et donne à l'ordre  $\frac{1}{\epsilon}$  :

$$\partial_{y'} p^0 = 0$$

On trouve les équations de Prandtl (1905) on omettant les indices car on garde que les termes dominants pour chaque paramètre ( $u^0, v^1, p^0$ ) :

$$\begin{cases} \partial_x u + \partial_y v = 0 \\ u \partial_x u + v \partial_y u = -\frac{1}{\rho} \partial_x p + \nu \partial_{yy}^2 u \\ \partial_y p = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

En dehors de la couche limite, les effets de viscosité sont négligeables et on peut appliquer l'équation de Bernoulli comme pour un fluide parfait : avec  $p_0(x) = p_{CL}(x)$

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho u_0^2(x) = cte$$

Soit :

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} + \rho u_0(x) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} = 0$$

Et donc si on combine avec le seconde équation de Prandtl on a :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_0(x) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Ainsi on a plus qu'un système de 2 équations à 2 inconnues ( $u, v$ ) :

$$\begin{cases} \partial_x u + \partial_y v = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_0(x) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \quad (7.2)$$

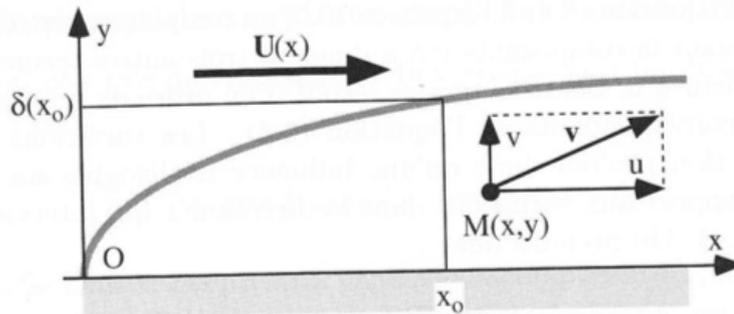


FIGURE 7.3 – Géométrie pour l'étude de la couche limite le long d'une plaque plane placée dans un écoulement de vitesse  $U(x)$  parallèle à la plaque.  $\delta(x_0)$  représente l'ordre de grandeur de l'épaisseur locale de la couche limite en un point d'abscisse  $x_0$  en aval de l'arête de la plaque.

## 7.3 Cas d'une plaque plane

On a le système représenté sur la FIG 7.3 et on a les équations qui deviennent :

$$\begin{cases} u_0 = U \\ \frac{du_0}{dx} = 0 \\ \partial_x u + \partial_y v = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_0(x) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

Or ceci n'est pas suffisant pour résoudre ce système on va utiliser la propriété d'auto-similarité.

### 7.3.1 Auto-similarité

On a ici comme paramètre :  $u, U, x, y, L, \delta$  et donc par application du théorème  $\pi$  :

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{\delta}\right)$$

Or on a :

$$\delta = \sqrt{\frac{L\nu}{U}}$$

On veut faire disparaître  $L$  car ce n'est pas un paramètre pertinent de notre problème et on construit une grandeur qui ne dépend pas de  $L$  :

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y/\delta}{\sqrt{x/L}}\right)$$

On pose :

$$\xi = \frac{y/\delta}{\sqrt{x/L}} = \frac{y}{\sqrt{\frac{L\nu}{U}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{L}}}$$

$$\boxed{\xi = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}} \quad (7.3)$$

### 7.3.2 Profil de Blasius

On est en deux dimensions donc l'utilisation de la fonction de courant est intéressant  $u = \partial_y \Psi$ . Or  $\Psi$  dépend de  $\xi$  qui dépend de  $y$  donc :

$$u = \partial_y \Psi = \partial_\xi \Psi \partial_y \xi = \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \partial_\xi \Psi = U f(\xi)$$

Donc on a :

$$\partial_\xi \Psi = \sqrt{U\nu x} f(\xi)$$

Et ainsi :

$$\Psi(\xi) = \sqrt{U\nu x} g(\xi) \quad g'(\xi) = f(\xi) \quad (7.4)$$

De plus pour la seconde composante on a :

$$v = -\partial_x \Psi = -\partial_x (\sqrt{U\nu x} g(\xi))$$

Or on a :

$$\partial_x \xi = -\frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U}{\nu x^3}}$$

Donc :

