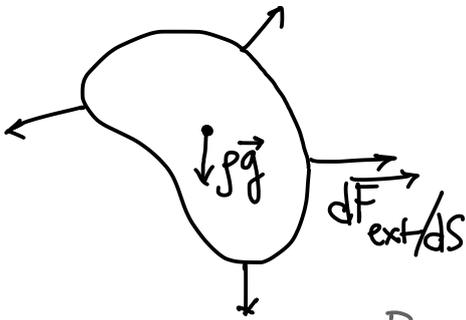


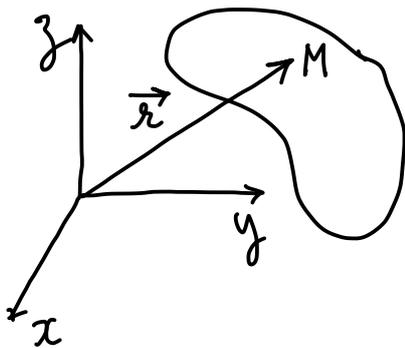
Chap VI - Théorie générale de l'élasticité linéaire isotrope

Cadre général : Un solide \mathcal{V} homogène et isotrope soumis à des forces extérieures $\frac{d\vec{F}_{\text{ext}}}{ds}$ à sa surface (incluant les forces de liaisons) et des forces volumiques (par ex. la gravité).

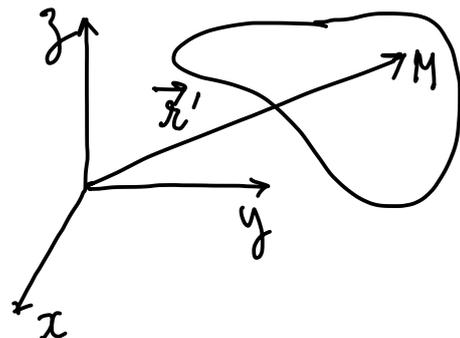
Rmq: Un moment extérieur peut toujours être modélisé par une distribution de forces.



Pour éviter une translation et/ou rotation globale, on a $\vec{F}_{\text{TOT}} = \int ds \cdot \frac{d\vec{F}_{\text{ext}}}{ds} + \int dV p\vec{g} = \vec{0}$ et $\vec{M}_{\text{TOT}} = \int ds \vec{r} \wedge \frac{d\vec{F}_{\text{ext}}}{ds} + \int dV \vec{r} \wedge p\vec{g} = \vec{0}$



Configuration initiale avant déformation



Après déformation

\mathcal{V} se déforme sous l'effet de $\frac{d\vec{F}_{\text{ext}}}{ds}$ et $p\vec{g}$. Il existe un champ de déplacement $\vec{u}(\vec{r})$ tel que

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}(\vec{r})$$

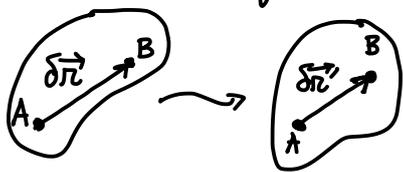
Position dans le solide déformé

Position dans la configuration initiale non déformée

Objectif : Exprimer $\vec{u}(\vec{r})$ à l'équilibre

I] Tenseur de déformation

1) Définition



Soient A, B 2 points de \mathcal{P} séparés de $\delta\vec{r}$ dans la configuration initiale.

Après déformation

$$\begin{aligned}\delta\vec{r}' &= \delta\vec{r} + \vec{u}(\vec{r}_B) - \vec{u}(\vec{r}_A) \\ &= \delta\vec{r} + \vec{u}(\vec{r}_A + \delta\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r}_A)\end{aligned}$$

Pour une direction i ($= x, y, z$) avec $\delta\vec{r} = \begin{bmatrix} \delta r_x \\ \delta r_y \\ \delta r_z \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned}u_i(\vec{r}_A + \delta\vec{r}) - u_i(\vec{r}_A) &\cong \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \delta r_j \quad \text{au 1^{er} ordre} \\ &= \vec{\nabla} u_i \cdot \delta\vec{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d'où } \delta\vec{r}' &= \delta\vec{r} + \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \delta\vec{r} \\ &= ([\mathbb{1}] + \vec{\nabla} \vec{u}) \cdot \delta\vec{r}\end{aligned}$$

Matrice identité

$[F] = \vec{\nabla} \vec{u}$ est le gradient de déplacement

$$F_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

- La transformation $\delta\vec{r} \rightarrow \delta\vec{r}'$ implique une rotation et un changement de longueur. Or pour les déformations, seul le changement de longueur compte.

