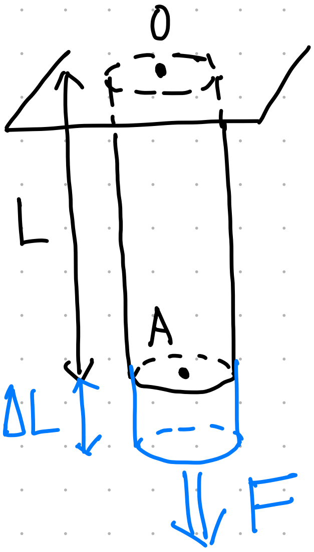
PARTIE II - Solides élastiques

- Dans cette partie, on reconnait que lorsqu'on applique une force extérieure, un solide se déforme
- On se limite au régime élastique où les déformations sont faibles et réversibles.
- Plan
  1) On introduit la cinématique (Contraintes et déformations) et la loi constitutive (loi de Hooke) sur des cas simples
  2) Cas particulier de la flexion
  3) Théorie générale
  4) Cas particulier de la propagation d'ondes dans un milieu élastiques.

Chap IV – Déformations élastiques simples

I] Contraintes et Déformations

1) Loi de Hooke et Module d'Young



Test mécanique de référence :
l'Essai de traction simple

Un barreau de longueur L, encastré à une extrémité, est soumis à l'autre extrémité à une force extérieure F

$\Rightarrow$ Le barreau s'allonge de ΔL

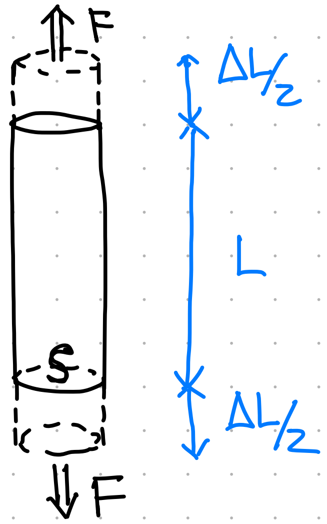
(il se contracte aussi latéralement, cf après).

- Le torseur des forces ext. est $T_{ext} = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ 0 \end{Bmatrix}_A$

Celui de l'encastrement est $T_L = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{Bmatrix}_O$

A l'équilibre, $T_L + T_{ext} = 0$ d'où $\vec{R} = -\vec{F}$

- L'essai est donc équivalent à



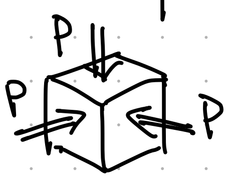
- Effet de taille : pour un barreau de longueur $2L$, l'allongement est $2\Delta L$
la grandeur pertinente est l'allongement relatif, appelé <u>déformation</u> :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}}$$ sans unité

- De même, F n'est pas la grandeur pertinente, c'est la <u>contrainte</u>

$$\boxed{\sigma = \frac{F}{S}}$$ [unité $Pa = \frac{N}{m^2}$]

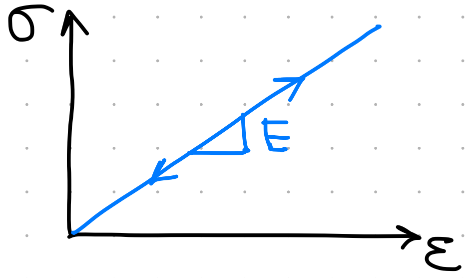
- Rmq : la pression est le cas particulier d'une contrainte égale et normale à toutes les faces



- <u>Loi de Hooke</u> $$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon}$$
E : Module d'Young [Pa]

Loi de comportement élastique linéaire

Courbe de traction



Déformation réversible.

La loi est due à Robert Hooke (1675) en analogie avec la loi des ressorts "ut tensio, sic vis".

