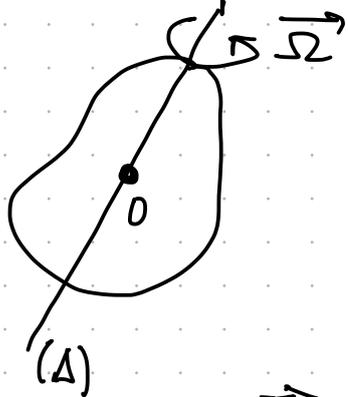


Chap III - Solides en rotation et Effet gyroscopique

• Conséquence du "Théorème" du moment cinétique

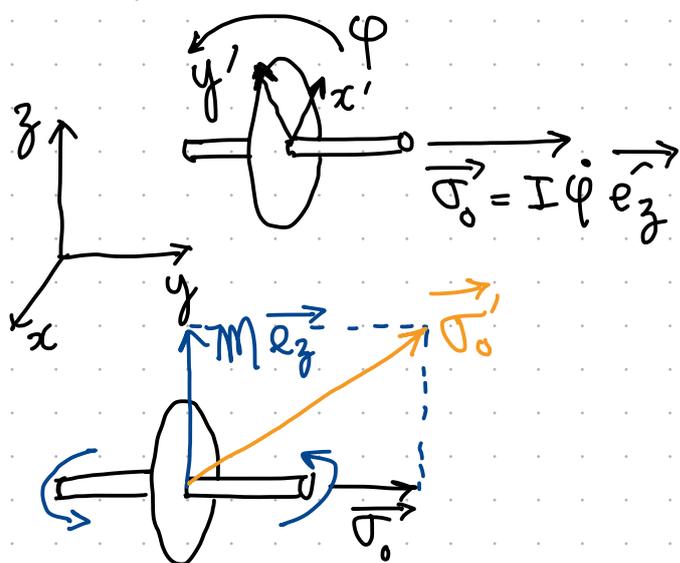


$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{M}_{O/F_{ext}}$$

⇒ En l'absence de moment appliqué, $\vec{\sigma}_O = Cste$
 Un solide en rotation conserve son moment cinétique

⇒ Pour changer $\vec{\sigma}_O$, il faut appliquer un moment à \mathcal{F} (et inversement, si $\vec{\sigma}_O$ change, un moment est appliqué à \mathcal{F} cf Calbuto et Œuf)

I] Illustrations



Une roue en rotation résiste à tout changement d'orientation

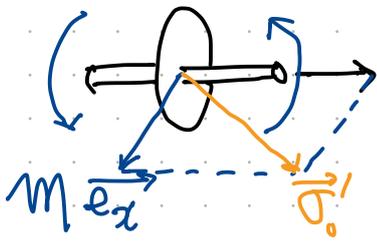
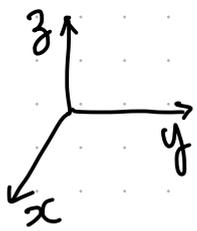
Pour tourner la roue horizontalement, on applique un moment $M\vec{e}_z$

Si M est appliqué pendant Δt ,

$$\vec{\sigma}(t + \Delta t) = \vec{\sigma}(t) + M \Delta t \vec{e}_z$$

⇒ La roue tourne autour de (Ox) et se penche
 l'axe de rotation tourne vers la direction du moment appliqué

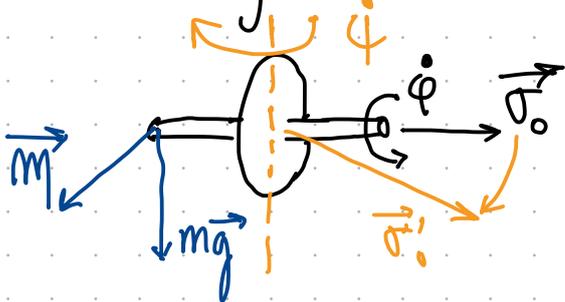
Ring sur Œuf et Calbuto:
 $\vec{\Omega}$ est constant mais $\vec{\sigma}_O$ varie à cause du basculement de l'œuf



Si on essaie de tourner la roue autour de (Ox) , elle tourne autour de (Oz)

Application au gyroscope à suspension qui, sans moment appliqué, conserve son axe de rotation (Application à la navigation, soit en se référant par la direction fixe, soit en mesurant le moment dû à un changement de direction).