- On s'opare rotation et dilatation/contraction en 6crivant

$$F_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\varepsilon_{ij} : \text{Partie sym6trique}} \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\omega_{ij} : \text{Partie antisym6trique}}$$

et $\delta \vec{n}' = \delta \vec{n} + [\varepsilon] \cdot \delta \vec{n} + [\omega] \cdot \delta \vec{n}$

- On peut toute matrice antisym6trique 3×3 , il existe un vecteur $\vec{\Omega}$ /

$$[\omega] \cdot \delta \vec{n} = \vec{\Omega} \wedge \delta \vec{n}$$

(cf Chap I et la d6mo. de $\vec{e}_i = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_i$)

d'o6 $\delta \vec{n}' = \delta \vec{n} + \underbrace{[\varepsilon] \cdot \delta \vec{n}}_{\text{D6formation}} + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge \delta \vec{n}}_{\text{Rotation}}$

- Seule $[\varepsilon]$ participe 6 la d6formation au 1^{er} ordre

car $\|\delta \vec{n}'\|^2 = \delta \vec{n}' \cdot \delta \vec{n}' = \delta \vec{n} \cdot \delta \vec{n} + 2 \delta \vec{n} \cdot [\varepsilon] \cdot \delta \vec{n} + 2 \delta \vec{n} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \delta \vec{n}) + \text{Termes quadratiques en } [F]$

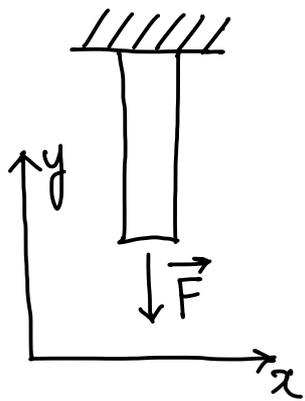
- Dans la suite, on ne tient compte que de

$[\varepsilon]$ tel que $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$
Tenseur des d6formations

2) Exemples

On ré-écrit dans un cadre général les exemples du Chap IV.

• Traction simple



\vec{u} varie linéairement en x, y, z

$$u_y = \Delta L_y \frac{y}{L_y}$$

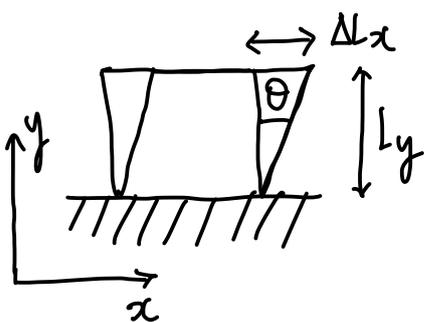
$$u_x = \Delta L_x \frac{x}{L_x} = -\nu \frac{\Delta L_y}{L_y} \cdot x$$

idem pour u_z

d'où

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta L_x}{L_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta L_y}{L_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta L_z}{L_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix} \cdot \frac{\Delta L_y}{L_y}$$

• Cisaillement simple



$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \Delta L_x \frac{y}{L_y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \theta y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d'où $[F] = \begin{bmatrix} 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \theta/2 & 0 \\ \theta/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d'où $\delta = \theta = 2\varepsilon$)

A noter que si on applique $[F]$ à la config. initiale:

$$([\mathbb{1}] + [F]) \left(\begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array} \right) = \begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array}$$

