

PARTIE I - Solides Indéformables.



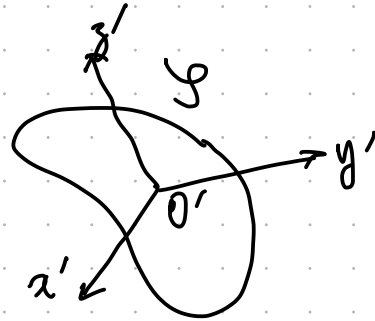
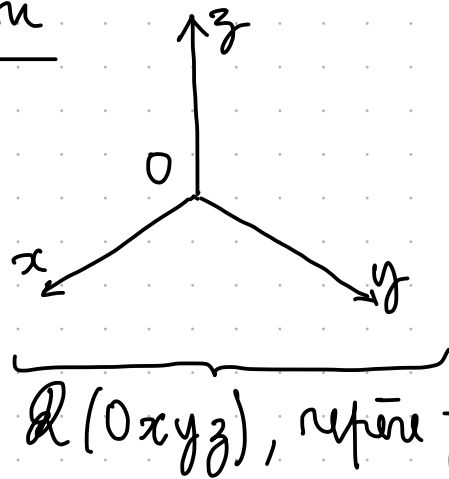
- Cette partie permet d'introduire des notions de base [Torseurs, Moments] et de comprendre des phénomènes macro. surprenants [effet gyroscopique].
- Plan :
 - 1) Cinématique pour décrire le mouvement des solides
 - 2) Cinétique : application du PFD
 - 3) Application à l'effet gyroscopique

Chap I - Cinématique des solides indéformables

Objectif : Décrire le mouvement d'un solide

I] Torseur cinématique

1) Définition



- De façon générale, on a besoin de 6 variables pour décrire le mouvement de S

Par exemple :

- 3 ddl pour la translation : Position (ou vitesse) d'un point O' de référence
- 3 ddl pour la rotation : Orientation d'un repère $R'(O'x'y'z')$ attaché à S

Pour l'orientation, on peut utiliser les coordonnées des vecteurs de base, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

(9 coordonnées mais 6 contraintes car R' orthonormé $\rightarrow \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad \forall i, j$)

Autre possibilité : les angles d'Euler (voir plus loin)

- Propriété fondamentale

Pour tous points $A, B \in \mathcal{P}$,

$$\vec{v}(A, t) = \underbrace{\vec{v}(B, t)}_{\text{Translation}} + \underbrace{\vec{\Omega}(t) \wedge \vec{BA}}_{\text{Rotation}}$$

$\Rightarrow$ On connaît la vitesse instantanée en tout point de $\mathcal{P}$ si on connaît la vitesse en 1 point ($\vec{v}(B, t)$) et le vecteur rotation instantanée ($\vec{\Omega}(t)$)

Et on retrouve les 6 ddl.

- On note

$$T = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} \\ \vec{v}(B) \end{array} \right\}_B, \text{ Torseur cinématique}$$

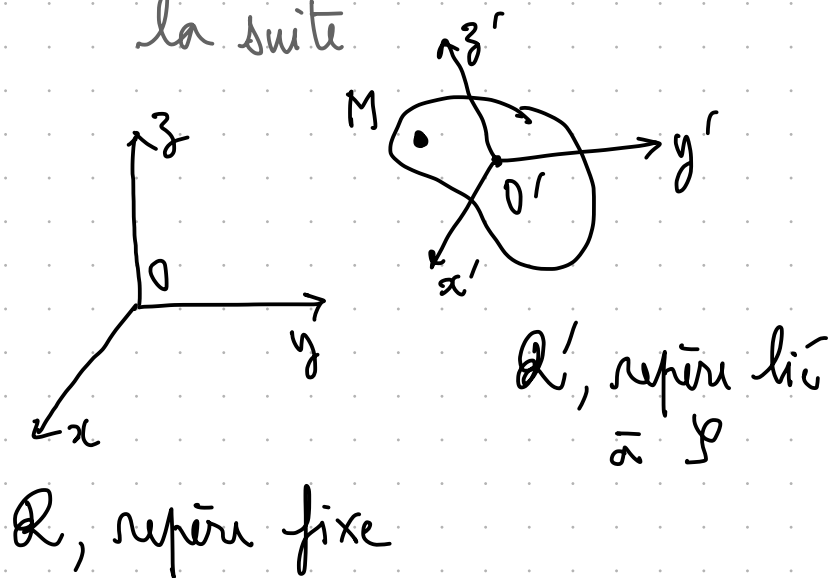
- Rmq : $\vec{v}(A)$ ne dépend pas du choix de B car, pour un autre point B' , on a

