

Chap II - Cinétique des solides indéformables

- Maintenant que l'on sait décrire le mouvement, on applique le PFD pour prédire la cinétique
- Il y a plusieurs éléments à introduire avant le PFD

I] Torseur cinétique

1) Définition

- On a vu qu'à tout champ $\vec{u}(M)$ on peut associer un torseur / $\vec{R} = \sum_M \vec{u}(M)$ et $\vec{M}(O) = \sum_M \vec{OM} \wedge \vec{u}(M)$
- Le torseur cinétique est associé au champ de quantité de mouvement $\rho(M)\vec{v}(M)$, ρ : densité volumique locale

- Résultante $\vec{P} = \int d^3r \rho(M)\vec{v}(M) = M_T \vec{v}_G$

↑
masse totale
de $\mathcal{P}$

↑
Vitesse du
centre de
gravité

- Moment cinétique en un point A :

$$\vec{\sigma}_A = \int d^3r \vec{AM} \wedge \rho(M)\vec{v}(M)$$

- Par les propriétés des tenseurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_0 + M_T \vec{N}_G \wedge \vec{OA} \\ \vec{\sigma}_A \cdot \vec{OA} = \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{OA} \\ \vec{\sigma}_A \cdot \vec{N}_G = \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{N}_G \end{array} \right.$$

On va voir qu'il est utile d'appliquer le PFD dans $\mathcal{R}^*$

2) Référentiel Barycentrique $\mathcal{R}^*$

- $\mathcal{R}^*$ est le référentiel en translation à $\vec{N}_G$ (en général, non-Galiléen)
- Dans $\mathcal{R}^*$, $\vec{N}_G^* = 0$ donc $\vec{P}^* = \vec{0}$ et le torseur cinétique est un couple /

$$\vec{\sigma}_A^* = \vec{\sigma}_G^* = \text{Cste} \equiv \vec{\sigma}^*$$

Le torseur cinématique est un glisseur avec

$$\vec{N}^*(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{GM} \quad \text{Rotation autour de G.}$$

• On a $\vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}_a^* = \int d^3n \vec{GM} \wedge \rho(M) \vec{N}^*(M)$

et $\vec{N}^*(M) = \vec{N}(M) - \vec{N}_G$

d'où
$$\vec{\sigma}^* = \int d^3n \vec{GM} \wedge \rho(M) \vec{N}(M) - \underbrace{\int d^3n \vec{GM} \wedge \rho(M) \vec{N}_G}$$

Comme $\vec{\sigma} = \text{Cste}$ dans $\mathcal{R}^*$, on peut le calculer en G

$$= \left(\int d^3n \rho(M) \vec{GM} \right) \wedge \vec{N}_G^0$$

par définition de G

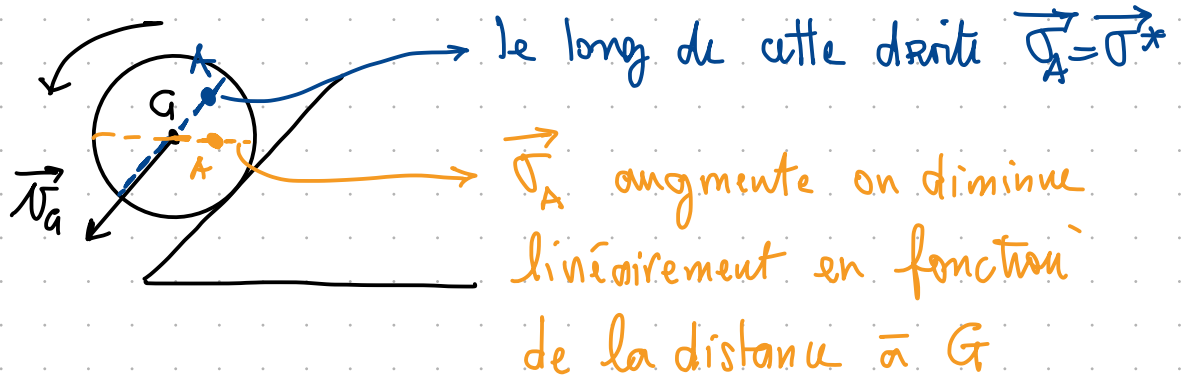
donc $\vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}_G^* = \vec{\sigma}_G$ Le moment cinétique en G est le même dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$

et $\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_G + M_T \vec{v}_G \wedge \vec{GA}$

$$\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}^* + M_T \vec{v}_G \wedge \vec{GA}$$