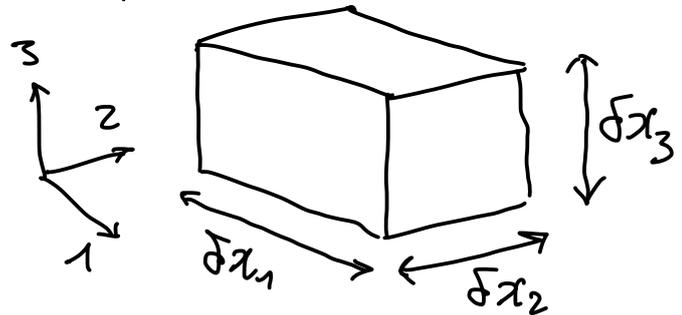
Par contre $([\mathbb{1}] + [\varepsilon]) \left(\begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array} \right) = \begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array}$

Mais au 1^{er} ordre, les 2 quadrilatères sont identiques à une rotation près

3) Dilatation et cisaillement

- $[\varepsilon]$ est symétrique donc diagonalisable et dans le repère (local) des axes principaux

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$



Un parallélépipède rectangle est simplement dilaté avec $\delta x'_i = (1 + \varepsilon_i) \delta x_i$

et $V' = \delta x'_1 \delta x'_2 \delta x'_3 = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 (1 + \underbrace{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}_{\text{Tr}[\varepsilon]} + \text{Termes non-linéaires})$

d'où $\frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \text{Tr}[\varepsilon] = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div} \vec{u}$

$\text{Tr}[\varepsilon] = \text{div} \vec{u}$ est la dilatation locale

et on peut décomposer $[\varepsilon]$ /

$$[\varepsilon] = \underbrace{\left(\frac{1}{3} \text{Tr}[\varepsilon] \right) [\mathbb{1}]}_{\text{Dilatation locale}} + \underbrace{\left([\varepsilon] - \frac{1}{3} \text{Tr}[\varepsilon] \cdot [\mathbb{1}] \right)}_{\text{Cisaillement local de trace} = 0}$$

Le cisaillement ne change pas le volume.

Rmq sur la compatibilité

On calcule facilement $[\mathcal{E}]$ à partir de \vec{u} .

L'inverse n'est pas évident pour 2 raisons

1) $[\mathcal{E}]$ a 6 composantes alors que \vec{u} seulement 3

Tout champ $[\mathcal{E}]$ ne dérive pas forcément d'un champ \vec{u} . Il existe des conditions supplémentaires dites de compatibilité

2) Il faut reconstruire $[\omega]$ pour accéder à \vec{u} .

Pour 1), si $[\mathcal{E}]$ est de la forme $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$,

$$\text{alors } \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{yy}}{\partial x^2} \right)$$

On montre que si $\forall i \neq j \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{jj}}{\partial x_i^2} \right)$
(i.e. 3 équations de compatibilité) alors $\exists \vec{u} / \mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

Pour 2), $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ et $\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathcal{E}_{jk}}{\partial x_i} \right)$

et on calcule $\omega_{ij}(\vec{r})$ à partir de la différentielle totale:

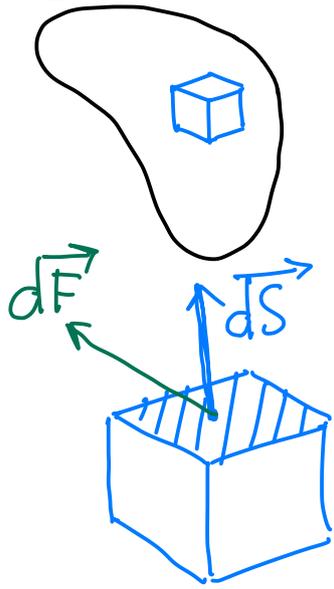
$$d\omega_{ij} = \sum_k \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k = \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathcal{E}_{jk}}{\partial x_i} \right) dx_k$$

$$\text{d'où } \omega_{ij}(\vec{r}) - \omega_{ij}(\vec{0}) = \int_{\vec{0} \rightarrow \vec{r}} \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathcal{E}_{jk}}{\partial x_i} \right) dx_k$$

et finalement on calcule \vec{u} par $u_i(\vec{r}) - u_i(\vec{0}) = \int_{\vec{0}}^{\vec{r}} \sum_j (\mathcal{E}_{ij} + \omega_{ij}) dx_j$