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U\nu}{x}} g(\xi) - \sqrt{U\nu x} \partial_\xi g \partial_x \xi \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U\nu}{x}} g(\xi) + \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U}{\nu x^3}} \sqrt{U\nu x} g' \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U\nu}{x}} \left( -g + \underbrace{y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}}_{=\xi} g'(\xi) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U\nu}{x}} (-g + \xi g') \end{aligned}$$

On a donc l'équation :

$$U g' \partial_x(g') + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} (-g + \xi g') \partial_y(g') = \nu \partial_{yy}^2(g') \quad \text{avec} \quad \partial_y(\partial_y g') = \partial_y \left( \sqrt{\frac{U}{\nu x}} g'' \right) = \frac{U}{\nu x} g'''$$

$$U g' g'' \left( -\frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U}{\nu x^3}} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} (-g + \xi g') g'' \left( \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \right) = \frac{U}{x} g'''$$

En simplifiant tout on a :

$$\boxed{g g'' + 2 g''' = 0} \quad (7.5)$$

L'indépendance de cette équation par rapport à  $x$  et  $y$  justifie l'hypothèse d'auto-similarité et le fait que le paramètre pertinent est  $\xi$ .

De plus on a les conditions aux limites :

$$u(y=0) = v(y=0) = 0 \quad u(y=\infty) = U$$

Qui peuvent se traduire par :

$$g'(0) = 0 \quad g(0) = 0 \quad g'(\infty) = 1$$

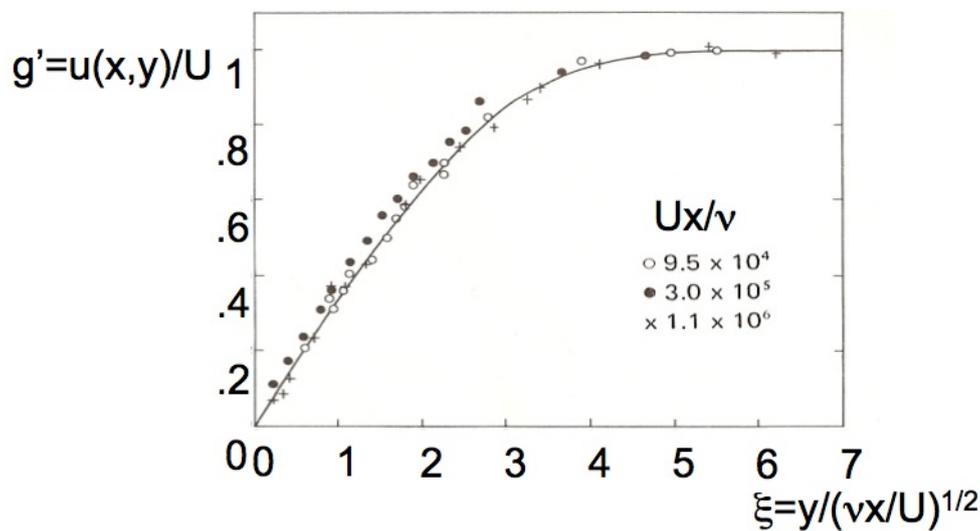


FIGURE 7.4 – Tracé expérimental de  $g'$  en fonction de  $\xi$  pour différents nombres de Reynolds. On obtient alors un profil de courbe qui est la même quelque soit le nombre de Reynolds. On peut alors interpoler ce nuage de points.

Un tracé expérimental a été effectué sur la FIG 7.4 et on trouve les limites asymptotiques :

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} g(\xi) = 0,166\xi^2 \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} g(\xi) = \xi - 1,72$$

### 7.3.3 Force de traînée

On peut alors calculer la contrainte :

$$\sigma_{xy} = \eta \partial_y u|_{y=0} = \eta \partial_y (Ug') = \eta \partial_\xi (Ug') \partial_y \xi = \eta \sqrt{\frac{U}{\nu x}} U g''(0) = 0,332 \sqrt{\frac{\eta \rho U^3}{x}}$$

On peut calculer la force par unité de largeur sur une longueur  $L$  :

$$\frac{F}{l} = \int_0^L \sigma_{xy} dx = 0,332 \sqrt{\eta \rho U^3} \underbrace{\int_0^L x^{-1/2} dx}_{=2\sqrt{L}}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{F}{l} = 0,664 \sqrt{\eta \rho U^3 L}} \quad (7.6)$$