Théorème de Koenig qui relie le moment cinétique dans $\mathcal{R}^*$ et en un point quelconque dans $\mathcal{R}$

• Ex :



• Théorème de Koenig pour l'énergie cinétique

$$K = K^* + \frac{1}{2} M_T v_G^2$$

↑
Energie cinétique totale

⏟
Energie cinétique de rotation autour de G dans $\mathcal{R}^*$

⏟
Energie de translation

L'intérêt de $\mathcal{R}^*$ est de découpler translation et rotation.

Démo: $K = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{M}) v(\mathbf{M})^2$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{M}) (\vec{v}^*(\mathbf{M}) + \vec{v}_G)^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{M}) v^*(\mathbf{M})^2}_{= K^*} + \underbrace{\left(\int d^3r \rho(\mathbf{M}) \vec{v}^*(\mathbf{M}) \right) \cdot \vec{v}_G}_{\downarrow} + \underbrace{\frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{M}) v_G^2}_{= \frac{1}{2} M_T v_G^2}$$

$$\int d^3r \rho(\mathbf{M}) \vec{GM} = \vec{0} \Rightarrow \int d^3r \rho(\mathbf{M}) \vec{v}^*(\mathbf{M}) = 0$$

II] Solides en rotation

1) Opérateur d'inertie

On a $\vec{\sigma}_A = \int d^3r \rho(\mathbf{M}) \vec{AM} \wedge \vec{v}(\mathbf{M})$

si A et $M \in \mathcal{V}$, $\vec{v}(\mathbf{M}) = \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \wedge \vec{AM}$

d'où $\vec{\sigma}_A = \underbrace{\int d^3r \rho(\mathbf{M}) \vec{AM} \wedge \vec{v}(A)}_{= \int d^3r \rho(\mathbf{M}) \vec{AG} \wedge \vec{v}(A)} + \int d^3r \rho(\mathbf{M}) \vec{AM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{AM})$

$$= \int d^3r \rho(\mathbf{M}) \vec{AG} \wedge \vec{v}(A) + \underbrace{\left(\int d^3r \rho(\mathbf{M}) \vec{GM} \right)}_{= \vec{0}} \wedge \vec{v}(A)$$

$$\vec{\sigma}_A = M_T \vec{AG} \wedge \vec{v}(A) + \int d^3r \rho(\mathbf{M}) \vec{AM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{AM})$$

Donc, si $\vec{v}(A) = \vec{0}$ (rotation autour de A) ou si on calcule $\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}^*$ (i.e $A=G$)

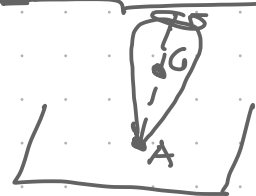
$$\vec{\sigma}_A = \int d^3r \rho(\mathbf{M}) \vec{AM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{AM})$$

- $\vec{\sigma}_A$ est une fonction linéaire de $\vec{\Omega}$, donc il existe une matrice $[J_A]$, opérateur d'inertie, telle que:

$$\vec{\sigma}_A = [J_A] \cdot \vec{\Omega} \quad \text{si } \vec{r}(A) = \vec{0} \text{ ou } A = G$$

(Fin 4h)

Ex:



Toupie.

- Comment s'exprime $[J_A]$?

$$\text{On a } \vec{AM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{AM}) = AM^2 \vec{\Omega} - (\vec{AM} \cdot \vec{\Omega}) \vec{AM}$$

et avec A origine de $\mathcal{R}'$, référentiel attaché à $\mathcal{P}$

$$\vec{AM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_A = \int d^3r \, \rho(M) \begin{bmatrix} (\cancel{x^2} + y^2 + z^2) \Omega_x - (\cancel{x} \Omega_x + y \Omega_y + z \Omega_z) x \\ (\quad \quad) \Omega_y - (\quad \quad) y \\ (\quad \quad) \Omega_z - (\quad \quad) z \end{bmatrix}$$

