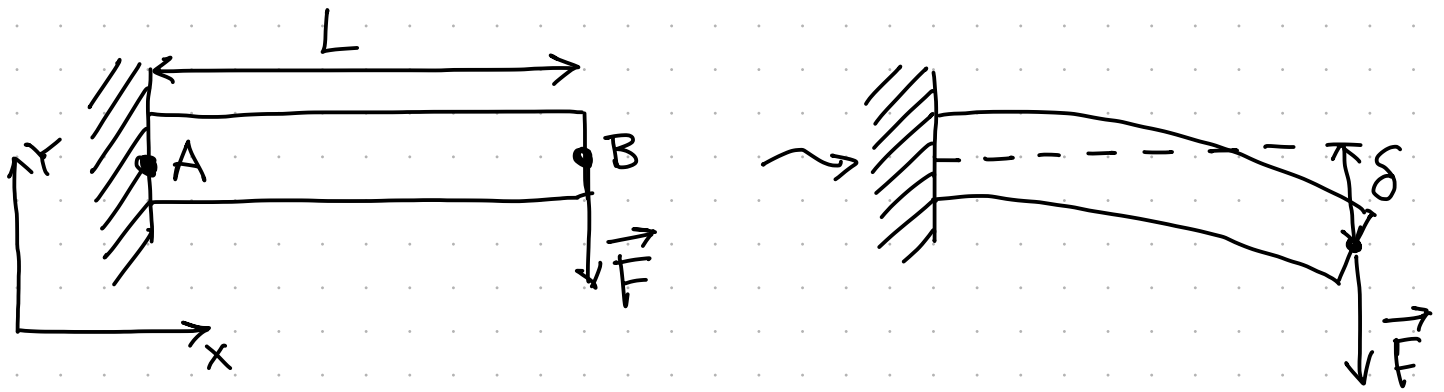


Chap V - Déformation de Flexion



- On considère une poutre encastree à une extrémité (A) et soumise à une force verticale à l'autre extrémité (B).

Quelle est la déflexion δ ?

- Applications en nanomécanique (pointe AFM), en biomécanique, emballage de l'ADN, ...

I] Effort tranchant et moment fléchissant

- L'encastrement bloque les translations et rotations d'où un torseur de liaison :

$$T_L = \left\{ \begin{array}{l} [R_x, R_y, R_z] \\ [M_x, M_y, M_z] \end{array} \right\}_A$$

et le torseur des forces appliquées

$$T_{\text{ext}} = \left\{ \begin{array}{l} [0, -F, 0] \\ [0, 0, 0] \end{array} \right\}_B$$

- On suppose les déformations suffisamment faibles pour calculer les torseurs dans l'état initial (où le barreau est droit)

- A l'équilibre statique : $T_L + T_{\text{ext}} = 0$

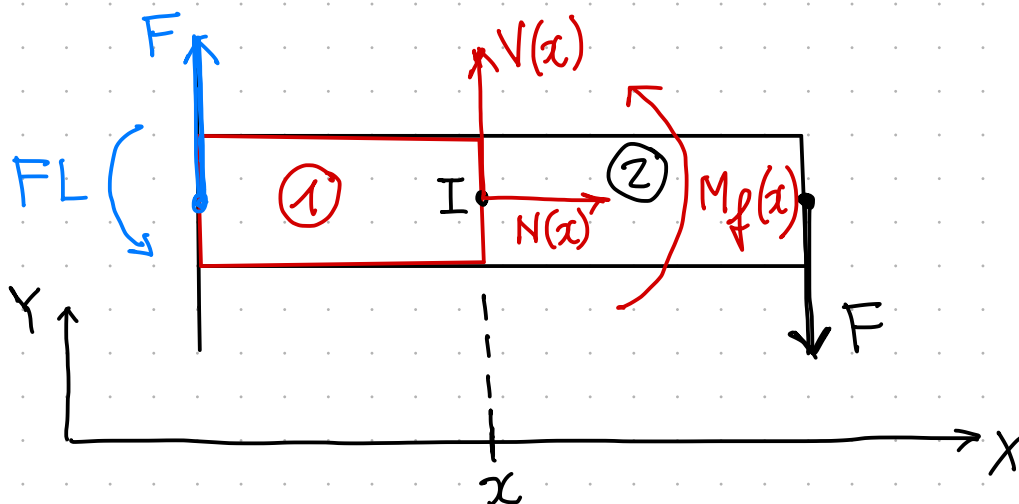
d'où $R_x = R_z = 0$ et $R_y = F$

et le moment total en A :