- Si on rajoute une masse sur une poignée

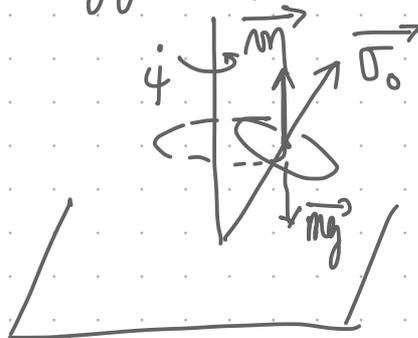


⇒ Mouvement de précession autour de (Oz)

Si $\dot{\varphi}$ faible, il y a rotation de l'axe autour de son axe moyen ⇒ Mouvement de nutation

- Même physique avec le gyroscope et la toupie (cf TD)

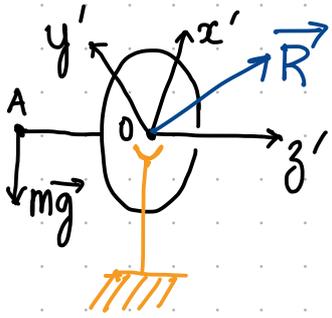
Le moment dû à la masse de la toupie le fait tourner autour de (Oz)



⇒ Mouvement de précession

II] Fréquence de précession

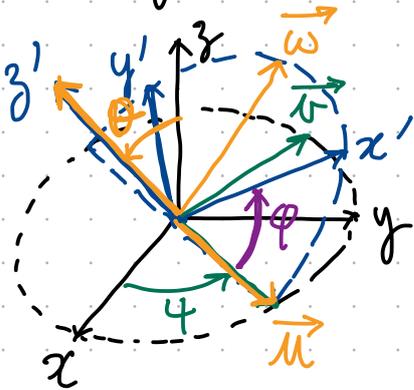
En TD, vous traitez la toupie. Ici on considère le gyroscope à suspension.



Le bâti est équivalent à une liaison rotule qui fixe la position de O mais laisse libre les rotations.

Torseur de la liaison $T_L = \begin{Bmatrix} [R_x, R_y, R_z] \\ [0, 0, 0] \end{Bmatrix}_O$

• Angles d'Euler (Rappel)



$$\vec{\Omega}(Y/Q) = \underbrace{\dot{\psi}}_{\text{Précession}} \vec{e}_z + \underbrace{\dot{\theta}}_{\text{Nutation}} \vec{u} + \underbrace{\dot{\varphi}}_{\text{Giration}} \vec{e}'_z$$

Comme la roue est symétrique, $\mathcal{R}_1 = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{e}'_z)$ est une base d'inertie et

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/Q) = \dot{\psi} \vec{e}'_z + \dot{\theta} \vec{u} \quad (\text{Pas de giration})$$

$$\text{et } \vec{e}'_z = \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \vec{w}$$

Donc dans \mathcal{R}_1 :

$$\vec{\Omega}(Y/Q) = \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\psi} \sin \theta \vec{w} + (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \vec{e}'_z$$

- On note $I_1 = I_2$, les moments d'inertie en O par rapport à \vec{u} et \vec{w} et I_3 selon \vec{e}_3
alors

$$\vec{\sigma}_0 = I_1 \ddot{\theta} \vec{u} + I_1 \dot{\psi} \sin \theta \vec{w} + I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \vec{e}_3$$

- D'après la formule de dérivation en référentiel mobile

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{\sigma}_0 = \vec{M}_0/mg \vec{e}_3$$