$$= \int d^3r \, \rho(M) \begin{bmatrix} (y^2 + z^2) \Omega_x - xy \Omega_y - xz \Omega_z \\ (x^2 + z^2) \Omega_y - yx \Omega_x - yz \Omega_z \\ (x^2 + y^2) \Omega_z - zx \Omega_x - zy \Omega_y \end{bmatrix}$$

$$= \int d^3r \, \rho(M) \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}$$

donc $[J_A]$ est symétrique et

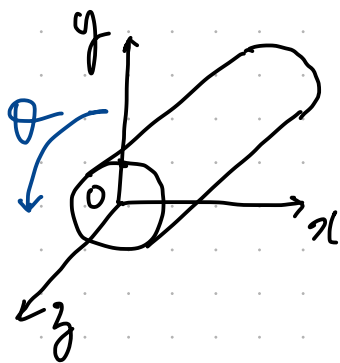
$$[J_A] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ & I_{yy} & -I_{yz} \\ & & I_{zz} \end{bmatrix}$$

avec $I_{xx} = \int d^3r \rho(M) (y^2 + z^2) \equiv I_{(Ox)}$ Moment d'inertie de $\mathcal{V}$ / l'axe (Ox)

$I_{xy} = \int d^3r \rho(M) xy$ Produit d'inertie

- $[J_A]$ décrit la répartition des masses dans $\mathcal{V}$ et ne dépend que de ρ et de la forme de $\mathcal{V}$
- $[J_A]$ symétrique donc diagonalisable
 $\Rightarrow$ 3 axes principaux d'inertie

Exemple : Un cylindre plein



A cause des symétries miroirs par rapport aux plans (Oxy) , (Oxz) et (Oyz) , les axes principaux sont (Oz) et n'importe quelles directions (Ox) et (Oy) perpendiculaire à (Oz)

$$I_{zz} = I_{(Oz)} = \int dx dy dz \rho (x^2 + y^2) = \rho L \int_0^R 2\pi r dr r^2 = \rho L \frac{\pi}{2} R^4$$

On a $I_{(0z)} = \frac{\pi}{2} \rho L R^4$ et $M_T = \rho L \pi R^2$

d'où $I_{(0z)} = \frac{1}{2} M_T R^2$

et $I_{(0x)} = I_{(0y)} = \int dx dy dz \rho \cdot (x^2 + y^2)$ Cf TD 1

d'où $[J_0] = \begin{bmatrix} I_{(0x)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{(0y)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} M_T R^2 \end{bmatrix}$

et pour une rotation autour de $(0z)$ $\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$

d'où $\vec{\sigma}_0 = \frac{1}{2} M_T R^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$

2) Energie cinétique de rotation

• Si $\mathcal{V}$ est en rotation autour de A,
 $\vec{r}(A) = \vec{0}$ et $\vec{r}(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{AM}$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(M) (\vec{\Omega} \wedge \vec{AM}) \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{AM}) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(M) \underbrace{[\vec{AM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{AM})]}_{= \vec{\sigma}_A} \cdot \vec{\Omega} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(M) [\vec{AM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{AM})] \cdot \vec{\Omega} \\ &= \vec{\sigma}_A \cdot \vec{\Omega} = [J_A] \cdot \vec{\Omega} \end{aligned}$$

d'où

$$K = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot [J_A] \cdot \vec{\Omega}$$

si $\mathcal{V}$ en rotation
 autour de A.

• Dans le cas général

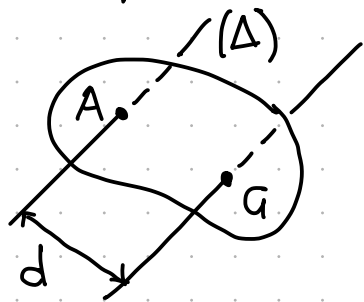
$$K = \frac{1}{2} M_T v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot [\mathbf{J}_G] \cdot \vec{\Omega} \\ = \frac{1}{2} M_T v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}^*$$

car $\mathcal{V}$ est en rotation autour de G dans $\mathcal{R}^*$

et dans le repère des axes principaux :

$$K = \frac{1}{2} M_T v_G^2 + \frac{1}{2} [I_{(Ox)} \Omega_x^2 + I_{(Oy)} \Omega_y^2 + I_{(Oz)} \Omega_z^2]$$

3) Théorème de Huygens



Rotation autour de (Δ) passant par A

$$\vec{\Omega} = \omega \vec{e}_\Delta \quad \text{et} \quad K = \frac{1}{2} \omega^2 (\vec{e}_\Delta [\mathbf{J}_A] \vec{e}_\Delta)$$

$$\text{On note } I_{A,\Delta} = \vec{e}_\Delta [\mathbf{J}_A] \vec{e}_\Delta$$

Moment d'inertie par rapport à (Δ)

Théorème de Huygens

$$I_{A,\Delta} = I_{G,\Delta} + M_T d^2$$

Relie les moments d'inertie en A et G

Démonstration en complément.