On peut avoir un facteur 2 si on considère qu'il y a une force de chaque coté de la plaque. De plus si on prend la force dimensionnée alors :

$$\frac{F/l}{\rho U^2 L} = \sqrt{\frac{\eta \rho U^3 L}{\rho^2 U^4 L^2}} = \sqrt{\frac{\nu}{UL}} = \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

### 7.3.4 Déficit de débit

On définit une épaisseur de déplacement qui correspond au déficit de débit que l'on a a cause de la plaque :

$$\delta^* = \frac{1}{U} \int_0^\infty (U - u) dy$$

Ceci représente l'épaisseur de fluide qu'il faudrait enlever pour réduire le débit

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^\infty (1 - g'(\xi)) d\xi = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} [\xi - g(\xi)]_0^\xi = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} (\xi - (\xi - 1,72))$$

Donc :

$$\boxed{\delta^* = 1,72 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = 1,72 \delta} \quad (7.7)$$

De même on peut définir une épaisseur de quantité de mouvement qui correspond au déficit du flux de quantité de mouvement :

$$\delta^{**} = \frac{\text{flux de quantité de mouvement en amont} - \text{flux à la distance } x}{\rho U^2}$$

Soit :

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u(U - u)}{U^2} dy$$

Et on trouve :

$$\delta^{**}(x) = 0,66 \delta$$

De plus on a :

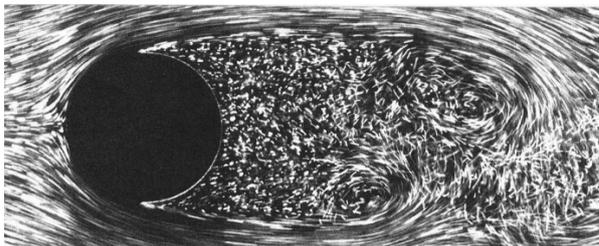
$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} v = \frac{1,72}{2} \sqrt{\frac{U\nu}{x}}$$

Et donc le déficit de débit s'écrit  $\delta^*U = 1,72\sqrt{\nu xU}$  et donc plus on a des  $x$  grands plus le débit est réduit.

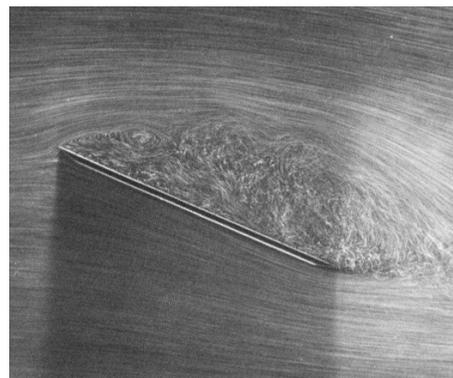
## 7.4 Au-delà du modèle de Prandtl

### 7.4.1 Décollement et influence sur la traînée

On parle de décollement de la couche limite lorsqu'on est à trop grand Reynolds et que des tourbillons se forme en aval d'un point de décollement qui est caractériser par un changement de signe de  $\partial_y u$ , on donne des exemples sur la FIG 7.5.



*Sur une sphère.*



*Sur une plaque inclinée.*

FIGURE 7.5 – Exemple de décollement de la couche limite.

Supposons que la vitesse de l'écoulement potentiel extérieur  $U(x)$  décroisse avec la distance  $x$  en aval de l'arête de la paroi, comme, par exemple, dans le cas d'un écoulement divergeant. En dehors de la couche limite, la pression  $P(x)$  augmente avec la distance, car le gradient de pression  $\partial P/\partial x$  dans cette direction vérifie Bernoulli :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho U \frac{\partial U}{\partial x} > 0$$

Par ailleurs, comme, d'après le fait que  $\partial P/\partial y = 0$  les variations de pression dans la direction transverse sont négligeables, on retrouve le même gradient de pression longitudinal à l'intérieur de la couche limite. Ainsi dans les zones de faible vitesse près de la paroi, la dynamique des éléments de fluide résulte de deux influences opposées : d'une part, le gradient de pression  $\partial P/\partial x$  positif freine leur déplacement et, d'autre part, l'apport de quantité de mouvement par diffusion visqueuse à partir des zones de plus grande vitesse les accélère. Si le gradient de vitesse  $\partial U/\partial x$  est suffisamment grand en valeur absolue, on aura donc renversement local du sens de l'écoulement près de la paroi. Ce phénomène est appelé *décollement des couches limites*. Dans le cas opposé d'un gradient de vitesse positif vers l'aval, le gradient de pression  $\partial P/\partial x$  correspondant est négatif ; le fluide proche de la paroi est accéléré et la couche limite s'amincit.