\vec{R} a un moment nul en O

Donc en exprimant les vecteurs dans \mathcal{R}_1 :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_1 \ddot{\theta} \\ I_1 \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \sin \theta) \\ I_3 \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} I_1 \dot{\theta} \\ I_1 \dot{\psi} \sin \theta \\ I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \sin \theta \\ -Mg \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Mgl \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Approximation gyroscopique : $\dot{\varphi} \gg \dot{\psi}$ et $\dot{\theta}$
- En négligeant les termes d'ordre > 1 en $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$, on a

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta} + I_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \theta = -Mgl \sin \theta & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \sin \theta) - I_3 \dot{\varphi} \dot{\theta} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_3 \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) = 0 & (3) \end{cases}$$

D'après (3) $\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \simeq \dot{\varphi} = \text{Cste}$

D'après (2) $I_1 \dot{\psi} \sin \theta - I_3 \dot{\varphi} \dot{\theta} \simeq -I_3 \dot{\varphi} \dot{\theta} = \text{Cste}$

donc $\dot{\theta} = \text{Cste}$

Et si $\dot{\theta} = \text{Cste}$, $\ddot{\theta} = 0$ et $I_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} = -Mgl$

• D'où

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \text{Cste} \\ \dot{\theta} = \text{Cste} \\ \dot{\psi} = -\frac{Mgl}{I_3 \dot{\varphi}} \end{cases}$$

Conservation du moment cinétique selon \vec{e}_z

Vitesse de précession (qui augmente quand $\dot{\varphi}$ diminue)

• Rmq 1 :
$$\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = -Mgl \sin\theta \vec{u} = -\frac{Mgl \sin\theta}{I_3 \dot{\varphi}} \vec{\omega} \wedge I_3 \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

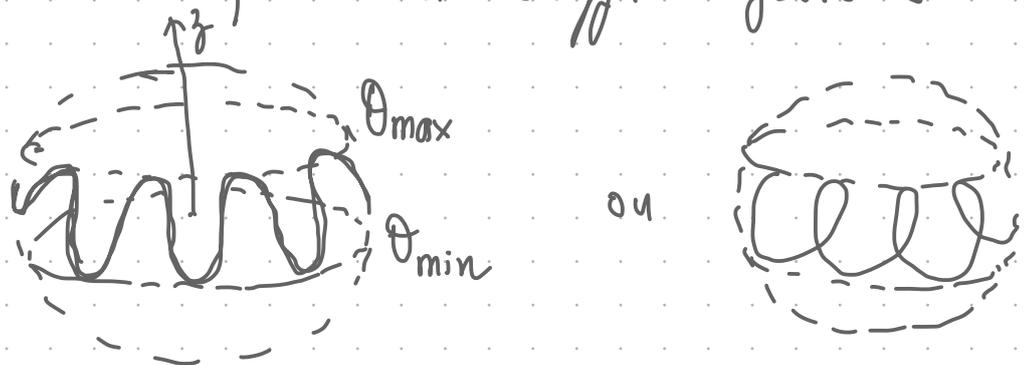
$$= \dot{\varphi} \sin\theta \vec{\omega} \wedge I_3 \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

or dans l'approx. gyroscopique, $\vec{\sigma}_0 \simeq I_3 \dot{\varphi} \vec{e}_z$
 et comme $\vec{e}_z = \cos\theta \vec{e}_z + \sin\theta \vec{\omega}$, on a

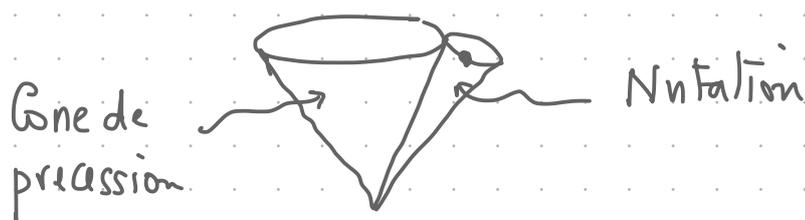
$$\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{\sigma}_0$$

La précession correspond à la rotation de $\vec{\sigma}_0$
 autour du vecteur $\vec{\omega}_p = \dot{\varphi} \vec{e}_z$ (comme dans
 la précession de Larmor du moment magnétique
 des électrons soumis à un champ magnétique, où
 $\frac{d\vec{L}}{dt} = -\gamma \vec{B} \wedge \vec{L}$ et γ la constante gyromagnétique)