III] Principe fondamental de la dynamique

On a (enfin) tous les éléments pour appliquer le PFD.

1) Enoncé

- Dans un repère Galiléen, la dérivée temporelle du torseur cinétique est égale au torseur des forces appliquées :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M_T \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum_M \vec{F}_{\text{ext}}(M)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \sum_M \vec{AM} \wedge \vec{F}_{\text{ext}}(M) \equiv \vec{M}_{A/\text{Fext}}$$

pour A , un point fixe de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{R}$

} "Théorème"
du moment
cinétique

Rmq : on parle de "Théorème" du moment cinétique mais il n'est démontrable que pour un système de points en interaction de paires.

- Le "Théorème" du moment cinétique s'applique dans $\mathcal{R}^*$, même s'il n'est pas Galiléen :

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \vec{M}_{G/\text{Fext}}$$

Démo : $\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}^* + M_T \vec{r}_G \wedge \vec{GA}$ Théorème de Koenig

$$\text{d'où } \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} + M_T \frac{d\vec{r}_G}{dt} \wedge \vec{GA} + \underbrace{M_T \vec{r}_G \wedge (\vec{v}_A - \vec{v}_G)}_{\text{car A fixe} = 0}$$

$$= \sum_M \vec{F}_{\text{ext}}(M)$$

$$\text{et } \frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \sum_M \vec{AM} \wedge \vec{F}_{\text{ext}}(M) + \sum_M \vec{GA} \wedge \vec{F}_{\text{ext}}(M)$$

$$= \sum_M \vec{GM} \wedge \vec{F}_{\text{ext}}(M) = \vec{M}_{G/F_{\text{ext}}}$$

2) Aspects énergétiques

$$\frac{dK}{dt} = \mathcal{P} = \sum_M \vec{F}_{\text{ext}}(M) \cdot \vec{v}(M)$$

Puissance fournie à $\mathcal{P}$ par les forces extérieures

Et si $\vec{F}_{\text{ext}}$ est une force conservative qui dérive d'un potentiel (i.e., il existe un potentiel $E(\vec{r})$ tel que $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{\nabla} E$) alors

$$\frac{dK}{dt} = - \sum_M \frac{dE}{d\vec{r}_M} \cdot \frac{d\vec{r}_M}{dt} = - \frac{d}{dt} \sum_M E(\vec{r}_M)$$

et

$$E_{\text{TOT}} = K + E_{\text{pot}} = \text{Cste}$$

$= \sum_M E(\vec{r}_M)$ Énergie potentielle des forces extérieures

3) Changement de repère

- Pour 2 repères $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}'$ et un vecteur $\vec{u}(t)$ quelconque:

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{Q}} = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{Q}'} + \vec{\Omega}(\mathcal{Q}'/\mathcal{Q}) \wedge \vec{u}$$

cf Chap I

- Donc pour $\mathcal{Q}$ référentiel Galiléen et $\mathcal{Q}'$, base d'inertie, on a

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \right|_{\mathcal{Q}} = \left. \frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \right|_{\mathcal{Q}'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\sigma}^* = \vec{M}_{G/F_{\text{ext}}}$$

$$\vec{\sigma}^* = [J_G] \cdot \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{bmatrix} \text{ dans } \mathcal{Q}' \text{ avec } I_1, I_2, I_3 = \text{const}$$

Donc dans $\mathcal{Q}'$,

$$\begin{bmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{bmatrix} = \vec{M}_{G/F_{\text{ext}}}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{Q}'} = \vec{M}_{G/F_{\text{ext}}}$$