$$\vec{v}(B') = \vec{v}(B) + \vec{\Omega} \wedge \vec{BB'}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \vec{v}(A) &= \vec{v}(B') - \vec{\Omega} \wedge \vec{BB'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{BA} \\ &= \vec{v}(B') + \vec{\Omega} \wedge \vec{B'A} \end{aligned}$$

$$\text{et } T = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} \\ \vec{r}(B) \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} \\ \vec{r}(B') \end{array} \right\}_{B'}$$

- Démonstration Un peu longue mais elle permet d'introduire des éléments importants pour la suite.



- Pour $M \in S$, $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$
 $= \vec{OO'} + x \vec{e_x} + y \vec{e_y} + z \vec{e_z}$
 avec $x, y, z = \text{constantes}$ car M fixe dans S

$$\text{d'où } \vec{r}(M) = \vec{r}(O') + x \frac{d\vec{e_x}}{dt} + y \frac{d\vec{e_y}}{dt} + z \frac{d\vec{e_z}}{dt}$$

- On exprime $\frac{d\vec{e_i}}{dt}$ dans Q' :

$$\forall i \quad \frac{d\vec{e_i}}{dt} = \sum_{j=x,y,z} R_{ij} \vec{e_j} \quad \text{avec} \quad R_{ij} = \frac{d\vec{e_i}}{dt} \cdot \vec{e_j}$$

Condition d'orthonormalité' $\vec{e}_i(t) \cdot \vec{e}_j(t) = \delta_{ij}$

donc $\frac{d\vec{e}_i}{dt} \cdot \vec{e}_j + \vec{e}_i \cdot \frac{d\vec{e}_j}{dt} = 0$ et $R_{ij} = -R_{ji}$

• La matrice $[R]$ est donc antisymétrique

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & R_{12} & R_{13} \\ -R_{12} & 0 & R_{23} \\ -R_{13} & -R_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

On introduit $\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} R_{23} \\ -R_{13} \\ R_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}$ dans $\mathcal{R}'$

et on vérifie que $\forall i \quad \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_i$

Par ex., $\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \cancel{R_{11}} \vec{e}_x + R_{12} \vec{e}_y + R_{13} \vec{e}_z$
 $= \Omega_z \vec{e}_y - \Omega_y \vec{e}_z$

et $\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_x = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_z \\ -\Omega_y \end{bmatrix}$

• Donc $\vec{r}(M) = \vec{r}(O') + x \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_x + y \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_y + z \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_z$
 $= \vec{r}(O') + \vec{\Omega} \wedge (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z)$
 $= \vec{O'M}$

et on a la loi de composition des vitesses

Rmq: 1) $\vec{\Omega}$ est la vitesse de rotation de $\mathcal{R}' / \mathcal{R}$ que l'on peut noter $\vec{\Omega}(\mathcal{R}' / \mathcal{R})$

2) Si M est immobile dans $\mathcal{R}'$,

$$\left. \frac{d\vec{O'M'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}' / \mathcal{R}) \wedge \vec{O'M'}$$

3) Si M est mobile dans $\mathcal{R}'$,

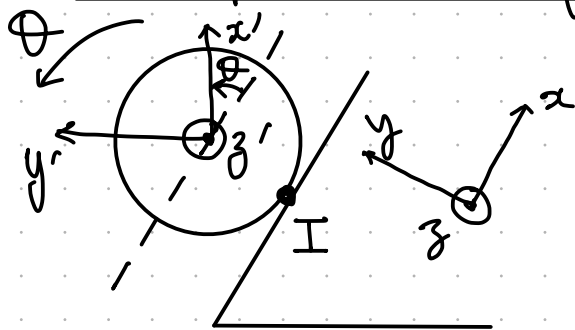
$$\left. \frac{d\vec{O'M'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M'} + \underbrace{\frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z}_{= \left. \frac{d\vec{O'M'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'}}$$

