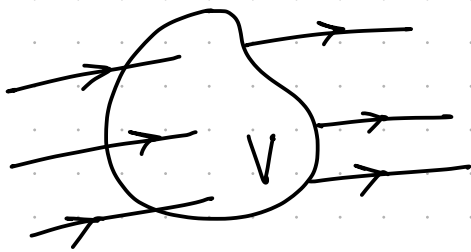


Chap IX - Equation de Navier-Stokes

- Equation de la dynamique d'un fluide Newtonien incompressible, obtenue en appliquant le PFD à une particule de fluide

I] L'équation

1) Le PFD



On considère un volume arbitraire de fluide V à l'instant t

En suivant les particules de V entre t et $t + \delta t$, V et ρ peuvent varier mais pas la masse $M = \int_V \rho dV$

On a donc
$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0$$

D'après le PFD appliqué à ces particules :

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \vec{F}_{\text{TOT}}$$

Dérivée particulière pour suivre les particules et avoir un système fermé

D'après le cours d'élasticité

$$\vec{F}_{\text{TOT}} = \int_V (\text{div}[\sigma] + \rho \vec{g}) dV$$

$$\text{et } \frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{x} dV = \int_V \rho \frac{D\vec{x}}{Dt} dV + \int_V \vec{x} \frac{D}{Dt} \rho dV \rightarrow 0$$

$$\text{d'où } \int_V \rho \frac{D\vec{x}}{Dt} dV = \int_V [\text{div}[\sigma] + \rho \vec{g}] dV$$

et comme V est arbitraire

$$\rho \frac{D\vec{x}}{Dt} = \text{div}[\sigma] + \rho \vec{g}$$

On a donc la même équation qu'en élasticité
mais avec une dérivée particulière issue de la
description Eulerienne

2) Fluides Newtoniens incompressibles

On a $[\sigma] = -P[1] + 2\eta[e]$

et en calculant $\text{div}[\sigma]$ comme en élasticité,

on a $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_j}\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

$$\text{et } \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \Delta v_i + \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \text{div} \vec{v}$$

$$\text{div}[\sigma] = -\text{grad } P + \eta \Delta \vec{v} + \eta \text{grad } \text{div} \vec{v}$$

car fluide incomp.
et $\text{div} \vec{v} = 0$

Au final:

$$\rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } P + \eta \Delta \vec{v} + \rho_0 \vec{g}$$

avec $\text{div} \vec{v} = 0$ et $\rho = \text{cte} = \rho_0$

Equation de Navier-Stokes (1845)

- Rmq: 1) on a 4 inconnues $(\vec{v}, P)$ et 4 équations (Navier-Stokes + $\text{div} \vec{v} = 0$). Il n'y a pas de loi constitutive pour P car $\rho = \text{cte}$.
 P agit comme un multiplicateur de Lagrange et s'adapte pour vérifier $\text{div} \vec{v} = 0$

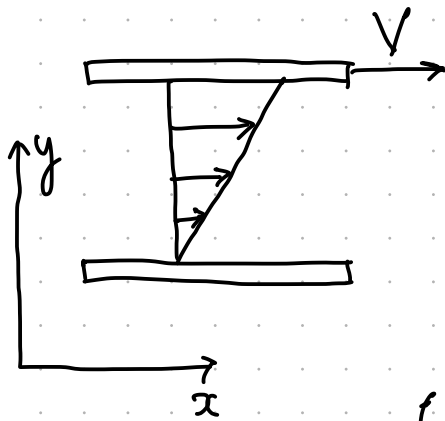
2) Pour un fluide compressible, on a

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right) \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{v} + \rho \vec{g}$$

On a alors 3 équations pour 5 inconnues $(\vec{v}, P, \rho)$, voire 6 si on tient compte de la température. On doit donc compléter par une équation d'état $P(\rho, T)$ (par ex. équation des gaz parfaits ou équation de Van der Waals), par l'équation de continuité $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0\right)$ et par une équation de diffusion de la chaleur $\left(\frac{DT}{Dt} = D \Delta T + \text{source}, D \text{ coefficient de diffusion}\right)$.

- L'équation de NS permet de modéliser des fluides allant des gaz aux solides en écoulement, en passant par les liquides. Sa résolution est rendue difficile par le terme non-linéaire d'entraînement $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$, qui permet de reproduire la transition entre régime laminaire à basse vitesse vers le régime turbulent à grande vitesse.