On peut prendre comme exemple le cylindre :

$$v_\theta(r = R) = -2U \sin \theta$$

D'après Bernoulli on a :

$$P + \rho \frac{v_\theta^2}{2} = P_0 + \rho U^2$$

$$P = \left( P_0 + \frac{\rho U^2}{2} \right) - \rho \frac{v_\theta^2}{2}$$

Le maximum de la vitesse  $v_\theta$  correspond au minimum de pression  $P$  en  $\pi/2$ . Donc le décollement a lieu en  $\pi/2$  donc au sommet du cylindre. On peut voir la distribution de pression sur la FIG 7.6 ainsi que celle de la force de traînée qui existe grâce à la couche limite sur la FIG 7.7.

Si on a un écoulement potentiel on a pas de force de traînée sauf qu'il faut ajouter la couche limite mais une force de traînée en  $U^{3/2}$ . Si il y a décollement de la couche limite alors la force est en  $U^2$  donc dominante. Le profilage d'un objet permet d'empêcher le décollement de la couche limite.

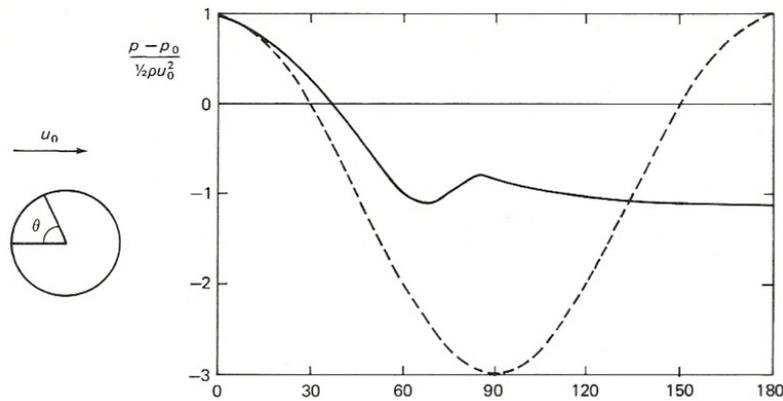


FIGURE 7.6 – Distribution de pression sur un cylindre pour un nombre de Reynolds de  $1.9 \times 10^5$ .

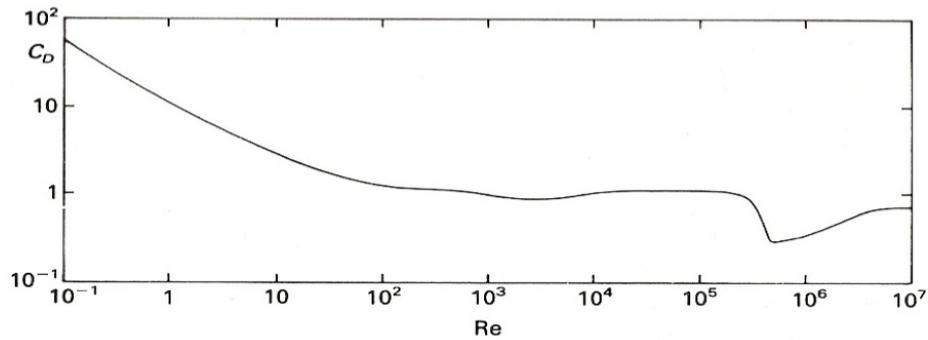


FIGURE 7.7 – Tracé de la force de traînée  $C_D$  en fonction du nombre de Reynolds.

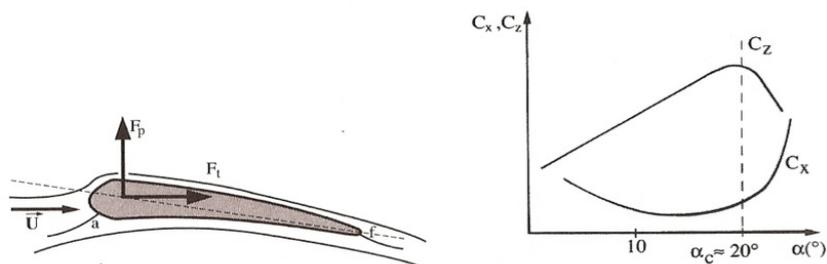


FIGURE 7.8 – À gauche, une vue schématique de l'écoulement autour d'une aile, et des forces de portance et de traînée.  $a$  et  $f$  sont les bords d'attaque et de fuite. À droite, la variation des coefficients de portance  $C_z$  et de traînée  $C_x$  en fonction de l'angle d'incidence  $\alpha$ .