Vitesse d'entraînement due au mv^t de $\mathcal{R}' / \mathcal{R}$

D'où la règle de dérivation en référentiel mobile :

$$\left. \frac{d\vec{O'M'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{O'M'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}' / \mathcal{R}) \wedge \vec{O'M'}$$

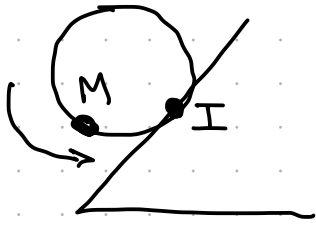
2) Exemple d'un cylindre sur un plan incliné



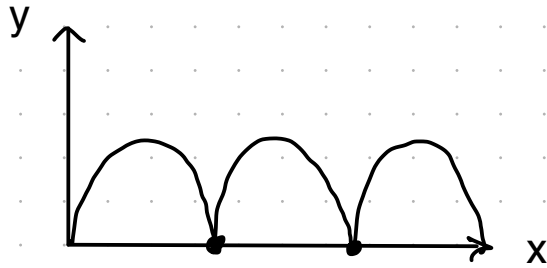
On repère $\mathcal{R}'$ par l'angle θ

Le cylindre roule sans glisser. Quel est son torseur cinématique ?

On a besoin de la vitesse en un point particulier. S'il y a roulement sans glissement, la vitesse du point de contact I est nulle: $\vec{v}(I) = \vec{0}$



⚠ La vitesse d'un point donné de la circonférence, M , varie dans le temps (mouvement cycloïde) mais sa vitesse est nulle lorsqu'il est en contact avec le support.



$\curvearrowright$ M en contact avec le support

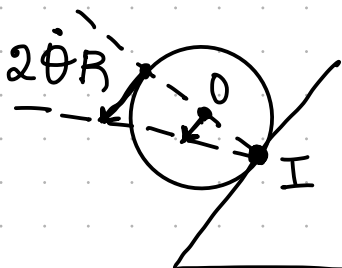
Pour trouver $\vec{\Omega}$, on a $\vec{e}'_x = \cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \frac{d\vec{e}'_x}{dt} &= -\sin\theta \dot{\theta} \vec{e}_x + \cos\theta \dot{\theta} \vec{e}_y \\ &= \dot{\theta} \vec{e}'_y = \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{e}'_x \end{aligned}$$

$$\text{donc } \vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}'_z = \dot{\theta} \vec{e}_z$$

$$\text{et } \boxed{\vec{v}(M) = \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{IM}}$$

$\vec{v} \perp \vec{IM}$
et de norme $\propto IM$



Roule ment
sans
glissement

= Rotation instantanée
autour du point de contact
(qui change à chaque instant)

$$\curvearrowright T = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \vec{e}_z \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \vec{e}_z \\ -R\dot{\theta} \vec{e}_x \end{array} \right\}_O$$

II] Généralités sur les toiseurs

(Quelques mots généraux
on en verra d'autres
exemples de toiseurs)

(Quelques mots généraux
on en verra d'autres
exemples de tosseurs)

- Un torseur est un champ vectoriel $M \rightarrow \vec{m}(M)$ défini par 2 vecteurs $\vec{R}$ et $\vec{R} = 0$ +

$T = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{m}(0) \end{array} \right\}_O \rightarrow \begin{array}{l} \text{Résultante} \\ \text{Valeur en un point} \\ \text{particulier} \end{array}$

et une règle de calcul :

$$\vec{m}(M) = \vec{m}(O) + R \times \vec{OM}$$

- Proprietés

- 1) Définition indépendante du choix de O

- 2) Equiprojectivité:

$$\forall A, B \quad \overrightarrow{m}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{m}(B) \cdot \overrightarrow{AB}$$

on montre que la réciproque est vraie : tout champ équivariant est un torseur

- ### 3) Invariant scalaire :

$$\forall M \quad \vec{m}(M) \cdot \vec{R} = \text{Cste}$$

- 4) Axe du torseur : il existe une droite parallèle à $\vec{R}$ le long de laquelle $\vec{m}(M)$ est parallèle à $\vec{R}$. (Démonstration en complément)

• Cas particuliers :

- Couple $\vec{R} = \vec{0}$

Pour la vitesse, cela correspond à une translation.