↑ E (Pa)

- Acier ~ 100 GPa = 10^{11} Pa
- Caoutchouc ~ 1 à 100 MPa = 10^{8} Pa
- Gélatine ~ 10 à 100 Pa = 10^{2} Pa

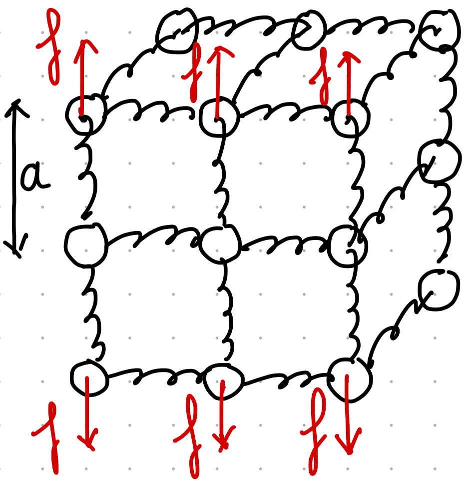
ENORME variation de E parmi les matériaux

- Ordre de grandeur : je me pends à un fil d'acier de rayon 1 mm. Quel est l'allongement ?

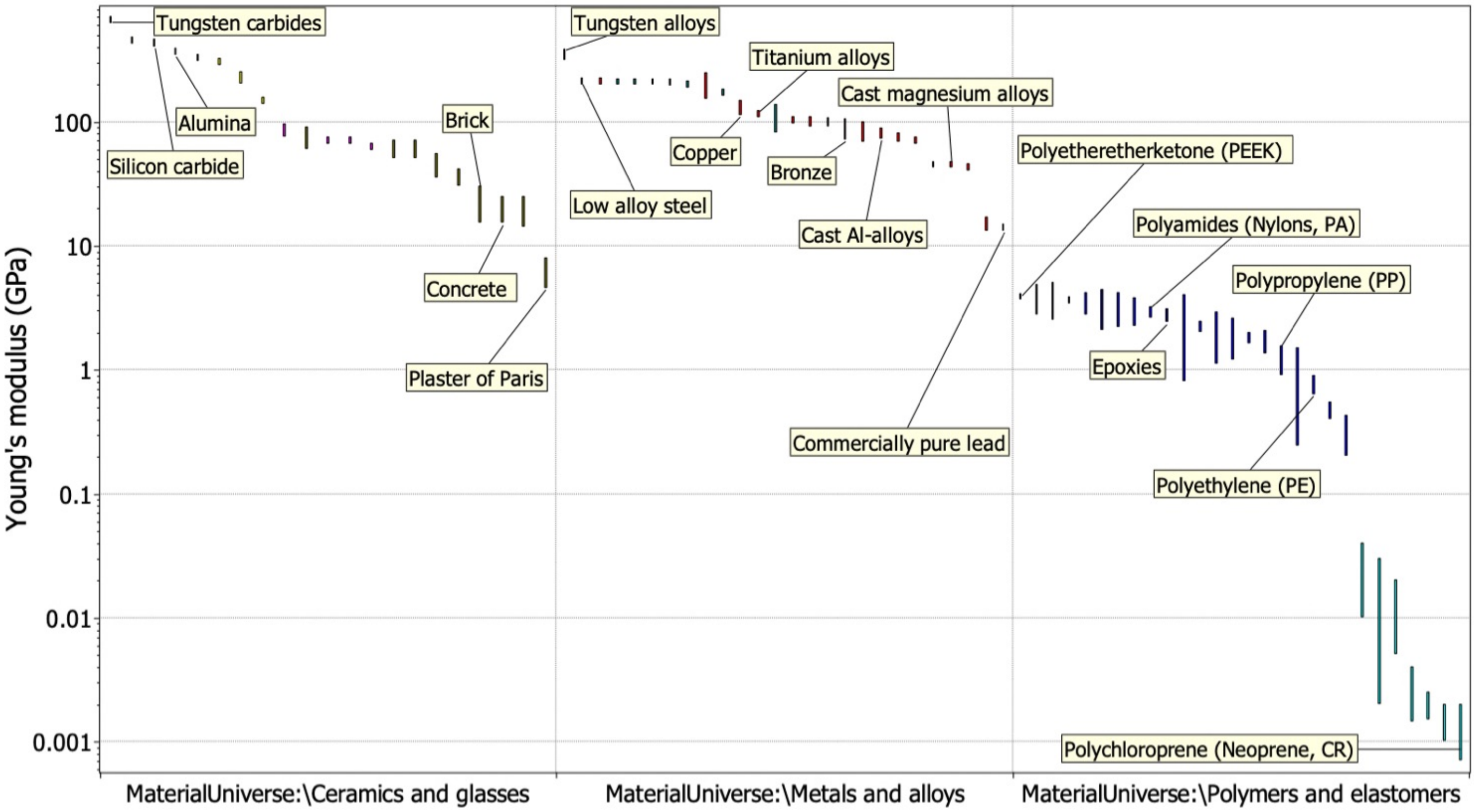
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{Mg}{SE} = \frac{80 \cdot 10}{\pi\, 10^{-6} \cdot 10^{11}} \sim 2\, 10^{-3} = 0{,}2\,\%$$