$$\vec{M}_{A/L} + \vec{M}_{A/F_{\text{ext}}} = \vec{0} = \vec{M}_{A/L} + \cancel{\vec{M}_{B/F_{\text{ext}}}} + \vec{F}_{\text{ext}} \wedge \vec{BA}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z - FL \end{bmatrix} = 0$$

d'où $M_x = M_y = 0$ et $M_z = FL$



- On peut faire une coupe fictive et imposer l'équilibre d'une section (1) soumise à T_L à gauche et au torseur des forces de (2) sur (1) à droite (double encastrement)

$$\text{Torseur (2) } \rightarrow \text{(1)} \quad T = \left\{ \begin{array}{l} [N(x), V(x), 0] \\ [0, 0, M_f(x)] \end{array} \right\}_I$$

A l'équilibre $T_L + T = 0$

d'où

$N(x) = 0$	Effort normal
$V(x) = -F$	Effort tranchant

et le moment en I :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_f(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ FL \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$M_f(x) + FL - Fx = 0 \quad \text{d'où}$$

$M_f(x) = -F(L-x)$

Rmq: M_f est le moment imposé par la partie droite de la poutre sur la gauche.

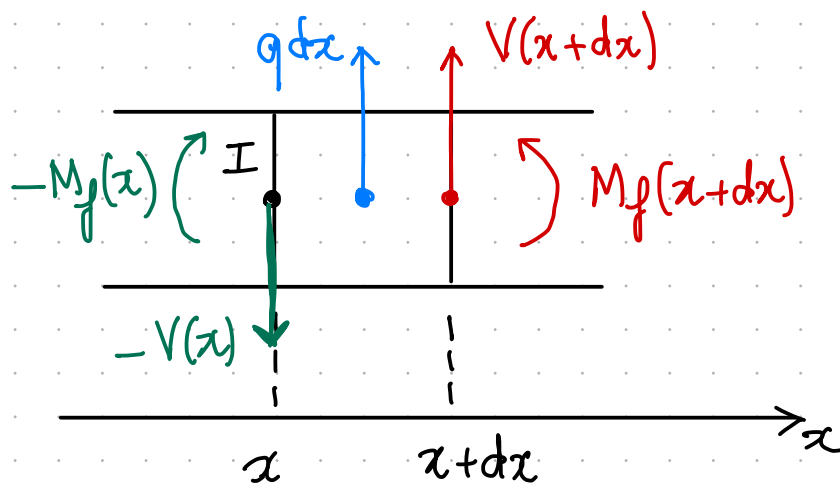
Moment fléchissant

- On montre que dans le cas général, en regardant l'équilibre d'une section élémentaire

$$V(x) = - \frac{dM_f}{dx} \quad \text{et} \quad q(x) = - \frac{dV}{dx}$$

avec q , une force linéaire selon γ , par ex. $q = -pgS$ la gravité.
(S : section de la poutre).

démo



En rouge, le torseur de la partie droite du barreau sur l'élément dx .

En vert, le torseur de la partie gauche sur dx

$\left(T = \begin{Bmatrix} V(x) \\ M_f(x) \end{Bmatrix}_x \right)$ est défini comme le torseur de la partie droite ($> x$) sur la partie gauche ($< x$). Mais à l'équilibre $T_{\text{gauche} \rightarrow \text{droite}} = - T_{\text{droite} \rightarrow \text{gauche}}$ d'où les signes $\ominus$ sur le schéma).