• Rmq 2: sans l'approximation gyroscopique, il y a
 nutation : θ varie périodiquement entre
 2 valeurs et on peut avoir diff. trajectoires



Equivalent à un mouvement Cône sur Cône



III] Equations d'Euler

- Equations générales de rotation exprimées dans la base d'inertie \mathcal{Q}' de \mathcal{P}

$$\text{Dans } \mathcal{Q}', \quad \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad \left. \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \right|_{\mathcal{Q}} = \left. \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \right|_{\mathcal{Q}'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\sigma}_0 = \vec{M}_0 / F_{\text{ext}}$$

$$\text{d'où} \quad \begin{bmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = M_3 \end{cases}$$

(Il faut exprimer \vec{M} dans \mathcal{Q}' , ce qui peut être difficile)

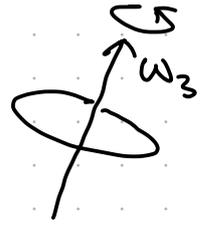
Couplage entre rotations pour les solides assymétriques

- Cas de la rotation libre ("Mouvement de Poinsot")

$$\vec{M} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{\sigma}_0 = \text{cste dans } \mathcal{Q}.$$

dans \mathcal{R}' :

- si \mathcal{Y} est une sphère, $\dot{\omega}_i = 0$ et $\vec{\Omega}$ constant dans \mathcal{R}'
- si \mathcal{Y} a un axe de révolution, $I_1 = I_2$ et $\omega_3 = \text{Cste}$



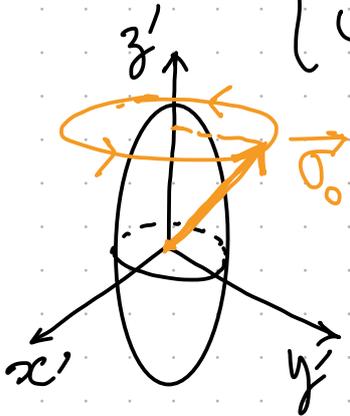
et si $\Delta I = I_3 - I_1$ et $I_1 = I_2 = I$

$$\begin{cases} I \dot{\omega}_1 + (\Delta I \omega_3) \omega_2 = 0 \\ I \dot{\omega}_2 - (\Delta I \omega_3) \omega_1 = 0 \end{cases}$$

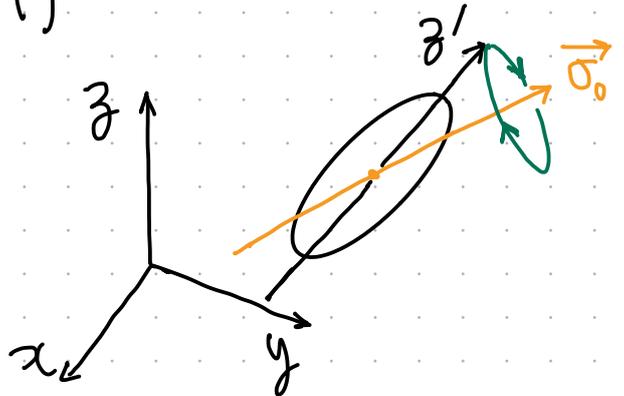
de solution générale

$$\begin{cases} \omega_1 = \bar{\omega} \cos(\lambda t + \varphi) \\ \omega_2 = \bar{\omega} \sin(\lambda t + \varphi) \end{cases}$$

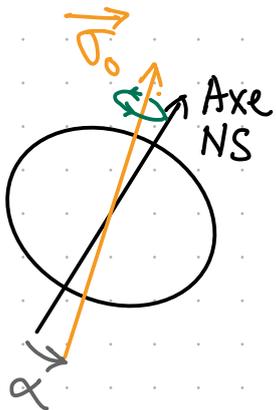
$$\lambda = \frac{\Delta I}{I} \omega_3$$



ou $\vec{\sigma}_0 = \text{Cste}$
dans \mathcal{R}



⇒ Mouvement de nutation de l'axe de symétrie autour de l'axe de rotation, par exemple quand on lance mal un ballon de foot américain.