mais pour le caoutchouc $\varepsilon \sim 2 = 200\,\%$

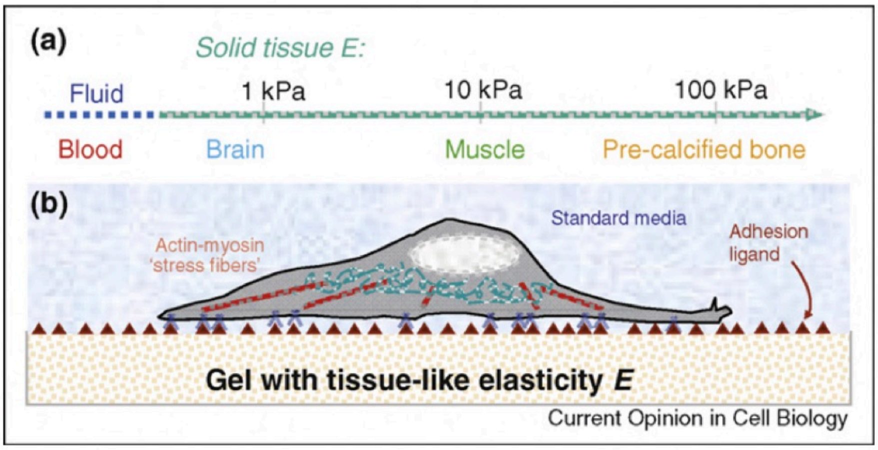
2) Origine atomique

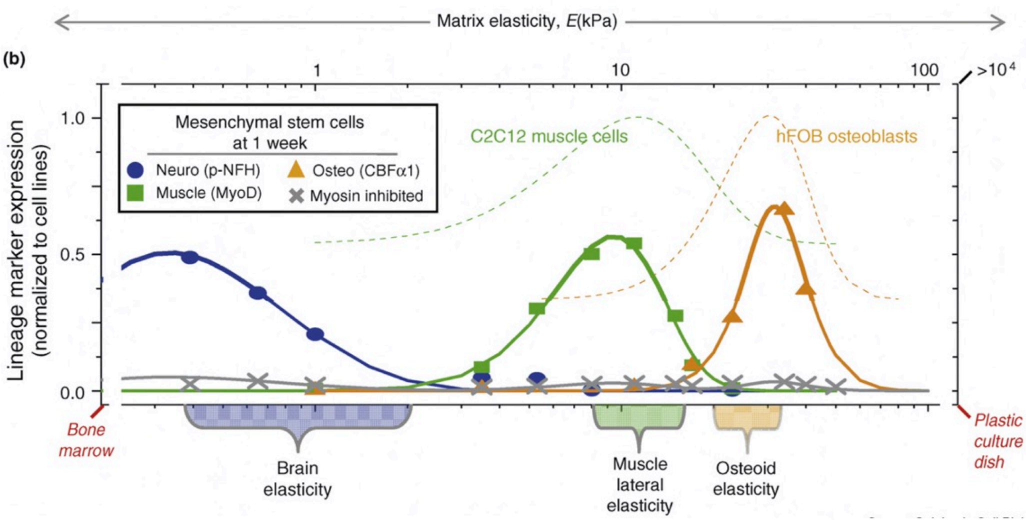


On assimile un cristal à un réseau cubique simple, soumis à une force f par atome de surface

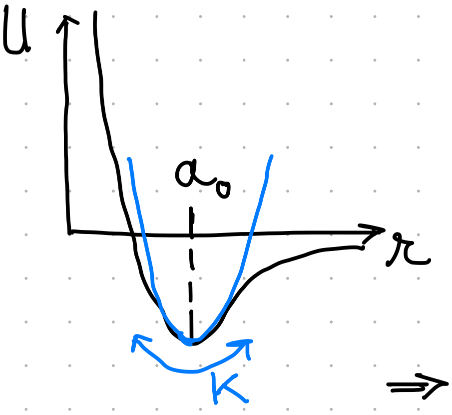


10 à 1000 GPa | 10 à 1000 GPa | 10^{-3} à 10 GPa





Zajac, A. L., & Discher, D. E. (2008). Cell differentiation through tissue elasticity-coupled, myosin-driven remodeling. *Current opinion in cell biology*, *20*(6), 609-615.