## 7.4.2 Couche limite turbulente

On peut définir dans la couche limite un nombre de Reynolds :

$$Re_{CL} = \frac{U\delta}{\nu} = \frac{U}{\nu} \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \sqrt{\frac{Ux}{\nu}} = \sqrt{Re}$$

Si la couche limite est turbulente alors il y a plus de dissipation et  $\partial_x P > 0$ .

## Chapitre 8

# Écoulements en milieux stratifiés

### 8.1 Généralités et ordres de grandeurs

#### 8.1.1 Milieu stratifiés

On parle de milieu stratifié lorsqu'il existe un gradient de densité verticale  $\partial_z \rho$ . Ici on se placera dans une stratification stable c'est à dire que  $\partial_z \rho < 0$  comme ça, grâce à la gravité, le système est stable.

#### 8.1.2 Nombre de Froude interne

Si on écrit le bilan un nouveau terme s'ajoute dans l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho D_t \mathbf{u} = -\mathbf{grad} P + \delta \rho \mathbf{g}$$

Le terme supplémentaire s'appelle la flottabilité ou buoyancy.

$$\rho \partial_{\mathbf{u}} + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u} = -\mathbf{grad} P + \nu \Delta \mathbf{u} + \delta \rho \mathbf{g}$$

On a la densité  $\rho_0(z)$  et on définit sa moyenne  $\rho_0 = \overline{\rho_0(z)}$ .

Le terme d'inertie a pour ordre de grandeur  $\frac{\rho_0 U^2}{L}$ . On définit alors le nombre de Froude :

$$Fr^2 = \frac{\text{inertie}}{\text{flottabilité}} = \frac{\rho_0 U^2 / L}{\delta \rho g}$$

On suppose le milieu linéairement stratifié donc :

$$\delta \rho = \rho_1 - \rho_2 = L \partial_z \rho_0$$

On peut le réécrire comme :

$$\boxed{Fr^2 = \frac{\rho_0 U^2}{gL^2 \partial_z \rho_0}} \quad (8.1)$$

Ou encore comme un rapport de fréquences :

$$Fr^2 = \frac{(U/L)^2}{gL^2 \partial_z \rho_0} = \frac{(U/L)^2}{N^2}$$

Avec  $N = \sqrt{\frac{g \partial_z \rho}{\rho}}$  qui est la fréquence de Brunt-Väisälä.

### 8.1.3 Blocage

L'équation d'advection-convection s'écrit :

$$D_t \rho = \kappa \Delta \rho \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \rho = 0$$

$$\rho = \rho_0(z) + \delta \rho_e$$

$$u \partial_x \delta \rho_e + w \partial_z \rho_0 = 0$$

En terme d'ordre de grandeur :

$$\frac{\delta \rho_e}{L} \sim W \partial_z \rho_0$$

$$\delta \rho_e \sim \frac{WL}{U} \partial_z \rho_0 \sim H \partial_z \rho_0$$

Car  $\partial_x u + \partial_z w = 0$  c'est à dire  $U/L \sim W/H$  ;

On va utiliser l'équation de la vorticité :

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u}) = \mathbf{rot}(\delta \rho \mathbf{g}) = \mathbf{grad} \rho_e \wedge \mathbf{g}$$

En terme d'ordre de grandeur on a :

$$\rho_0 \frac{U^2}{L^2} \sim \frac{g \delta \rho_e}{L}$$

$$\frac{\delta \rho_e}{L} \sim \frac{\rho_0 U^2}{gL^2}$$

En utilisant les deux ordres de grandeur de  $\delta \rho_e$  alors :

$$\frac{\delta \rho_e}{L} \sim \frac{W}{U} \partial_z \rho_0 \sim \frac{\rho_0 U^2}{gL^2}$$

$$\frac{W}{U} \sim \frac{\rho_0 U^2}{gL^2 H \partial_z \rho}$$

Si le milieu est fortement stratifié alors :

$$\frac{W}{U} = Fr^2 \ll 1$$

## 8.2 Ondes internes

### 8.2.1 Principe

L'équation de dispersion s'écrit :

$$\omega^2 = gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

Pour l'interface eau/air on a  $\omega = \sqrt{gk}$

S'il existe un gradient de densité alors :

$$\rho_0 \partial_t^2(\delta z) = -g \delta_z |\partial_z \rho|$$

Donc :

$$\partial_t^2(\delta z) + \frac{g |\partial_z \rho|}{\rho_0} \delta z = 0 \quad (8.2)$$