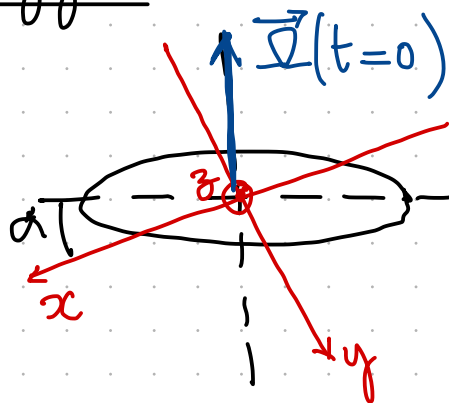
Si $\mathcal{I}$ n'est pas symétrique
il y a un couplage entre
 ω_1, ω_2 et ω_3

! Il faut
exprimer
 $\vec{M}$ dans $\mathcal{Q}'$

Equations d'Euler
(plus au Chap. suivant)

Application à l'anagyre

Vu du haut :



Dans un anagyre, les axes d'inertie ne sont pas alignés avec les axes de l'objet et on a

$$I_1 < I_2 \sim I_3$$

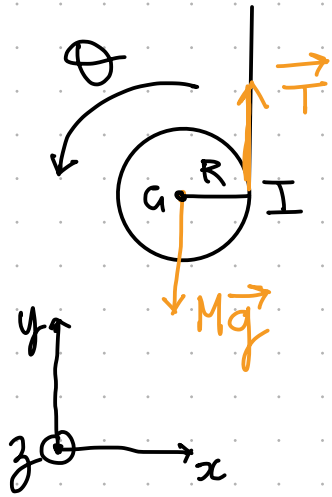
Si on impose initialement un basculement selon

$$\vec{\Omega} = -\sin\alpha \omega \vec{e}_x - \cos\alpha \omega \vec{e}_y = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \omega \\ -\cos\alpha \omega \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dans } \mathcal{R}'$$

on a
$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \sin\alpha \cos\alpha \omega^2 = M_3$$

et $\dot{\omega}_3 \neq 0$! d'où un pivotement autour de $\vec{e}_3$.

3) Exemple : la chute d'un yoyo



• Yoyo assimilé à un disque de rayon R ($I_{Ioz} = \frac{1}{2}MR^2$)

• $\vec{T}$ tension du fil

$$M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = M\vec{g} + \vec{T} \quad \text{d'où} \quad M\ddot{y}_G = -Mg + T$$

Trois méthodes pour déterminer $y_G(t)$

Méthode 1 : on applique le "théorème" du moment cinétique en G

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \vec{GI} \wedge \vec{T} = RT \vec{e}_z$$

$$\text{et } \vec{\Omega} = \dot{\Theta} \vec{e}_z \quad \text{et } \vec{\sigma}^* = \frac{1}{2}MR^2 \dot{\Theta} \vec{e}_z$$

$$\text{d'où} \quad \frac{1}{2}MR^2 \ddot{\Theta} = RT = MR(\ddot{y}_G + g)$$

$$\frac{1}{2}R\ddot{\Theta} = \ddot{y}_G + g$$

$$\text{et } \vec{v}_G = \underbrace{\vec{v}(I)}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{IG} = -\dot{\Theta}R \vec{e}_y$$

$$\text{d'où} \quad \ddot{y}_G = -R\ddot{\Theta} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}\ddot{y}_G = \ddot{y}_G + g$$

$$\text{et} \quad \ddot{y}_G = -\frac{2}{3}g$$

$\Rightarrow$ Chute libre avec gravité réduite par la tension du fil

Méthode 2 : Comme $\vec{\omega}(I) = \vec{0}$, on peut appliquer le "Théo" en I

$$\frac{d\vec{\sigma}_I}{dt} = \vec{M}_{I/F_{ext}} = \vec{IG} \wedge M\vec{g} = MRg \vec{e}_3$$

et d'après le théorème de Huygens :

$$I_{I,(0_3)} = I_{G,(0_3)} + MR^2 \\ = \frac{3}{2} MR^2$$

$$\text{d'où } \frac{3}{2} MR^2 \ddot{\Theta} = MRg \quad \text{et on retrouve} \\ R\ddot{\Theta} = -\ddot{y}_G = \frac{2}{3}g$$