A l'équilibre $-V(x) + q dx + V(x+dx) = 0$

$$\text{d'où } \boxed{q(x) = - \frac{dV}{dx}}$$

et le moment en I

$$-M_f(x) + \cancel{q dx \frac{dx}{2}} + M_f(x+dx) + \underbrace{V(x+dx) dx}_{= V(x) dx + \cancel{\frac{dV}{dx} dx^2}} = 0$$

second ordre

$$\text{et } \boxed{V(x) = - \frac{dM_f}{dx}}$$

et l'équation d'équilibre sur le moment fléchissant :

$$\boxed{\frac{d^2 M_f}{dx^2} = q}$$

Exemples : 1) Flexion 4 points

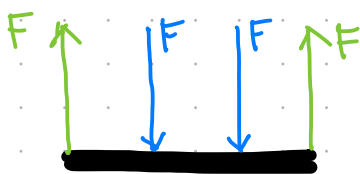


2 forces ponctuelles
en $\frac{L}{3}$ et $\frac{2L}{3}$

Pivot $\rightarrow T_{L_1} = \left\{ \begin{bmatrix} R_{x,1} & R_{y,1} & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\}$

Appui simple $\rightarrow T_{L_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & R_{y,2} & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\}$

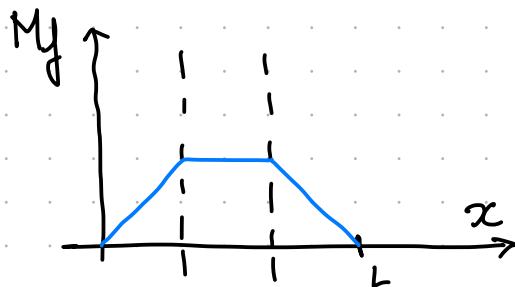
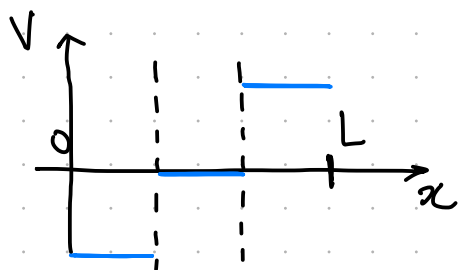
Equilibre global $R_{x,1} = 0$ $R_{y,1} + R_{y,2} - 2F = 0$
d'où par symétrie $R_{y,1} = R_{y,2} = F$



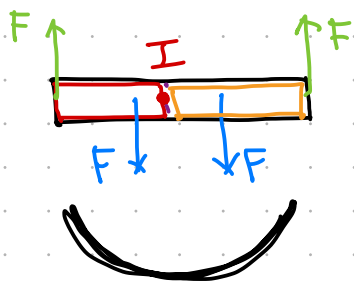
et $q(x) = F\delta(x) - F\delta(x - \frac{L}{3}) - F\delta(x - \frac{2L}{3}) + F\delta(x - L)$

$$= - \frac{dV}{dx} = \frac{d^2 M_f}{dx^2} \quad (M_f(0) = M_f(L) = 0)$$

pour $x \in [0, \frac{L}{3}[$, $V(x) = -F$ et $M_f(x) = F \cdot x$
 $x \in [\frac{L}{3}, \frac{2L}{3}[$, $V(x) = -F + F = 0$ $M_f(x) = F \frac{L}{3}$
 $x \in [\frac{2L}{3}, L[$, $V(x) = F$ $M_f(x) = F(L - x)$

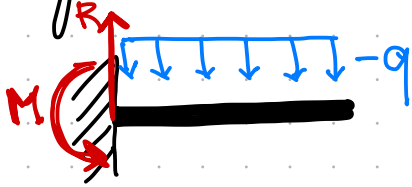


On a bien sûr le même résultat avec une coupe fictive



	$x < \frac{L}{3}$	$\frac{L}{3} \leq x < \frac{2L}{3}$	$x \geq \frac{2L}{3}$
Équil des Forces	$V(x) + F = 0$	$V(x) + F - F = 0$	$V(x) - F = 0$
Équil des Moments	$M_f(x) - Fx = 0$	$M_f(x) - Fx + F(x - \frac{L}{3}) = 0$	$M_f(x) - Fx + F(x - \frac{L}{3}) + F(x - \frac{2L}{3}) = 0$