On retrouve la fréquence de Brunt-Väisälä pour le second terme.

Si on réécrit Navier-Stokes, la conservation de la masse et l'équation de diffusion alors :

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{u} = -\mathbf{grad} P + \delta \rho \mathbf{g}$$

$$\mathit{div} \mathbf{u} = 0$$

$$\partial_t(\delta \rho) + w \partial_z \rho_0 = 0$$

### 8.2.2 Relation de dispersion

On prend des grandeurs sous la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$$

$$P = \tilde{P} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$$

$$\delta \rho = Q e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$$

On a alors les équations :

$$\begin{cases} \rho_0 i\omega U = ik_x \tilde{P} \\ \rho_0 i\omega V = ik_y \tilde{P} \\ \rho_0 i\omega W = ik_z \tilde{P} - gQ \\ k_x U + k_y V + k_z W = 0 \\ -i\omega Q + W \partial_z \rho_0 \end{cases}$$

Si on veut une solution non triviale on annule le déterminant  $5 \times 5$  alors on trouve :

$$\boxed{\omega^2 = N^2 \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right)} \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (8.3)$$

$$\boxed{\omega^2 = N^2 \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}} \quad (8.4)$$

Et donc on a :

$$\omega^2 = N^2 \sin^2 \theta$$

Où  $\theta$  est l'angle entre l'axe verticale et  $k$  donc les équations et la fréquence imposent que la direction du vecteur d'onde. La norme sera déterminée par les conditions aux limites. On a pas traiter le cas on l'on excite avec une fréquence plus grande que  $N$ . À ce moment là on a des ondes évanescentes qui ne sont pas traités ici (en effet on ne pourrait pas annuler le déterminant). On a donc 4 directions de propagation.

### 8.2.3 Vitesse de phase et de groupe

On définit une vitesse de phase  $\frac{\omega}{k}$  mais on a pas  $k$  mais on a sa direction :

$$\mathbf{k} = k(\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y)$$

On définit la vitesse de phase à 2 dimensions :

$$\mathbf{c}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \mathbf{e}_z$$

On obtient :

$$\mathbf{c}_g = \frac{N}{k} \left( \frac{k_z^2}{k^2} \mathbf{e}_x - \frac{k_z k_x}{k^2} \mathbf{e}_z \right)$$

$$\mathbf{c}_g = \frac{N}{k} \cos \theta (\cos \theta \mathbf{e}_x - \sin \theta \mathbf{e}_z)$$

On a la vitesse de phase qui est perpendiculaire à la vitesse de groupe.

# Annexe A

## Formulaire mathématique

### A.1 Théorème de Green-Ostrogradski

Soit  $\mathbf{F}$  un champ vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ . On considère un volume  $V$  de frontière  $\partial V$ . Enfin on prend  $d\mathbf{S}$  le vecteur normal à la surface, dirigé vers l'extérieur et de longueur égale à l'élément de surface qu'il représente. Alors on a l'égalité suivante :

$$\boxed{\int_V \operatorname{div}(\mathbf{F})dV = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}} \quad (\text{A.1})$$

### A.2 Théorème de Stokes

Soit  $\mathbf{F}$  un champ vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ . On considère une surface  $S$  de frontière fermée  $C$ . Enfin on prend  $d\mathbf{S}$  le vecteur normal à la surface, dirigé vers l'extérieur et de longueur égale à l'élément de surface qu'il représente et  $d\mathbf{l}$  un élément de longueur sur le contour  $C$ . Alors on a l'égalité suivante :

$$\boxed{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}} \quad (\text{A.2})$$