- Cas de l'écoulement Couette plan



Écoulement infini en x , permanent et incompressible

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(pas de dépendance en x car $\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$)

$$\text{et } (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pas d'effet d'entraînement car l'écoulement est uniforme en direction x

$$\text{et } \Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial^2 v_x / \partial y^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

NS en régime permanent s'écrit avec $P(y)$

$$-\text{grad } P + \eta \Delta \vec{v} = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\partial P / \partial y \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} \partial^2 v_x / \partial y^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$

P est constant dans l'épaisseur

et $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$ d'où $v_x = Ay + B = V \frac{y}{h}$
par les conditions aux limites

II] Nombre de Reynolds

- On peut écrire NS :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\rho_0 (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}}_{\text{Deux façons de transporter la vitesse}} - \underbrace{\eta \Delta \vec{v}}_{\text{Diffusion}} = - \text{grad } P + \rho_0 \vec{g}$$

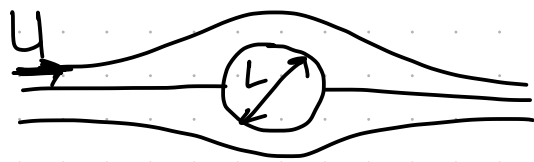
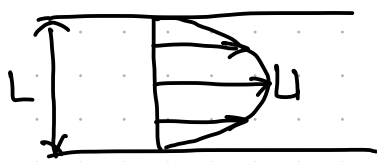
Convection

Diffusion par la viscosité qui tend à homogénéiser les vitesses

On a une équation du type $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta \Delta \vec{v}$, équation de diffusion avec $\nu = \eta / \rho_0$, viscosité dynamique analogue au coeff. de diffusion

- le nombre de Reynolds (sans dimension) compare ces 2 termes :

$$Re = \left| \frac{\text{transport convectif}}{\text{transport diffusif}} \right| = \left| \frac{\text{inertie}}{\text{viscosité}} \right| = \frac{\rho_0 |(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}|}{\eta |\Delta \vec{v}|}$$



Si U est la vitesse caract. de l'écoulement et L la distance sur laquelle $\vec{v}$ varie (taille d'obstacle, de canal, ...),

$$Re \sim \frac{\rho_0 U^2 / L}{\nu U / L^2}$$

$$Re = \frac{\rho_0 U L}{\eta} = \frac{U L}{\nu}$$

• Exemple : un nageur loin des bords

$$Re = \frac{10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 1 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ m}}{10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}} = 10^6$$

mais pour une bactérie $Re = \frac{10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6}}{10^{-3}} = 10^{-6}$

• lorsque $Re \gg 1$, l'inertie domine et on peut négliger la viscosité. On a alors l'équation d'Euler (1757):

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = - \overrightarrow{\text{grad}} P + \rho_0 \vec{g}$$

On parle alors de fluide parfait (incompressible et sans viscosité)

• lorsque $Re \ll 1$, la viscosité domine et on a l'équation de Stokes (1845):

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v} + \rho_0 \vec{g} \quad \text{Linéaire!}$$

- Avec $P^* = P + \rho_0 g z$ et

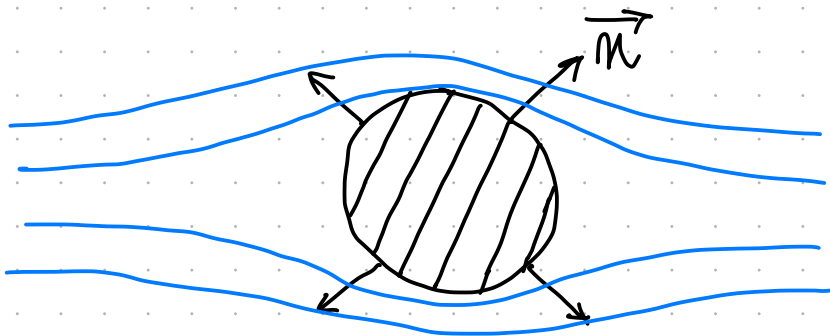
$$\vec{r}' = \frac{\vec{r}}{L}, \quad \vec{r}' = \frac{\vec{r}}{L}, \quad t' = \frac{t}{L/u}, \quad P' = \frac{P^*}{\rho u^2}$$

on peut ré-écrire NS sous forme adimensionnelle:

$$\frac{\partial \vec{r}'}{\partial t'} + (\vec{r}' \cdot \overrightarrow{\text{grad}'}) \vec{r}' = - \overrightarrow{\text{grad}'} P' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{r}'$$

ce qui permet d'étudier un écoulement sur un modèle réduit (par ex. en soufflerie) en gardant $\text{Re} = \text{cte}$ (donc si $L \downarrow, u \uparrow$)

III] Conditions aux limites



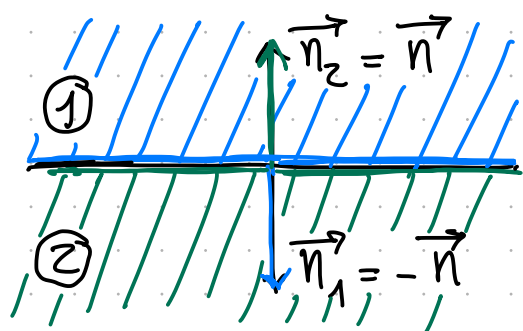
- Pour un fluide parfait, i.e. sans frottement, la seule condition est la non-pénétrabilité

$$\vec{v}_{\text{solide}} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{\text{fluide}} \cdot \vec{n}$$