2) Poutre fléchissant sous son poids propre



$$q = \rho g S \quad \text{force par u. de longueur}$$

Equilibre global : $R = - \int -q dx = \rho g S L$

$$\vec{M} = - \int \begin{bmatrix} 0 \\ -q \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +q \frac{L^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{dV}{dx} = -(-q + R \delta(x)) = \rho g S (1 - L \delta(x))$$

on a bien

d'où $V(x) = \rho g S (x - L)$

$$V(0) = -R \quad \text{et}$$

$$V(L) = 0$$

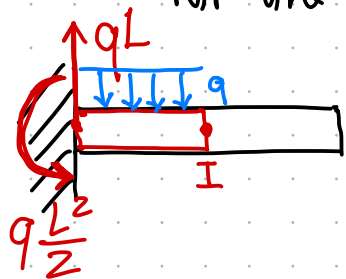
et $\frac{dM_f}{dx} = -V$ d'où $M_f(x) = -\rho g S \left(\frac{x^2}{2} - Lx + C \right)$

avec $M_f(0) = -\rho g S \frac{L^2}{2}$

d'où $M_f(x) = -\rho g S \left(\frac{x^2}{2} - Lx + \frac{L^2}{2} \right) = -\frac{\rho g S}{2} (L-x)^2$

et on a bien $M_f(L) = 0$.

Par une coupe fictive :



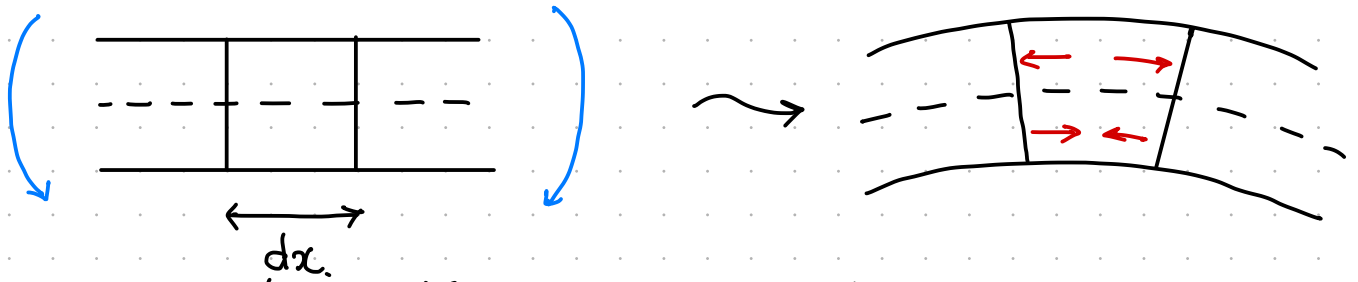
Equil des forces :

$$V(x) + qL - qx = 0$$

Equil. des moments en I :

$$M_f(x) + \frac{qL^2}{2} - qL \cdot x + q \frac{x^2}{2} = 0$$

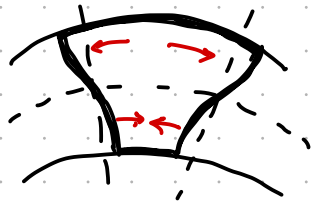
II] Déformation de flexion



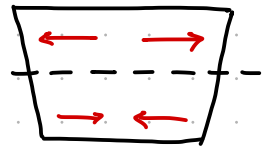
• Approximation d'Euler - Bernoulli:

Dans la limite des petites flexions,
toute section droite reste droite

En grande
flexion



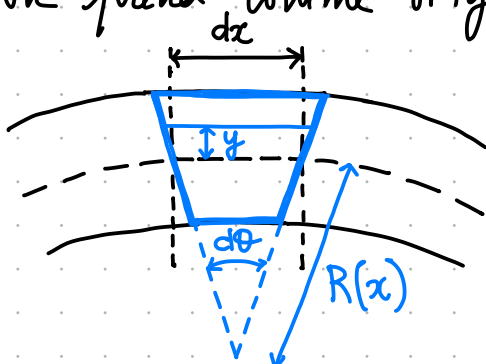
mais en petite
flexion, on peut
approximer