- Glisseur si il existe un point O / $\vec{m}(O) = \vec{0}$
 alors $\vec{m}(M) = \vec{R} \wedge \vec{OM}$, $\vec{m} \perp \vec{\alpha}$
 $\vec{R}$ et $\vec{OM}$ et $\vec{m} = \vec{0}$ le long de l'axe
 du torseur. (droite parallèle à $\vec{R}$ passant
 par O).

Pour la vitesse Glisseur $\equiv$ Rotation autour
 de Ω

• A tout champ vectoriel $\vec{u}(M)$ (discret ou continu),
 on peut associer un torseur /

$$\begin{cases} \vec{R} = \sum_{\vec{M}} \vec{u}(\vec{M}) & \text{(ou } \int d^3r \vec{u}(M) \text{)} \\ \vec{m}(O) = \sum_{\vec{M}} \vec{OM} \wedge \vec{u}(M) & \text{(ou } \int d^3r \vec{OM} \wedge \vec{u}(M) \text{)} \end{cases}$$

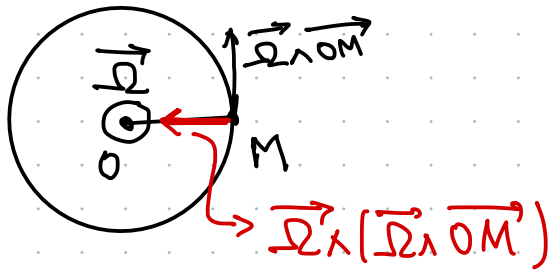
Par ex., torseur des forces appliquées

($\vec{R}$ est la force totale, $\vec{m}$ le moment des forces)

• Rmq: L'accélération n'est pas un torseur

$$\begin{aligned} \vec{a}(M) &= \frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \vec{a}(O) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt} \\ &= \underbrace{\vec{a}(O) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OM}}_{\text{Accélération angulaire}} + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})}_{\text{Terme supplémentaire d'entraînement}} \end{aligned}$$

⚠ $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})$ n'est pas la force de Coriolis qui est une force apparente liée au mouvement d'un point dans un référentiel en mouvement



Pour une rotation, $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})$ est l'accélération centripète (ou force inertielle)

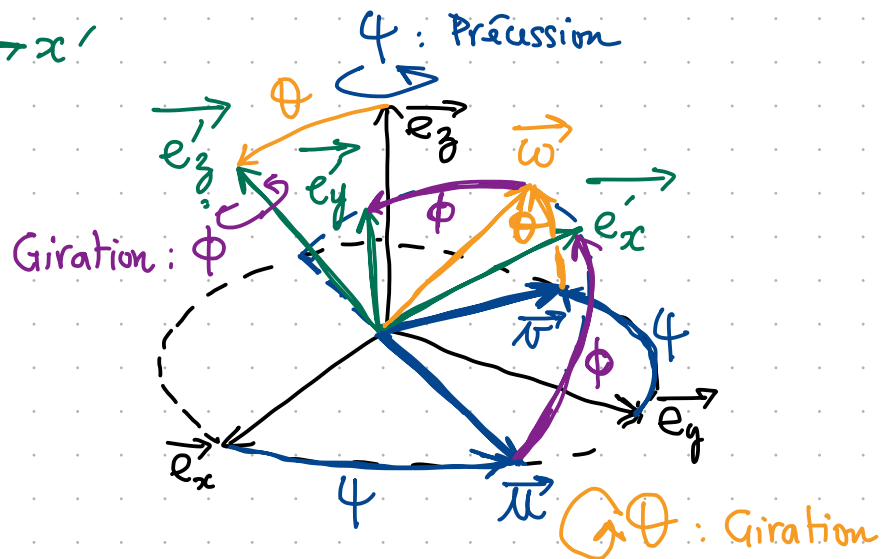
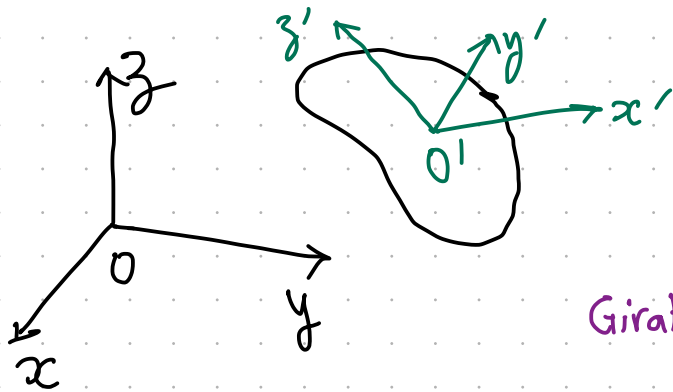
Si M est mobile dans $\mathcal{R}'$, on a un terme supplém.
 $2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}')$ qui est la force de Coriolis
 (cf Compléments)