Pour des petites déformations, on peut faire une approximation quadratique

$$U = U_0 + \frac{1}{2}K(a-a_0)^2$$

$\Rightarrow$ On assimile les interactions entre atomes à des ressorts de raideur K

A l'équilibre, $f = K(a-a_0)$

Que vaut ε ? $\varepsilon = \dfrac{a-a_0}{a_0}$ Allongement relatif

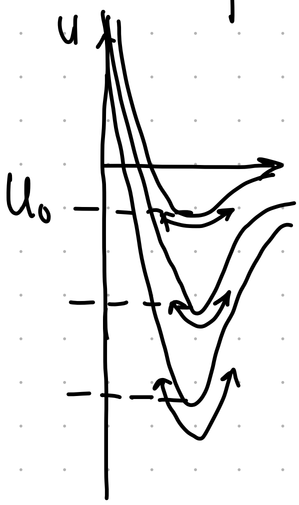
Que vaut σ ? $\sigma = f/a_0^2$ Force par unité d'aire

d'où $$\sigma = \frac{f}{a_0^2} = \frac{K}{a_0}\,\frac{a-a_0}{a_0} = \frac{K}{a_0}\,\varepsilon$$

et $$\boxed{E = \frac{K}{a_0}}$$

E est contrôlé par la raideur des interactions atomiques

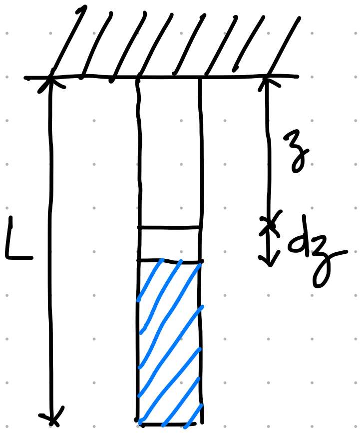
- Pour la plupart des matériaux $a_0 \sim 2$ à 3 Å



Plus l'énergie de cohésion est grande, plus E est grand

$\Rightarrow$ E(céramique) > E(métaux) > E(polymères)

3) Exemple : Déformation sous poids propre



- Un cable (par ex. un ascenseur) pend sous l'effet de son poids (densité ρ)

- Un élément dz à la hauteur z est soumis au poids du cable sous lui

$$\sigma(z) = \frac{\rho\,(L-z)\,\cancel{S}\,g}{\cancel{S}} \quad \text{et} \quad \varepsilon(z) = \frac{\rho g}{E}(L-z) \equiv \frac{\Delta(dz)}{dz}$$

d'où un allongement total :

$$\Delta L = \underbrace{\int_0^L \varepsilon(z)\,dz}_{\text{Allongement de l'élément } dz} = \frac{\rho g}{E}\int_0^L (L-z)\,dz = \frac{\rho g}{E}\,\frac{L^2}{2}$$