- La partie haute est en traction ($\epsilon > 0$), la partie basse en compression ($\epsilon < 0$) et la ligne médiane est une ligne neutre où $\epsilon = 0$

- Rmq: Pas de cisaillement en flexion, seulement de la traction/compression. Pour avoir du cisaillement, il faut de la torsion (cf TD6)

- On note $Y(x)$, l'équation de la ligne neutre que l'on prend comme origine des y



$R(x)$, rayon de courbure
local

$$dx \approx R(x) d\theta$$

et à la hauteur y , la déformation (allongement relatif) est :

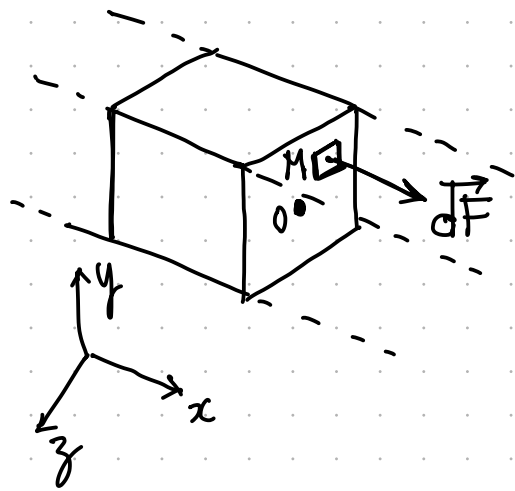
$$\epsilon(y) = \frac{(R+y) d\theta - R d\theta}{R d\theta} = \frac{y}{R}$$

et la contrainte à la hauteur y

de traction ($y > 0$)
ou compression ($y < 0$)

$$\sigma(y) = E \frac{y}{R}$$

(Contrainte imposée par le reste du barreau pour imposer la déformation $\epsilon = \frac{y}{R}$)



La force imposée par la partie droite sur une surface élémentaire $dydz$ est

$$d\vec{F} = \sigma(x, y, z) dydz \vec{e}_x = E \frac{y}{R(x)} dydz \vec{e}_x$$

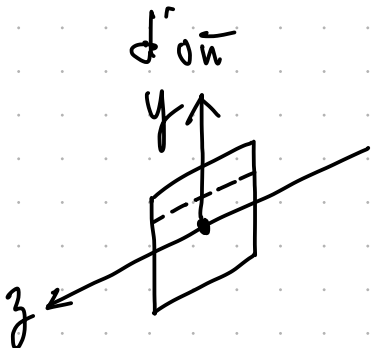
et le moment fléchissant dans la surface est

$$\vec{M}_0 = \int \vec{OM} \wedge d\vec{F} = \int \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} E y/R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dydz$$

$$= \int E \begin{bmatrix} 0 \\ yz/R \\ -y^2/R \end{bmatrix} dydz$$

car $\int y dy = 0$ par symétrie

$$M_f(x) = - \frac{E}{R(x)} \int y^2 dydz$$

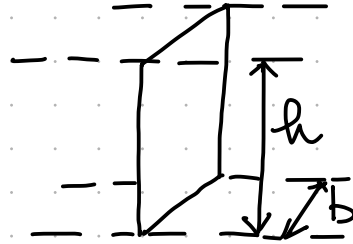


I : Moment quadratique de la section par rapport à (Oz)

- I caractérise l'effet de la forme de la section sur la déformabilité de la poutre (analogue au moment d'inertie sans ρ et pour une surface).