III] Angles d'Euler

Objectif : Décrire l'orientation de $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$
 et en déduire $\vec{\Omega}(t)$.

Pour cela, on transforme $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$ en 3 rotations

1) Définition



1) Précession :

Rotation de ϕ
autour de $\vec{e}_z$,

$$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_z) \text{ telle que}$$

$\vec{u}, \vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ soient dans le même plan, ou
de façon équivalente que $\vec{v}, \vec{e}_z$ et $\vec{e}_z$ soient
dans le même plan

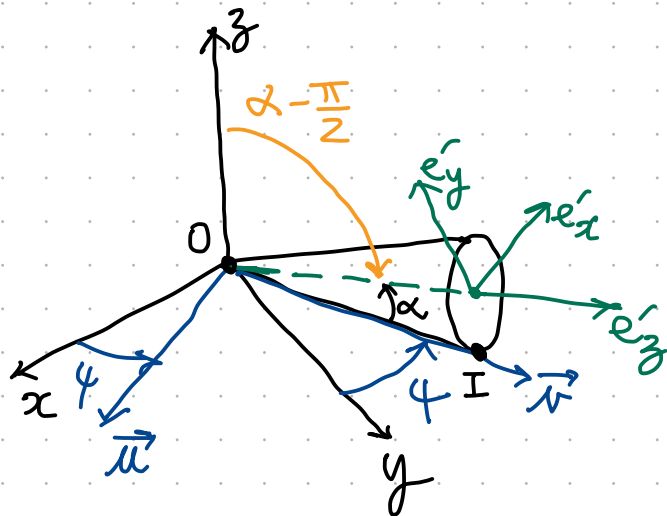
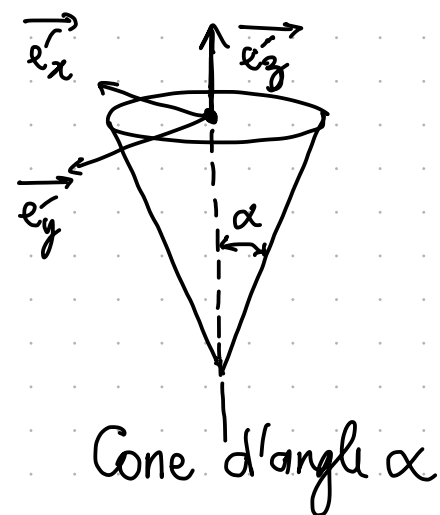
demo : si $\vec{u} \in (Ox'y')$, $\vec{e}_z' \perp \vec{u}$ donc $\vec{e}_z' \in$ au plan $\perp$ à $\vec{u}$
qui contient $\vec{v}$ et $\vec{z}$

2) Nutation : Rotation de θ autour de $\vec{u}$
pour aligner $\vec{e}_z$ et $\vec{e}_z'$ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_z) \rightarrow (\vec{u}, \vec{w}, \vec{e}_z')$

3) Giration : Rotation de ϕ autour de $\vec{e}_z'$
pour aligner $\vec{u}$ et $\vec{e}_x$ et $\vec{w}$ et $\vec{e}_y$

$$\text{et } \vec{\Omega}(t) = \dot{\phi} \vec{e}_z(t) + \dot{\theta} \vec{u}(t) + \dot{\phi} \vec{e}_z'(t)$$