II] Tenseur des contraintes

1) Définition



• On isole par la pensée un cube élémentaire dans \mathcal{Y} . Ce cube se déforme si le reste de \mathcal{Y} impose des forces sur ses faces

• On définit le tenseur des contraintes $[\sigma]$ tel que la force $d\vec{F}$ appliquée sur une surface de normale sortante $d\vec{S}$ est :

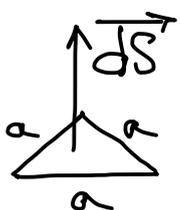
$$d\vec{F} = [\sigma] \cdot d\vec{S} = ([\sigma] \cdot \vec{n}) dS$$

↑ normale unitaire sortante \vec{n} à dV

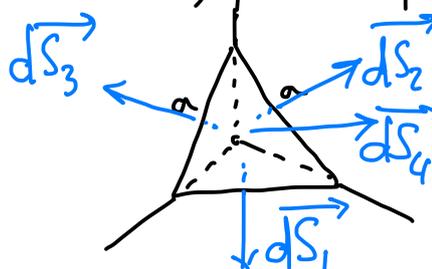
⇒ $[\sigma]$ est le tenseur des contraintes exercées par l'extérieur sur le cube élémentaire et

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial S_j}$$

• Cette définition est valable si $d\vec{F}$ est une fonction linéaire de $d\vec{S}$. Or, par ex. pour une surface triangulaire :



≡



avec $d\vec{S} = d\vec{S}_2 + d\vec{S}_3 + d\vec{S}_4$

ou $\sum_i d\vec{S}_i = \vec{0}$

avec $d\vec{S}_1 = -d\vec{S}$

on devrait donc avoir $d\vec{F} = d\vec{F}_2 + d\vec{F}_3 + d\vec{F}_4$ ou $\sum_i d\vec{F}_i = \vec{0}$

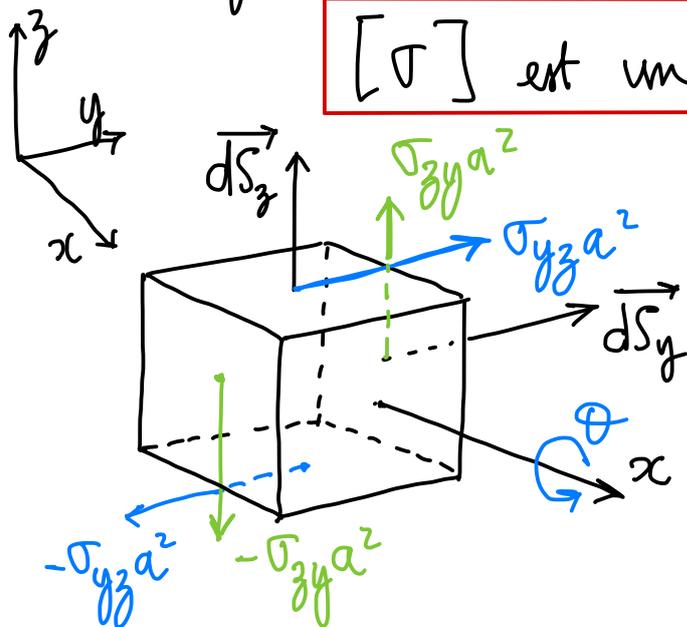
or d'après le PFD avec \vec{r}_G position du centre de gravité de dV

$$\underbrace{\rho dV \ddot{\vec{r}}_G}_{\propto a^3} = \underbrace{d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 + d\vec{F}_3 + d\vec{F}_4}_{\propto a^2} + \underbrace{\rho dV \vec{g}}_{\propto a^3}$$

donc, dans la limite $a \rightarrow 0$, on a bien $d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 + d\vec{F}_3 + d\vec{F}_4 = \vec{0}$

2) Symétrie

$[\sigma]$ est un tenseur symétrique



Quelles forces induisent une rotation autour de (Ox) ?

$$\begin{cases} dF_y = ([\sigma] \cdot \vec{dS}_z) \cdot \vec{e}_y = \sigma_{yz} a^2 \\ dF_z = ([\sigma] \cdot \vec{dS}_y) \cdot \vec{e}_z = \sigma_{zy} a^2 \end{cases}$$

- dF_y est la force sur la surface dS_z projetée selon (Oy) . Sur la face opposée, de normale sortante $-\vec{dS}_z$, la force est $-dF_y$. Idem pour dF_z .