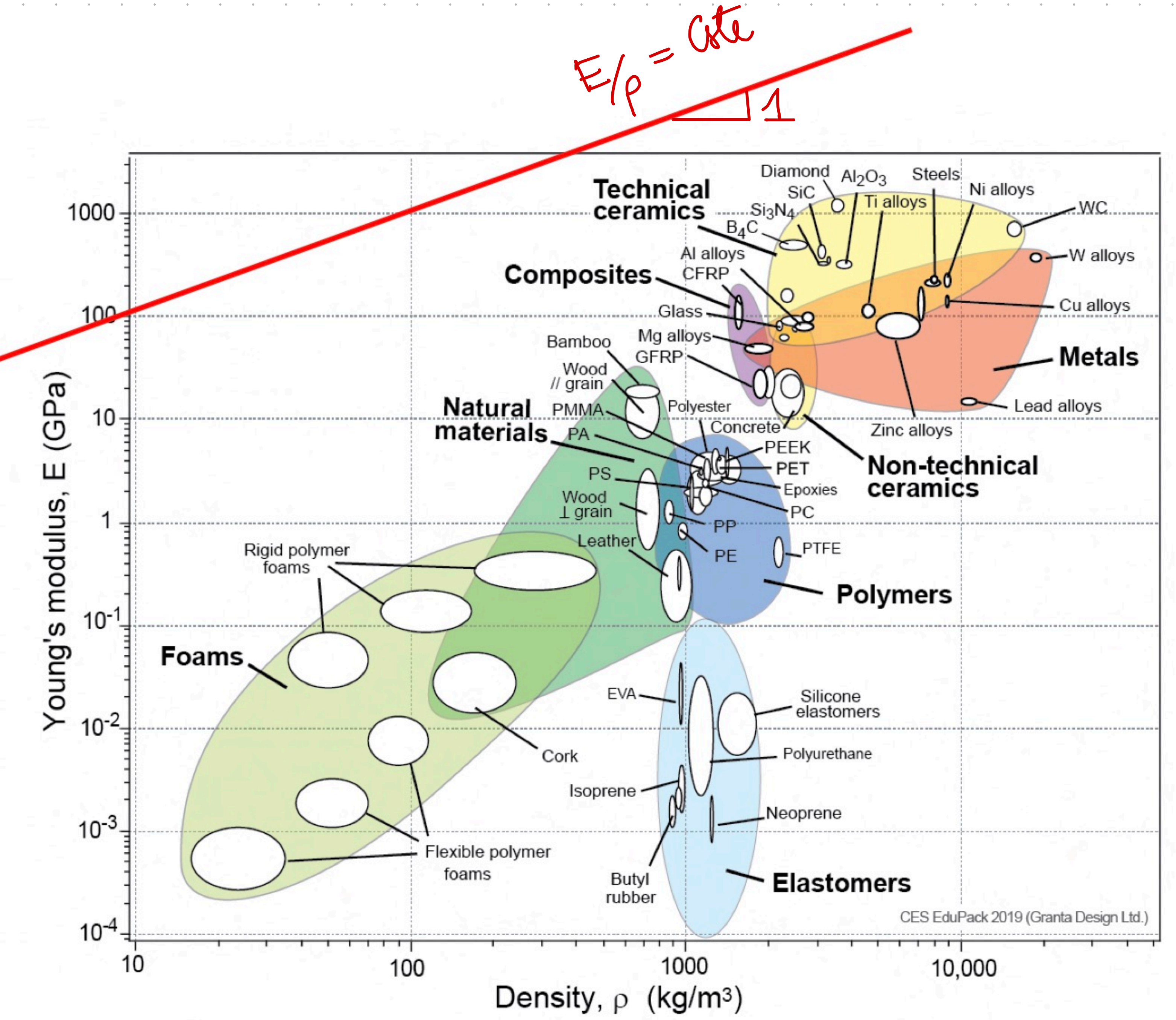
Rmq : ΔL ne dépend pas de S, donc un fil mince ou un cable épais s'allonge d'autant.

- Pour un ascenseur dans un puits de mine, $L \sim 1$ km, $\rho_{acier} = 10$ tonnes/m^3, d'où

$$\Delta L = \frac{10^4 \cdot 10}{10^{11}} \cdot \frac{10^6}{2} = 50 \text{ cm}.$$

- Si on veut minimiser ΔL, on veut le matériau pour lequel $\frac{E}{\rho}$ est maximum

Exemple de carte d'Ashby



• Rmq : Pour les petites déformations, on peut calculer les déformations et contraintes par rapport à la structure non-déformée

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{F}{S_0}$$

L_0, S_0 dimensions avant déformation

Pour les grandes déformations

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad : \text{ contrainte vraie}$$

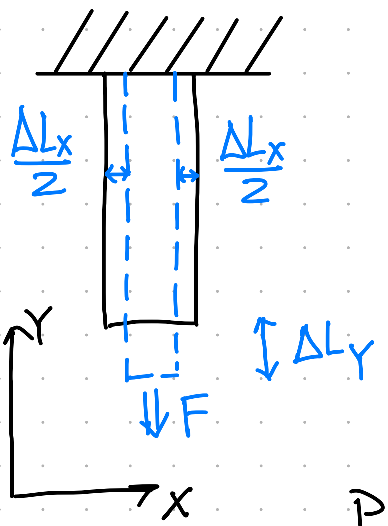
(S surface après déformation)

$$\varepsilon = \int_{L_0}^{L} \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