### A.3 Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{u}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{u}_z$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} = & \left( \frac{\partial^2 A^r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A^r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A^r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A^r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A^\theta}{\partial \theta} - \frac{A^r}{r^2} \right) \mathbf{u}_r \\ & + \left( \frac{\partial^2 A^\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A^\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A^\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A^\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A^r}{\partial \theta} - \frac{A^\theta}{r^2} \right) \mathbf{u}_\theta \\ & + \left( \frac{\partial^2 A^z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A^z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A^z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A^z}{\partial r} \right) \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

## A.4 Analyse vectorielle en coordonnées sphériques

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial(\sin \varphi A_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} = & \frac{1}{\sin \varphi} \left( \frac{\partial(\sin \varphi A_\theta)}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \right) \mathbf{u}_r + \left( \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} \right) \mathbf{u}_\varphi \\ & + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{u}_\theta \end{aligned}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} = & \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rA_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \varphi^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \varphi}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2 \cot \varphi}{r^2} A_\varphi \right) \mathbf{u}_r \\ & + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rA_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \varphi}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2 \cot \varphi}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} \right) \mathbf{u}_\varphi \\ & + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rA_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \varphi}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{2 \cot \varphi}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \varphi} \right) \mathbf{u}_\theta \end{aligned}$$

## A.5 Relations vectorielles utiles

$$\text{rot}(\text{grad}) = 0$$

$$\text{div}(\text{rot}) = 0$$

$$\Delta = \text{div}(\text{grad})$$

$$\text{rot}(\text{rot}) = \text{grad}(\text{div}) - \Delta$$

$$\Delta \mathbf{A} = (\Delta A_x)\mathbf{u}_x + (\Delta A_y)\mathbf{u}_y + (\Delta A_z)\mathbf{u}_z$$

$$\text{grad}(fg) = f.\text{grad}(g) + g.\text{grad}(f)$$

$$\text{grad}(\mathbf{A}.\mathbf{B}) = (\mathbf{A}.\text{grad})\mathbf{B} + \mathbf{A} \wedge \text{rot } \mathbf{B} + (\mathbf{B}.\text{grad})\mathbf{A} + \mathbf{B} \wedge \text{rot } \mathbf{A}$$

$$\text{div}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = -\mathbf{A}.\text{rot } \mathbf{B} + \mathbf{B}.\text{rot } \mathbf{A}$$

$$\text{rot}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{A}.\text{div}(\mathbf{B}) - (\mathbf{A}.\text{grad})\mathbf{B} - \mathbf{B}.\text{div}(\mathbf{A}) + (\mathbf{B}.\text{grad})\mathbf{A}$$

$$\text{div}(\rho.\mathbf{V}) = \rho.\text{div}(\mathbf{V}) + \text{grad}(\rho).\mathbf{V}$$

$$\text{rot}(\rho.\mathbf{V}) = \rho.\text{rot } \mathbf{V} + \text{grad}(\rho) \wedge \mathbf{V}$$

$$\Delta(fg) = f.\Delta g + 2\text{grad}(f).\text{grad}(g) + g.\Delta f$$

## Annexe B

# Dynamique d'un fluide dans les coordonnées cylindriques et sphériques

### B.1 Coordonnées cylindriques

#### B.1.1 Notations $(r, \theta, x)$

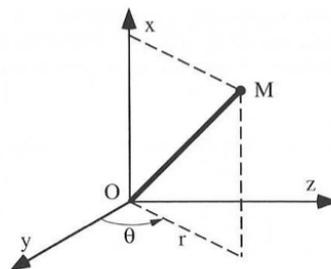


FIGURE B.1 – *Représentation des notations en coordonnées cylindriques.*

### B.1.2 Tenseur des contraintes

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} & \sigma_{r\theta} &= \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\
 \sigma_{xx} &= -p + 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} & \sigma_{xr} &= \eta \left( \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) \\
 \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \sigma_{\theta x} &= \eta \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned}$$

### B.1.3 Équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

### B.1.4 Équation de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}
 \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \\
 = -\frac{\partial P}{\partial r} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \rho f_r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \\
 = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) + \rho f_\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \\
 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \rho f_x
 \end{aligned}$$

## B.2 Coordonnées sphériques

### B.2.1 Notations $(r, \varphi, \theta)$

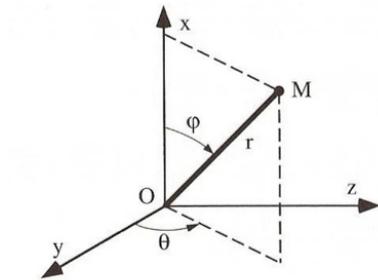


FIGURE B.2 – Représentation des notations en coordonnées sphériques.