Aussi la terre est un peu aplatie et l'axe Nord-Sud fait un axe $\alpha \approx 15''$ par rapport à l'axe de rotation ⇒ Nutation de période $T \sim 300$ jours qui se rajoute à la précession autour du soleil de période bcq plus longue ≈ 28500 ans, cf TD

Complément Chap III

Mouvement (de Lagrange) de la toupie au-delà de l'approximation gyroscopique

- Avec les notations du cours, dans le repère $\mathcal{Q}_1 \equiv (\vec{u}, \vec{w}, \vec{e}_z)$, on a

$$\vec{\sigma}_0 = I_1 \dot{\theta} \vec{u} + I_1 \dot{\varphi} \sin \theta \vec{w} + I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \vec{e}_z$$

et le vecteur rotation de $\mathcal{Q}_1 / \mathcal{Q}$ est

$$\vec{\Omega}(\mathcal{Q}_1 / \mathcal{Q}) = \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{w} + \dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_z$$

(pas de terme en $\dot{\varphi}$ car \mathcal{Q}_1 ne subit pas la rotation).

- le théorème du moment cinétique s'écrit

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \right|_{\mathcal{Q}} = \left. \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \right|_{\mathcal{Q}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{Q}_1 / \mathcal{Q}) \wedge \vec{\sigma}_0 = \vec{M}_{O/Mg}$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} I_1 \ddot{\theta} \\ I_1 \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} \sin \theta) \\ I_3 \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\varphi} \cos \theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} I_1 \dot{\theta} \\ I_1 \dot{\varphi} \sin \theta \\ I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Mg a \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- L'équation selon \vec{e}_z impose
$$L'_z = I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{cte}$$
 (conservation moment cinétique selon Oz)

- Selon \vec{w} , on a

$$I_1 \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} \sin \theta) + I_1 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta - L'_z \dot{\theta} = 0$$

qui s'intègre (en multipliant par $\sin \theta$):

$$I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + L'_z \cos \theta = L_z = \text{cte}$$

(conservation moment cinétique selon Oz)

- On a une 3^{ème} intégrale première par la conservation de l'énergie mécanique

$$E = Mg a \cos \theta + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2$$

- le système est dit intégrable car on a autant d'intégrales premières que de variables.

• On peut éliminer $\dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$ en écrivant

$$\dot{\varphi} = \frac{L_3 - L'_3 \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta} \quad \text{et} \quad \dot{\psi} = \frac{L'_3}{I_3} - \dot{\varphi} \cos\theta$$

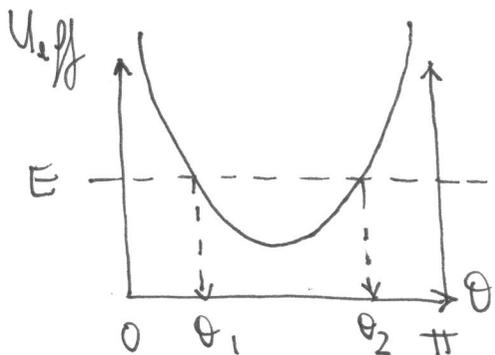
et

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{(L_3 - L'_3 \cos\theta)^2}{I_1 \sin^2\theta} + \frac{1}{2} \frac{L_3'^2}{I_3} + Mg a \cos\theta$$

$U_{\text{eff}}(\theta)$

θ varie comme une particule à 1D soumise au potentiel effectif $U_{\text{eff}}(\theta)$

Il y a plusieurs cas à regarder selon les valeurs de L_3 , L'_3 et I_1 . Pour une toupie, on a typiquement



θ oscille entre 2 valeurs θ_1, θ_2

Et selon les conditions, $\dot{\varphi}$ peut changer de signe ou pas

Si $\dot{\varphi}$ de signe constant :



Si $\dot{\varphi}$ change de signe