- D'après le "théorème" du moment cinétique :

$$I \ddot{\Theta} = -2x (\sigma_{yz} a^2) \frac{a}{2} + 2 (\sigma_{zy} a^2) \frac{a}{2}$$

or $I \propto \int (y^2 + z^2) dV \propto a^5$ donc, dans la limite $a \rightarrow 0$

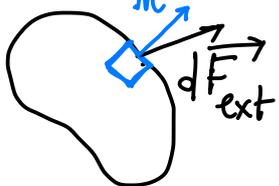
$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

Rmq: 1) Par définition $P = -\left(\frac{1}{3} \text{Tr}[\sigma]\right) [1]$

d'où une décomposition analogue à la déformation:

$$[\sigma] = \underbrace{\left(\frac{1}{3} \text{Tr}[\sigma]\right) [1]}_{= -P} + \underbrace{\left([\sigma] - \frac{1}{3} \text{Tr}[\sigma] \cdot [1]\right)}_{\text{Contrainte de cisaillement}}$$

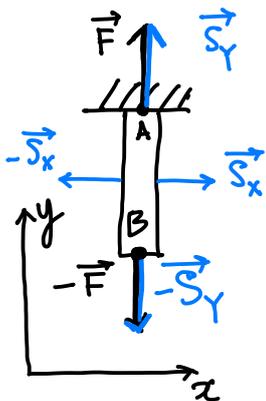
2) $d\vec{F} = [\sigma] \cdot d\vec{S}$ est la force appliquée au solide sur un volume élémentaire. Sur le bord de \mathcal{V} , on a $[\sigma] \cdot \vec{n} = d\vec{F}_{\text{ext}}/dS$



et par exemple une surface libre impose une force normale à \mathcal{V} nulle, i.e. $\vec{n} \cdot [\sigma] \cdot \vec{n} = 0$
(les forces parallèles à la surface peuvent être $\neq 0$, cf cisaillement juste après)

3) Exemples

En traction simple, le tenseur des contraintes est

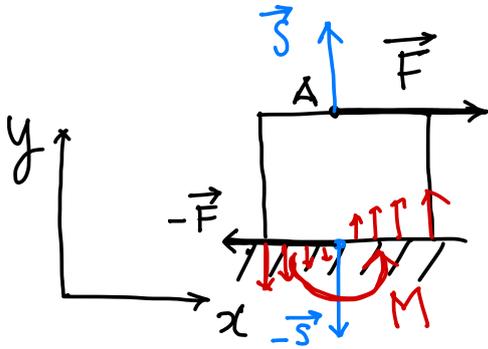


$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & F/S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En B, on a bien $[\sigma] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -S \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{bmatrix}$ et sur

les surfaces latérales $[\sigma] \cdot \begin{bmatrix} S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Le cisaillement simple est plus compliqué car la liaison impose une force (pour bloquer la translation) et un moment (pour bloquer la rotation)



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & F/s & 0 \\ F/s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{xy} = F_x/s_y$ est la contrainte appliquée
 σ_{yx} , la réaction pour bloquer la rotation

En A, on a bien $[\sigma] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

et sur une surface latérale :

$$[\sigma] \cdot \begin{bmatrix} s' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \cdot s'/s \\ 0 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow la force normale (F_x) est nulle :
 on a bien une surface libre
 (la force parallèle à la surface est non-nulle et provient de la condition de non-rotation).