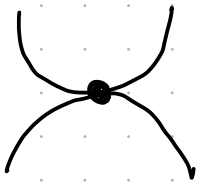
Méthode 3 : Conservation de l'énergie cinétique

$$E_{TOT} = K + E_{pot} = \text{cte} \\ = \frac{1}{2} M (\dot{y}_G)^2 + \frac{1}{2} I_G (\dot{\Theta})^2 + Mgy_G$$

$$\text{d'où } \cancel{M \ddot{y}_G \dot{y}_G} + \frac{1}{2} \cancel{MR^2 \dot{\Theta} \ddot{\Theta}} + \cancel{Mg \dot{y}_G} = 0 \\ = \underbrace{\dot{y}_G \ddot{y}_G}_{\frac{\ddot{y}_G^2}{R^2}}$$

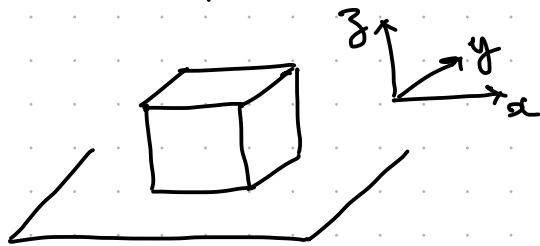
$$\text{et } \frac{3}{2} \ddot{y}_G + g = 0$$

IV] Liaisons et Contacts



- Une liaison contraint la translation et/ou la rotation de $\mathcal{S}$
- Bloquer une translation revient à appliquer une force extérieure (de liaison);
Bloquer une rotation revient à appliquer un moment

Exemples: 1) Cube posé sur un plan



$$T_{\text{Cinétique}} = \left\{ \begin{array}{l} [0, 0, \Omega_z] \\ [v_x, v_y, 0] \end{array} \right\}$$

Torseur des efforts
que la liaison impose à $\mathcal{S}$ pour
contraindre son mouvement

$$T_{\text{Liaison}} = \left\{ \begin{array}{l} [0, 0, F_z] \\ [m_x, m_y, 0] \end{array} \right\}$$

2) Liaison rotule

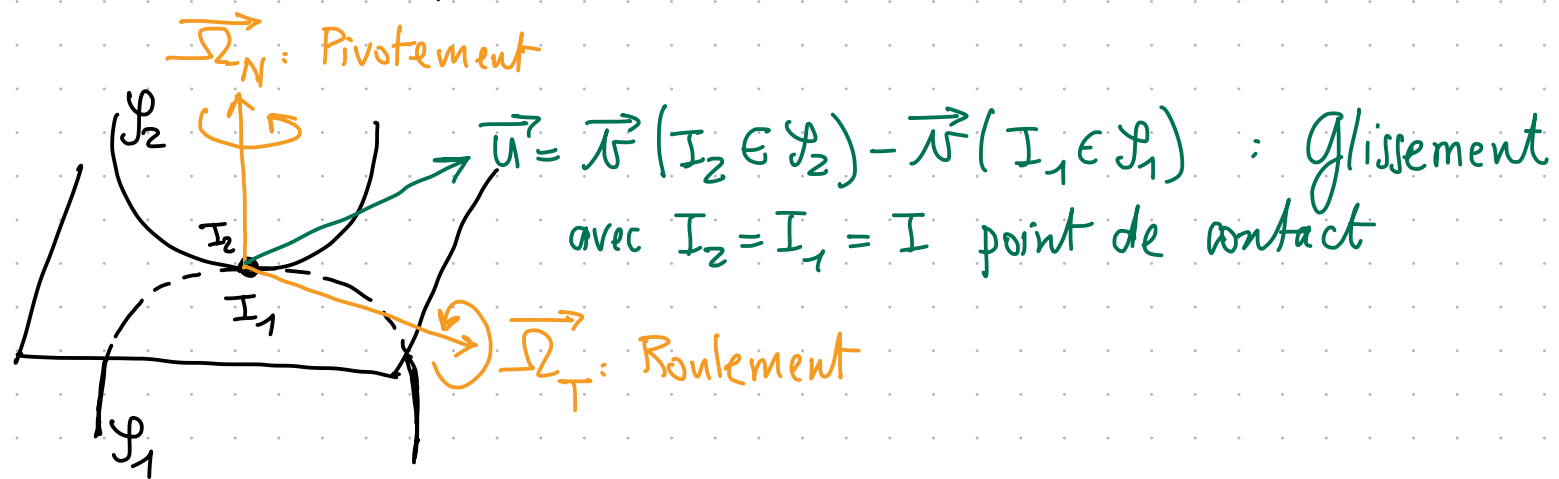


$$T_{\text{Cinétique}} = \left\{ \begin{array}{l} [\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z] \\ [0, 0, 0] \end{array} \right\}$$