2) Exemple d'un cône sur un plan



$$\begin{cases} \text{Précession de } \psi \\ \text{Nutation de } \alpha - \frac{\pi}{2} \\ \text{Giration de } \phi \end{cases} \Rightarrow \vec{\Omega}(t) = \dot{\psi} \vec{e}_z + 0 + \dot{\phi} \vec{e}_z$$

car $\alpha = \text{cte}$

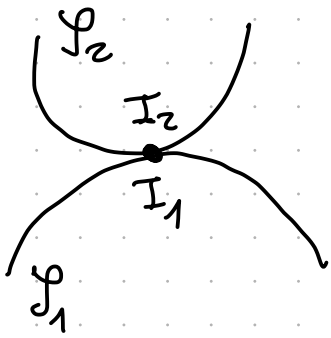
S'il y a roulement sans glissement, $\vec{v} = 0$
 le long de l'axe (OI) qui est donc l'axe
 instantané de rotation

Donc $\vec{\Omega} \parallel (OI)$ et $\vec{\Omega} \in (Oxy)$

d'où $\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_z = 0 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \underbrace{\vec{e}_z' \cdot \vec{e}_z}_{= \sin \alpha}$

Condition de non-glissement $\Rightarrow \dot{\psi} = -\dot{\phi} \sin \alpha$

IV] Cinématique des liaisons



• On modélise le contact par un point $I = I_1 = I_2$ commun aux 2 solides

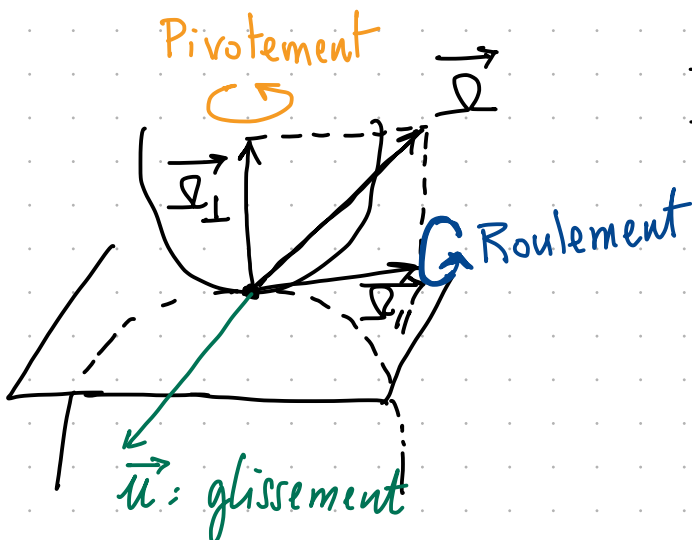
• Sans glissement, $\vec{v}(I_1 \in \mathcal{S}_1) = \vec{v}(I_2 \in \mathcal{S}_2)$

et s'il y a glissement, la vitesse de glissement de $\mathcal{S}_2 / \mathcal{S}_1$ est

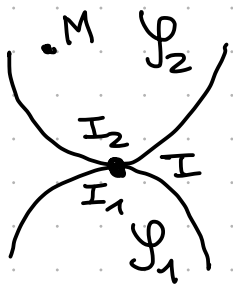
$$\vec{u} = \vec{v}(I_2 \in \mathcal{S}_2) - \vec{v}(I_1 \in \mathcal{S}_1)$$

avec la condition $I_1 = I_2 \text{ à } t$

• On décompose le vecteur rotation de $\mathcal{S}_2 / \mathcal{S}_1$ en :



$$\vec{\Omega} = \underbrace{\vec{\Omega}_\perp}_{\substack{\text{Composante } \perp \\ \text{au plan tangent} \\ \text{au contact} \\ \Rightarrow \text{Pivotement}}} + \underbrace{\vec{\Omega}_\parallel}_{\substack{\text{Dans le} \\ \text{plan} \\ \text{tangent} \\ \Rightarrow \text{Roulement}}}$$