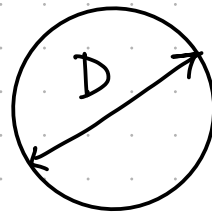
• Exemple :

Section rectangulaire



$$I = \frac{bh^3}{12}$$

Section circulaire



$$I = \frac{\pi D^4}{64}$$

et

$$M_f(x) = - \frac{EI}{R(x)}$$

EI : Rigidité de flexion

III] Déflexion

On a $M_f(x) = -F(L-x) = - \frac{EI}{R(x)}$

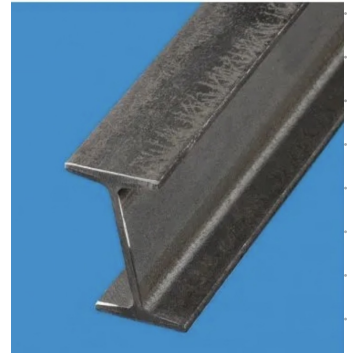
et pour une faible déflexion $\frac{1}{R(x)} = - \frac{d^2 Y}{dx^2}$

d'où $\frac{d^2 Y}{dx^2} = - \frac{F}{EI} (L-x)$ avec $Y(0) = Y'(0) = 0$

donc $Y(x) = - \frac{F}{EI} \left(L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$ et $\delta = -Y(L) = \frac{F}{EI} \frac{L^3}{3}$

Rmq: 1) $\delta \propto L^3$, variation rapide par rapport à l'élongation $\propto L$

2) Pour diminuer δ , il faut augmenter I et donc éloigner la masse du centre d'où les poutres en I

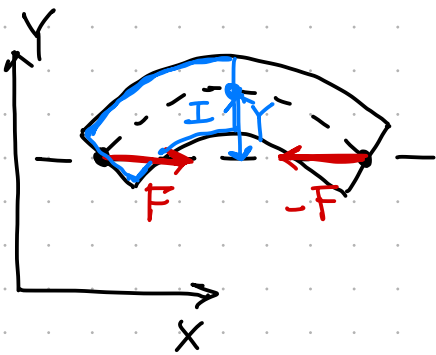


3) Pour une poutre fléchissant sous son poids, on a

$$M_y = -\frac{\rho g S}{2} (L-x)^2 = EI \frac{d^2 Y}{dx^2} \quad \text{et} \quad \delta \propto L^4$$

IV] Flambage

• Instabilité d'une poutre en compression



Traitement approché : on garde les approximations de petite déformation mais on tient compte de la déflexion

On a toujours $\vec{M}_f(x) = EI \frac{d^2 Y}{dx^2} \vec{e}_z$

et le moment total en I :

$$\vec{M}_f(x) + \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x \\ Y \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{d'où} \quad EI \frac{d^2 Y}{dx^2} = -FY$$

- $\frac{d^2 Y}{dx^2} = -\frac{F}{EI} Y$ d'où $Y(x) = A \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x + \varphi\right)$

avec comme conditions aux limites $Y(0) = Y(L) = 0$

d'où $A = 0$, la poutre est droite

ou $\varphi = 0$ et $\sqrt{\frac{F}{EI}} L = n\pi$
 $A \neq 0$

- La condition minimale pour avoir $A \neq 0$ est

$$\sqrt{\frac{F}{EI}} L = \pi$$

ou

$$F = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

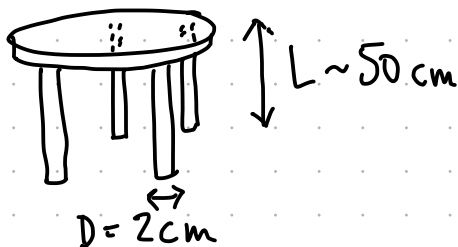
Force Limite
d'Euler
(1757)

Si $F < F_c$, la poutre reste droite

Si $F > F_c$, la poutre droite est instable et flambe.

L'amplitude A reste indéterminée. Pour la déterminer, il faut aller au-delà de l'approx. des petites déformations (cf TD 6)

- Application à une chaise $F_c = \pi^2 \cdot \frac{10^{11}}{(0,5)^2} \cdot \pi \frac{(2 \cdot 10^{-2})^4}{64} \sim 3 \cdot 10^4 \text{ N}$



et si j'assoie sur la chaise

$$F_{\text{par pied}} = \frac{Mg}{4} = \frac{100 \times 10}{4} = 250 \text{ N}$$