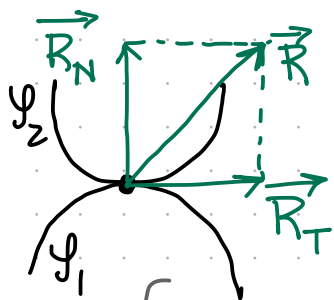
$$T_{\text{Liaison}} = \left\{ \begin{array}{l} [F_x, F_y, F_z] \\ [0, 0, 0] \end{array} \right\}$$

- Une liaison est dite parfaite si les forces et moments produits ont une puissance nulle.

• Force de frottement



- 2 solides en contact peuvent glisser, rouler ou pivoter l'un par rapport à l'autre
- On décrit la condition de glissement par la loi empirique de Coulomb



On note $\vec{R}$ la force de S_1 sur S_2
et $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$

- Si $|\vec{R}_T| < f_0 |\vec{R}_N|$ avec f_0 , coefficient de frottement statique

Pas de glissement

- S'il y a glissement,

$|\vec{R}_T| = f |\vec{R}_N|$ avec f , coeff. de frottement dynamique

La résistance au glissement d'un contact dépend de la force normale

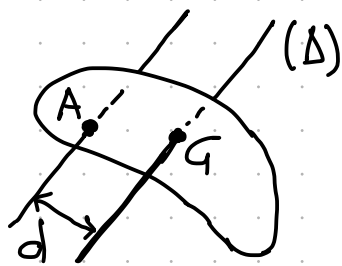
Si $f_0 > f$. Phénomène de "Stick-Slip"

$|\vec{R}_T|$ diminue quand les solides commencent à glisser, ce qui entraîne une instabilité car il faut imposer une force plus grande pour mettre les solides en mouvement que pour maintenir leur mouvement.

Ex : Ruptures de faille et tremblements de terre, mouvement d'archet sur un violon, ...

Compléments

I] Théorème de Huygens



$$I_{A/(\Delta)} = I_{G/(\Delta)} + Md^2$$

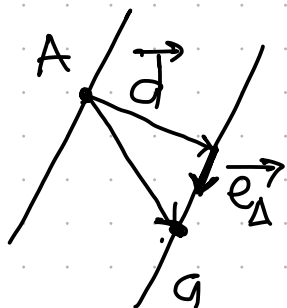
$$\text{avec } I_{A/(\Delta)} = \vec{e}_\Delta \cdot [\mathbf{J}_A] \cdot \vec{e}_\Delta$$

$$\begin{aligned} \text{Démonstration : } [\mathbf{J}_A] \cdot \vec{e}_\Delta &= \int d^3r \rho(M) \vec{AM} \wedge (\vec{e}_\Delta \wedge \vec{AM}) \\ &= \int d^3r \rho(M) (\vec{AG} + \vec{GM}) \wedge [\vec{e}_\Delta \wedge (\vec{AG} + \vec{GM})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_A] \cdot \vec{e}_\Delta &= \int d^3r \rho(M) \left[\vec{AG} \wedge (\vec{e}_\Delta \wedge \vec{AG}) + \vec{GM} \wedge (\vec{e}_\Delta \wedge \vec{GM}) \right. \\ &\quad \left. + \vec{AG} \wedge (\vec{e}_\Delta \wedge \vec{GM}) + \vec{GM} \wedge (\vec{e}_\Delta \wedge \vec{AG}) \right] \\ &\quad \underbrace{\text{ces 2 termes sont } \propto \int d^3r \rho(M) \vec{GM} = \vec{0}} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } [\mathbf{J}_A] \cdot \vec{e}_\Delta = M \underbrace{\vec{AG} \wedge (\vec{e}_\Delta \wedge \vec{AG})}_{AG^2 \vec{e}_\Delta - (\vec{AG} \cdot \vec{e}_\Delta) \cdot \vec{AG}} + [\mathbf{J}_G] \cdot \vec{e}_\Delta$$