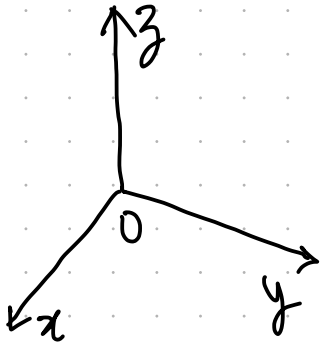
Et le mouvement d'un point $M \in \mathcal{P}_2$ par rapport à $\mathcal{P}_1$ est donné par la composition des vitesses :

$$\begin{aligned} \vec{v}(M/\mathcal{P}_1) &= \underbrace{\vec{v}(M/\mathcal{P}_2)}_{= \vec{0}} + \underbrace{\vec{v}(I_2/\mathcal{P}_1)}_{= \vec{u} \text{ vitesse de glissement}} + \underbrace{\vec{\Omega}(\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_1)}_{= \vec{\Omega}(\mathcal{P}_2) - \vec{\Omega}(\mathcal{P}_1)} \wedge \overrightarrow{I_2 M} \end{aligned}$$

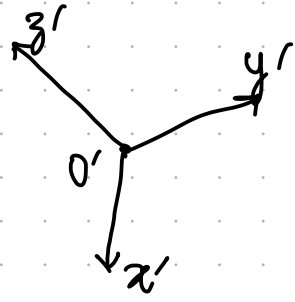
$$\text{d'où } \vec{v}(M/\mathcal{P}_1) = \vec{u} + \vec{\Omega}(\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_1) \wedge \overrightarrow{I M}$$

Compliments

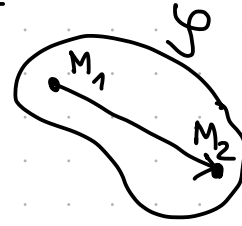
I] Composition des mouvements



R fixe



R' mobile



Y mobile dans R' et/ou R

• Soit $\vec{\Omega}(R'/R)$, vecteur rotation de R'/R

$$\left. \frac{d\vec{e}_i}{dt} \right|_R = \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{e}_i$$

et pour tout vecteur $\vec{u} = \sum_i u_i \vec{e}_i$

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R = \sum_i \dot{u}_i \vec{e}_i + \sum_i u_i \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{e}_i$$

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{R'} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{u}$$

1) Composition des rotations

• Soit $\vec{u} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ avec $M_1, M_2 \in Y$

$$\left. \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} \right|_R = \vec{\Omega}(Y/R) \wedge \overrightarrow{M_1 M_2} \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} \right|_{R'} = \vec{\Omega}(Y/R') \wedge \overrightarrow{M_1 M_2}$$

$$\text{et } \vec{\Omega}(Y/R) = \vec{\Omega}(Y/R') + \vec{\Omega}(R'/R)$$

2) Composition des vitesses

$$\text{On a } \vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \vec{v}(M/R) &= \vec{v}(O'/R) + \left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right|_R \\ &= \vec{v}(O'/R) + \underbrace{\left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right|_{R'}}_{= \vec{v}(M/R')} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{OM} \\ &= \vec{v}(M/R') \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \vec{v}(M/R) = \underbrace{\vec{v}(M/R')}_{\text{Vitesse de } M \text{ dans } R'} + \underbrace{\vec{v}(O'/R) + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{OM}}_{\text{Vitesse d'entraînement à cause du mouvement de } R'/R \text{ (comme si } M \text{ était immobile dans } R')}$$

$$\vec{v}(M/R) = \vec{v}(M/R') + \vec{v}(M \in R'/R)$$

On a additivité des torseurs

$$\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(Y/R) \\ \vec{v}(M/R) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(Y/R') \\ \vec{v}(M/R') \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(R'/R) \\ \vec{v}(M \in R'/R) \end{Bmatrix}$$

3) Composition des accélérations

$$\vec{v}(M/Q) = \vec{v}(M/Q') + \vec{v}(O'/Q) + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M}$$

$$\text{avec } \vec{\Omega} = \vec{\Omega}(Q'/Q)$$

$$\text{d'où } \vec{a}(M/Q) = \left. \frac{d\vec{v}(M/Q')}{dt} \right|_Q + \vec{a}(O'/Q) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right|_Q$$

$$= \vec{a}(M/Q') + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/Q') + \vec{a}(O'/Q) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{v}(M/Q') + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M})$$