, déformation vraie

II] Autres modules élastiques

1) Coefficient de Poisson



Tout solide est au moins partiellement incompressible. S'il s'allonge dans une direction, il a tendance à se contracter dans les autres directions

Pour une traction simple :

$$\frac{\Delta L_X}{L_X} = \frac{\Delta L_Z}{L_Z} = -\nu \frac{\Delta L_Y}{L_Y}$$

ν : Coefficient de Poisson [sans dimension]

• ν traduit l'incompressibilité du solide

et $$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L_x}{L_x} + \frac{\Delta L_y}{L_y} + \frac{\Delta L_z}{L_z} = (1-2\nu)\frac{\Delta L_y}{L_y}$$

et $$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E} \cdot \sigma$$

• On montre que pour un matériau isotrope

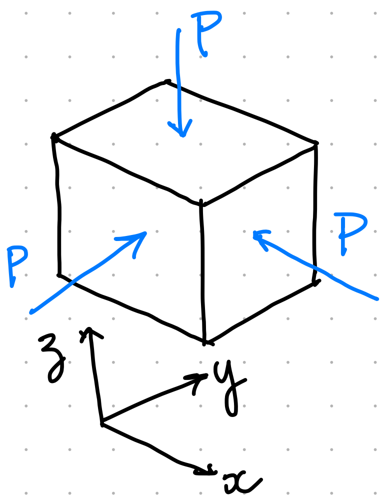
$$\boxed{-1 \leq \nu \leq 1/2}$$

Pour la majorité des matériaux, $\nu \simeq 0.3$

mais :

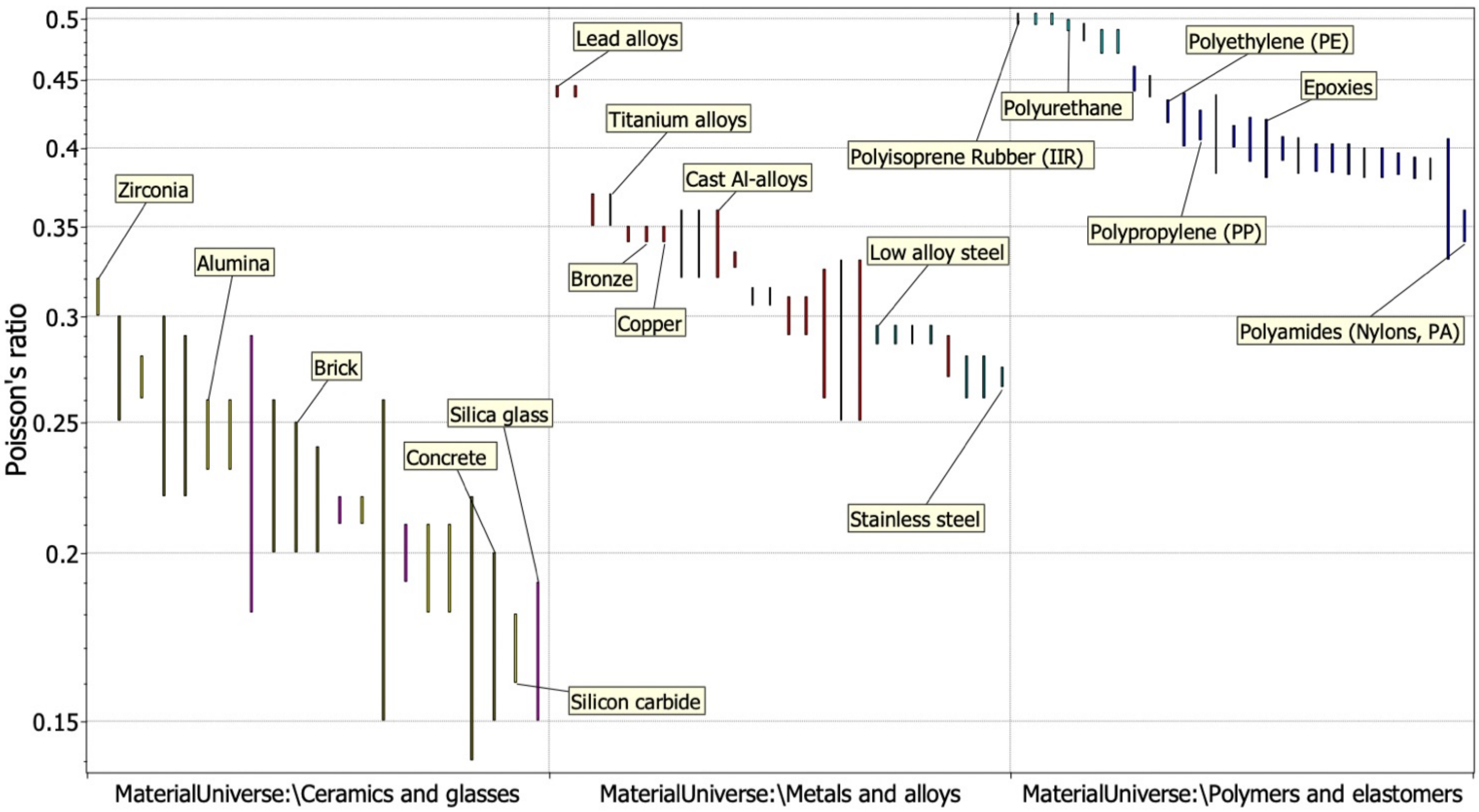
- Caoutchouc $\nu \sim 0.4$ à 0.5 presque incompressible
- Liège $\nu \sim 0$ (Bouchon)
- Matériaux auxétiques $\nu < 0$ avec la propriété étonnante de gonfler quand étirés.