$$\text{donc } I_{A/(\Delta)} = \vec{e}_\Delta \cdot [\mathbf{J}_A] \cdot \vec{e}_\Delta = I_{G/(\Delta)} + M \underbrace{\left(AG^2 - (\vec{AG} \cdot \vec{e}_\Delta)^2 \right)}_{= d^2}$$



$$\begin{aligned} \text{car } \vec{d} &= \vec{AG} - (\vec{AG} \cdot \vec{e}_\Delta) \vec{e}_\Delta \\ \text{et } d^2 &= AG^2 + (\vec{AG} \cdot \vec{e}_\Delta)^2 - 2 (\vec{AG} \cdot \vec{e}_\Delta)^2 \\ &= AG^2 - (\vec{AG} \cdot \vec{e}_\Delta)^2 \end{aligned}$$

II] Conservation de l'énergie mécanique

Variation de l'énergie cinétique $\frac{dK}{dt} = \mathcal{P}$ $\nwarrow$ Puissance des forces extérieures appliquées à $\mathcal{V}$

Démo

• Soit $\vec{F}_{\text{ext}}^{\text{TOT}}$, la force totale appliquée à $\mathcal{V}$.

On peut toujours écrire (avec des Diracs pour les forces discrètes)

$$\vec{F}_{\text{ext}}^{\text{TOT}} = \int d^3r \vec{f}(\mathbf{M}) \quad \text{densité volumique de force}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \mathcal{P} &= \int d^3r \vec{f}(\mathbf{M}) \cdot \vec{v}(\mathbf{M}) \quad \text{avec } \vec{v}(\mathbf{M}) = \vec{v}_G + \vec{\Omega} \wedge \vec{GM} \\ &= \vec{F}_{\text{ext}}^{\text{TOT}} \cdot \vec{v}_G + \int d^3r (\vec{\Omega} \wedge \vec{GM}) \cdot \vec{f}(\mathbf{M}) \\ &= \vec{F}_{\text{ext}}^{\text{TOT}} \cdot \vec{v}_G + \vec{\Omega} \cdot \underbrace{\int d^3r \vec{GM} \wedge \vec{f}(\mathbf{M})}_{= \vec{M}_{G/\text{Fext}}} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \mathcal{P} = \vec{F}_{\text{ext}}^{\text{TOT}} \cdot \vec{v}_G + \vec{M}_{G/\text{Fext}} \cdot \vec{\Omega}$$

• D'après le PFD,

$$\mathcal{P} = M \frac{d\vec{v}_G}{dt} \cdot \vec{v}_G + \frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \cdot \vec{\Omega}$$

$$\text{et } K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\sigma}^* \cdot \vec{\Omega}$$

Pour la translation, on a directement $\dot{K}_T = \mathcal{P}_T$

Pour la rotation,

$$\begin{aligned} K_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \int d^3r \rho(M) \vec{GM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{GM}) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(M) \left[GM^2 \Omega^2 - (\vec{GM} \cdot \vec{\Omega})^2 \right] \end{aligned}$$

Comme $GM = G\delta^3$ car $G \wedge M \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \dot{K}_{\text{rot}} &= \int d^3r \rho(M) \left[GM^2 \vec{\Omega} \cdot \frac{d\vec{\Omega}}{dt} - (\vec{GM} \cdot \vec{\Omega}) \left(\frac{d\vec{GM}}{dt} \cdot \vec{\Omega} + \vec{GM} \cdot \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right) \right] \\ &= \underbrace{(\vec{\Omega} \wedge \vec{GM}) \cdot \vec{\Omega}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int d^3r \rho(M) \left[GM^2 \vec{\Omega} - (\vec{GM} \cdot \vec{\Omega}) \vec{GM} \right] \cdot \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \\ &= \vec{\sigma}^* \cdot \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{or } \dot{K}_{\text{rot}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{\sigma}^* \cdot \vec{\Omega} \right) = \frac{1}{2} \frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \cdot \vec{\Omega} + \frac{1}{2} \vec{\sigma}^* \cdot \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$$

$$\text{donc } \vec{\sigma}^* \cdot \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \cdot \vec{\Omega}$$

$$\text{et } \dot{K}_{\text{rot}} = \mathcal{P}$$