- Mais, si le fluide est visqueux, les frottements à l'interface entraînent le fluide et

$$\vec{v}_{\text{solide}} = \vec{v}_{\text{fluide}} \quad \text{à la surface du solide.}$$

- Pour une interface entre 2 liquides, on a continuité des vitesses (normales pour les fluides parfaits, totale si visqueux) et des forces



- Force par unité d'aire de ① → ② :

$$\frac{d\vec{F}_{① \rightarrow ②}}{ds} = [\sigma_{②}] \cdot \vec{n}_2 = [\sigma_{②}] \cdot \vec{n}$$

- Force ② → ① :

$$\frac{d\vec{F}_{② \rightarrow ①}}{ds} = [\sigma_{①}] \cdot \vec{n}_1 = -[\sigma_{①}] \cdot \vec{n}$$

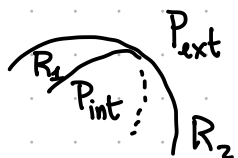
⚠ $[\sigma_{②}]$ est par définition le tenseur des forces appliqué à ② et la force sur ② est $[\sigma_{②}] \cdot \vec{n}_2$ avec $\vec{n}_2$, normale sortante à ②

- Pour les fluides parfaits, il peut y avoir glissement et seule la force normale est continue :

$$([\sigma_{①}] \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} = ([\sigma_{②}] \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

et $[\sigma_{①}] = -P_1 [1]$, $[\sigma_{②}] = -P_2 [1]$ d'où $P_1 = P_2$

⚠ si la surface est courbée, il faut tenir compte de sa tension de surface γ , ce qui donne la loi de Laplace :



$$P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Si fluide visqueux : $[\sigma_{①}] \cdot \vec{n} = [\sigma_{②}] \cdot \vec{n}$

Annexe

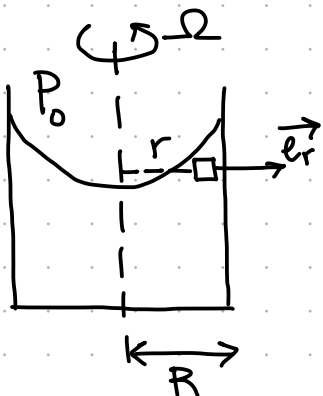
Equation de Navier-Stokes en référentiel non-Galiléen

Dans un référentiel non-Galiléen $\mathcal{R}$ (en mouvement par rapport à un référentiel Galiléen $\mathcal{R}_G$), on doit rajouter 2 "pseudo-forces"

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \text{div}[\sigma] + \rho \vec{g} - \underbrace{\rho \vec{a}_e(\mathcal{R}/\mathcal{R}_G)}_{\text{Accélération d'entraînement}} - \underbrace{2\rho \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_G) \wedge \vec{v}}_{\text{Force de Coriolis}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_e(\mathcal{R}/\mathcal{R}_G) \text{ est l'accélération de } \mathcal{R}/\mathcal{R}_G \\ \text{au point } \vec{r} \text{ à l'instant } t \\ \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_G) \text{ est la vitesse de rotation de } \mathcal{R}/\mathcal{R}_G \end{array} \right.$$

Exemple : Surface d'un fluide en rotation



Un verre cylindrique contenant un liquide incompressible et tournant à la vitesse Ω

- On considère une particule de fluide. Dans le repère $\mathcal{R}$ tournant la vitesse $\vec{\Omega}$, la particule est immobile et $\vec{r} = \vec{0}$

Donc :

$$\cancel{\rho \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + (\vec{r} \cdot \text{grad}) \vec{r} \right)} = \cancel{-\text{grad } P} + \cancel{\rho \Delta \vec{r}} + \rho \vec{g} - \rho \vec{a}_e - \cancel{2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{r}}$$

$$\text{et } \vec{a}_e = -r \Omega^2 \vec{e}_r$$

$$\text{d'où } \text{grad } P = \rho \vec{g} + r \Omega^2 \vec{e}_r$$

et $P(r, z)$ donc en coordonnées cylindriques :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial r} \\ 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} \Omega^2 r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a donc } \frac{\partial P}{\partial r} = \rho \Omega^2 r \text{ et } \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

$$\text{d'où } P = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 - \rho g z + \text{Cste}$$

et à la surface libre $P = P_0$

$$\text{d'où } \underline{z = z_0 + \frac{\Omega^2}{2g} r^2} : \text{Surface parabolique}$$