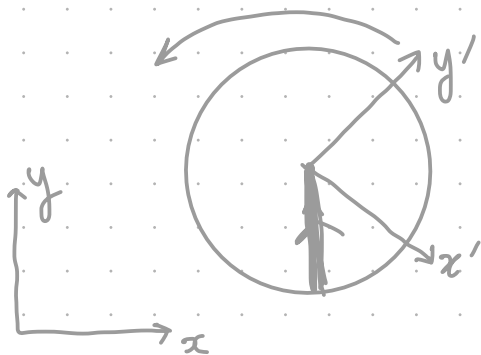
$$\vec{a}(M/Q) = \vec{a}(M/Q') + \vec{a}(O'/Q) + \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'M})}_{\text{Accélération d'entraînement}}$$

Comme si M était immobile dans Q'

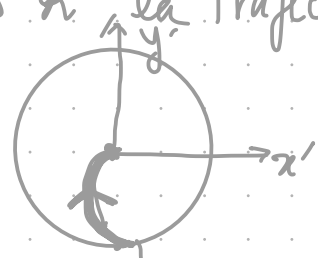
$$+ \underbrace{2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/Q')}_{\text{Force de Coriolis}}$$

A cause du mouvement de M dans Q' en rotation / Q .

La force de Coriolis est une pseudo-force pour tenir compte de la rotation du référentiel pendant le mouvement de l'objet.

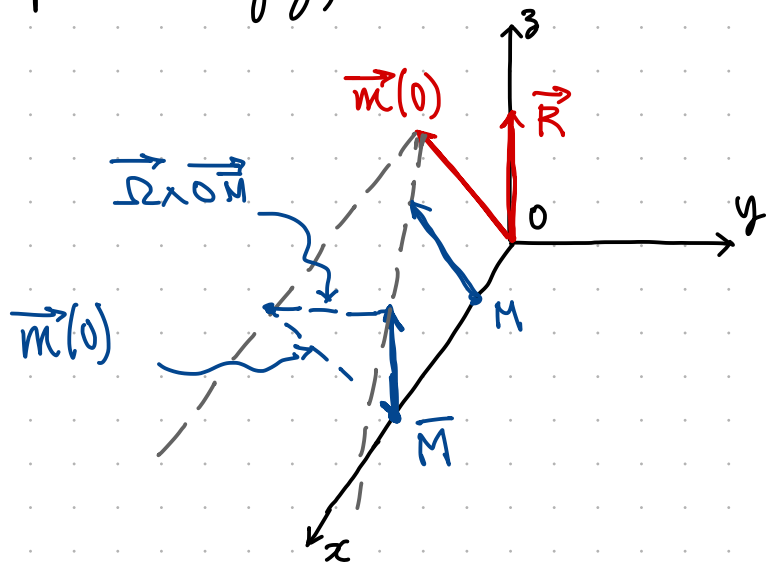


ex. on tire une balle qui avance droit dans Q . Ds Q' la trajectoire est courbée



II] Axe d'un torseur

- Soit un torseur $T = \left\{ \begin{matrix} R \\ \vec{m}(0) \end{matrix} \right\}_0$
- On choisit un repère tel que $\vec{e}_3 \parallel \vec{R}$ et $\vec{m}(0)$ est dans le plan (Oyz)



- Il existe un point $\bar{M}$ de (Ox) , qui vérifie
$$\vec{m}(\bar{M}) = \vec{m}(0) + \vec{R} \wedge \vec{OM} = \lambda \vec{R} \quad \text{et} \quad \vec{OM} = x \vec{e}_x$$

$$\text{d'où} \quad \vec{m}(0) \cdot \vec{R} = \lambda R^2 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\vec{m}(0) \cdot \vec{R}}{R^2}$$

$$\text{et} \quad \vec{R} \wedge \vec{OM} = R x \vec{e}_y \quad \text{d'où} \quad \vec{m}(0) \cdot \vec{e}_y + R x = 0$$

$$\text{d'où} \quad x = - \frac{\vec{m}(0) \cdot \vec{e}_y}{R}$$

- L'axe du torseur est la droite (Δ) passant par $\bar{M}$ et parallèle à $\vec{R}$ car si $A \in (\Delta)$,

$$\vec{m}(A) = \vec{m}(\bar{M}) + \vec{R} \wedge \vec{MA} = \lambda \vec{R}$$