2) Module de compressibilité



On considère un cube soumis à une pression P

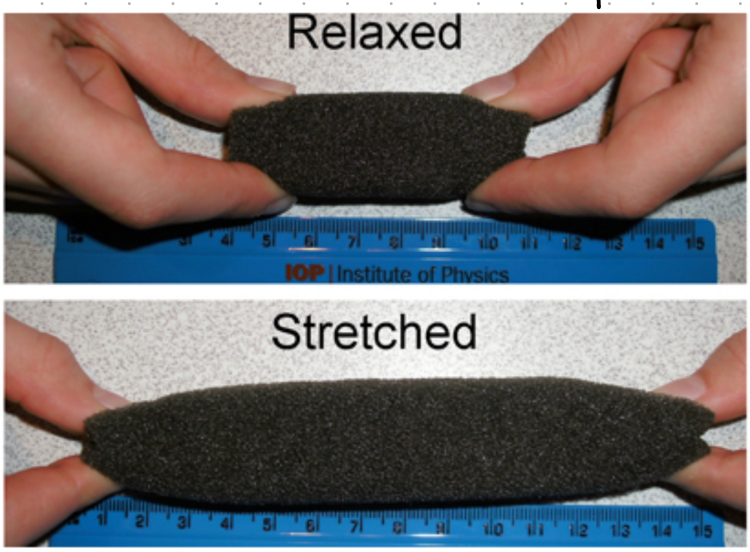
⚠ aux conventions : $\sigma > 0$ pour une traction, mais pour une pression, $P > 0$ est une compression.

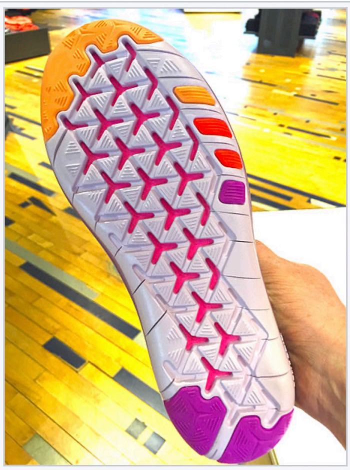


0.15 à 0.3 | 0.25 à 0.35 | 0.35 à 0.5

material	v
diamond	0.21
Al	0.33
Cu	0.35
Pb	0.4
Steel	0.29
rubber	close to 0.5
cork	close to 0

Exemple d'une mousse auxétique





In footwear, auxetic design allows the sole to expand in size while walking or running, thereby increasing flexibility.