### B.2.2 Tenseur des contraintes

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} & \sigma_{r\varphi} &= \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \\
 \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\eta \left( \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{v_\varphi \coth \varphi}{r} \right) & \sigma_{\varphi\theta} &= \eta \left( \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta \coth \varphi}{r} \right) \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= -p + 2\eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) & \sigma_{\theta r} &= \eta \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right)
 \end{aligned}$$

### B.2.3 Équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial(\sin \varphi u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0$$

## B.2.4 Équation de Navier-Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\varphi^2 + u_\theta^2}{r} \right) =$$

$$-\frac{\partial P}{\partial r} + \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r u_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\coth \varphi}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right.$$

$$\left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2 \coth \varphi}{r^2} u_\varphi \right) + \rho f_r$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\varphi}{r} - \frac{u_\theta^2 \coth \varphi}{r} \right) =$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r u_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\coth \varphi}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right.$$

$$\left. - \frac{2 \cos \varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} \right) + \rho f_\varphi$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta u_\varphi \coth \varphi}{r} \right) =$$

$$-\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r u_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\coth \varphi}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right.$$

$$\left. + \frac{2}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \varphi} \right) + \rho f_\theta$$

# Annexe C

## Résultats utiles

### C.1 Potentiels des vitesses et fonctions de courant d'écoulements plans

Type d'écoulement	Potentiel des vitesses	Fonction de courant
écoulement uniforme à deux dimensions	$\Phi = U x$	$\Psi = U y$
écoulement uniforme à trois dimensions de vitesse $U$ (coordonnées cylindriques)	$\Phi = U x$	$\Psi = -U \frac{r^2}{2}$
écoulement uniforme à trois dimensions de vitesse $U$ (coordonnées sphériques)	$\Phi = U r \cos \varphi$	$\Psi = \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \varphi$
tourbillon (coordonnées cylindriques)	$\Phi = \frac{\Gamma \theta}{2\pi}$	$\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \text{Log} \frac{r}{r_0}$
source ponctuelle 2D (coordonnées cylindriques)	$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \text{Log} \left( \frac{r}{r_0} \right)$	$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \theta$
source ponctuelle 3D (coordonnées sphériques)	$\Phi = -\frac{Q}{4\pi r}$	$\Psi = -\frac{Q}{4\pi} \cos \varphi$
dipôle de courant 2D (coordonnées cylindriques)	$\Phi = -\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{2\pi r^2}$	$\Psi = +\frac{p}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}$
dipôle de courant 3D (coordonnées sphériques)	$\Phi = -\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}$	$\Psi = \frac{p \sin^2 \varphi}{4\pi r}$
écoulement autour d'un cylindre circulaire	$\Phi = U r \cos \theta \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right)$	$\Psi = -U r \sin \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$
écoulement autour d'une sphère (coordonnées sphériques)	$\Phi = U r \cos \varphi \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right)$	$\Psi = \frac{U}{2} \left( r^2 - \frac{R^3}{r} \right) \sin^2 \varphi$
dièdre d'angle $\alpha = \frac{\pi}{m+1}$	$\Phi = C r^{m+1} \cos(m+1)\theta$	$\Psi = C r^{m+1} \sin(m+1)\theta$

## C.2 Relation fonction de courant - composantes des vitesses

Écoulement à deux dimensions (coordonnées cartésiennes)	$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$	$v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$
Écoulement à deux dimensions (coordonnées polaires)	$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$	$v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$
Écoulement de révolution (coordonnées cylindriques)	$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$	$v_x = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$
Écoulement de révolution (coordonnées sphériques)	$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$	$v_\varphi = -\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$

## C.3 Relation potentiel des vitesses - composantes des vitesses

Ces relations sont simplement les expressions en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques de la relation générale  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \Phi$ .

Écoulement à deux dimensions (coordonnées cartésiennes)	$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$	
Écoulement à deux dimensions (coordonnées polaires)	$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$	$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$	
Écoulement à trois dimensions (coordonnées cartésiennes)	$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$
Écoulement à trois dimensions (coordonnées cylindriques)	$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$	$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$	$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$
Écoulement à trois dimensions (coordonnées sphériques)	$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$	$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$	$v_\theta = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$