- En élasticité linéaire, les déformations s'additionnent et

$$\frac{\Delta L_x}{L_x} = \underbrace{-\frac{P}{E}}_{\text{Compression selon } X} + \underbrace{2\nu\frac{P}{E}}_{\text{Effet de Poisson à cause des compression selon } Y \text{ et } Z}$$

d'où $$\frac{\Delta L_x}{L_x} = \frac{\Delta L_y}{L_y} = \frac{\Delta L_z}{L_z} = -(1-2\nu)\frac{P}{E}$$

et $$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = -3\underbrace{\frac{1-2\nu}{E}}_{\substack{\text{Coefficient de compressibilité} \\ \text{isotherme } \chi_T = -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T}} \cdot P}$$

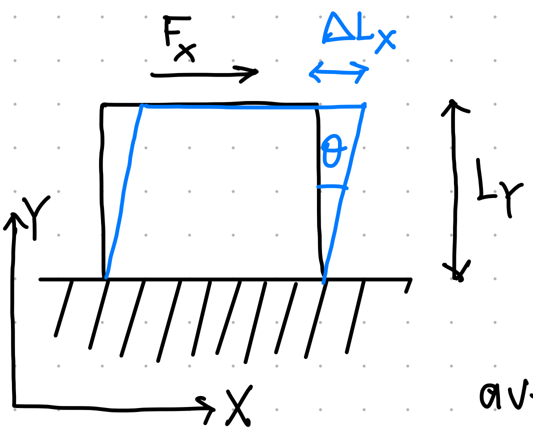
Rmq: un solide est stable mécaniquement si

$$\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} = -\frac{\partial P}{\partial V} > 0 \Rightarrow \chi_T > 0 \Rightarrow \nu < \frac{1}{2}$$

- En mécanique, on écrit

$$\boxed{P = -B\frac{\Delta V}{V} \qquad B = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{Module de Compressibilité}}$$

3) Module de cisaillement



Force parallèle à la face du cube

$\Rightarrow$ Cisaillement

avec $\sigma = \dfrac{F_x}{L_x L_z}$ et $\gamma = \dfrac{\Delta L_x}{L_Y}$

$= \tan\theta \sim \theta$

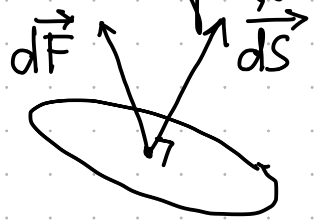
Pour un cisaillement, on note γ plutôt que ε

et $\boxed{\sigma = G \cdot \gamma}$

G ↳ Module de cisaillement [Pa]

- Rmq : Pour un cisaillement $\Delta V = 0$

- De façon générale, si on applique une force $\vec{dF}$ à une surface $\vec{dS}$, on définit le tenseur des contraintes $[\sigma]$ /



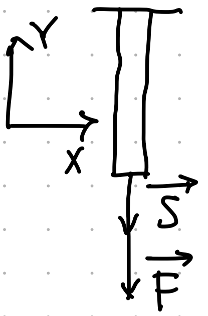
$$\vec{dF} = [\sigma] \cdot \vec{dS} \quad \text{et} \quad \sigma_{ij} = \frac{dF_i}{dS_j}$$

$[\sigma]$ ↳ Matrice 3x3

Rmq : il faudrait montrer que $\vec{dF}$ est une fonction linéaire de $\vec{dS}$, voir Chap. 6

On retrouve

Traction simple

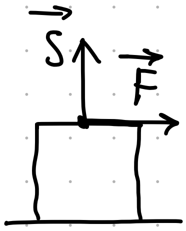


$\vec{F} = -F_Y \vec{e_Y}$

$\vec{S} = -S_Y \vec{e_Y}$

$$\sigma_{YY} = \frac{F_Y}{S_Y}$$

Cisaillement

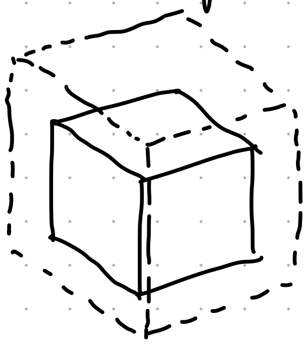


$\vec{F} = F_X \vec{e_X}$

$\vec{S} = S_Y \vec{e_Y}$

$$\sigma_{XY} = \frac{F_X}{S_Y}$$

4) Déformations thermiques



La dilatation thermique induit une déformation isotrope

$$\varepsilon_{th} = \alpha \cdot \Delta T$$

↳ Coefficient de dilatation thermique

Sans contact ou liaison, la dilatation n'induit pas de contrainte, mais par exemple pour un bilame