III] Loi de Hooke généralisée

1) Expression générale

- On suppose une relation linéaire entre $[\sigma]$ et $[\varepsilon]$ en introduisant un tenseur d'ordre 4, $[C]$, de composantes C_{ijkl} , le tenseur des constantes élastiques, tel que :

$$[\sigma] = [C] : [\varepsilon] \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

(généralisation de $\sigma = E\varepsilon$)

- A priori $[C]$ a $3^4 = 81$ coefficients. Mais $[\sigma]$ et $[\varepsilon]$ sont symétriques et n'ont que 6 composantes indépendantes

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$$

$$\Rightarrow 36 = 6^2 \text{ coefficients}$$

Notation de Voigt

On peut représenter $[\sigma]$ et $[\epsilon]$ sous forme de vecteurs avec la convention :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ & \sigma_2 & \sigma_4 \\ & & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Le tenseur des constantes élastiques devient alors une matrice 6×6

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ \text{Matrice réduite} \\ 6 \times 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ 2\epsilon_4 \\ 2\epsilon_5 \\ 2\epsilon_6 \end{bmatrix}$$

Attention, on a besoin d'un facteur 2 pour les termes non-diagonaux

- En plus, on montre qu'on peut définir une densité d'énergie libre mécanique f /

$$\sigma_{ij} = \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_T \quad (\text{cf Compléments})$$

D'après Hooke $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{kl} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$

d'où $C_{ijkl} = \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij}$

⇒ la matrice réduite $[C]$ 6×6 est symétrique

⇒ Un solide anisotrope a au plus 21 constantes élastiques indépendantes

⇒ Les symétries du solide réduisent encore le nombre de constantes. Pour un solide isotrope (symétrie max.), il n'y en a que 2 !

2) Cas du solide isotrope

$$\sigma_{ij} = \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_T = \sum_{kl} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \Rightarrow f = f_0(T) + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

∫ isotrope ⇒ f est une fonction scalaire quadratique, invariante par rotation de $[\varepsilon]$.

- or il n'existe que 2 scalaires quadratiques invariants par rotation :

$$(\text{Tr}[\varepsilon])^2 = \left(\sum_i \varepsilon_{ii}\right)^2$$

$$\text{Tr}([\varepsilon]^2) = \sum_{ij} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji} = \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^2$$

- On a donc

$$f = f_0(T) + \frac{\lambda}{2} \left(\sum_i \varepsilon_{ii}\right)^2 + \mu \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^2$$

λ, μ : Coefficients de Lamé

$$\text{et } \sigma_{ij} = \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_T = \lambda \left(\sum_i \varepsilon_{ii}\right) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\text{ou } [\sigma] = \lambda (\text{Tr}[\varepsilon]) [\mathbb{1}] + 2\mu [\varepsilon]$$

Loi de Hooke
pour solides
isotropes

- Il existe plusieurs façons d'exprimer la loi de Hooke, en fonction de différentes paires de coefficients, avec des relations entre eux

a) On sépare dilatation et cisaillement

$$[\sigma] = \underbrace{\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)}_{B} (\text{Tr}[\varepsilon]) [\mathbb{1}] + \underbrace{2\mu}_{\mu = G} \left([\varepsilon] - \left(\frac{1}{3}\text{Tr}[\varepsilon]\right) [\mathbb{1}]\right)$$

B : module de compressibilité

$\mu = G$: module de cisaillement

$G = \mu$ et $B = \lambda + \frac{2}{3}\mu$
 Module de cisaillement Module de compressibilité

b) On inverse la relation en écrivant

$$\text{Tr}[\sigma] = (3\lambda + 2\mu) \text{Tr}[\varepsilon]$$

$$\text{et } [\varepsilon] = \frac{1}{2\mu} \left([\sigma] - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\text{Tr}[\sigma]) \cdot [1] \right)$$

que l'on ré-écrit

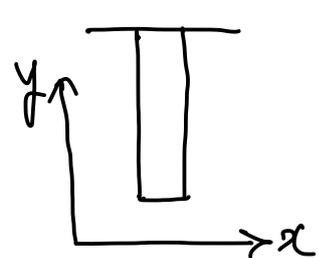
$$[\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E} \left([\sigma] - \frac{\nu}{1+\nu} (\text{Tr}[\sigma]) \cdot [1] \right)$$

avec $E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$ et $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$
 Module d'Young Coef. de Poisson

que l'on peut ré-inverser pour avoir :

$$[\sigma] = \frac{E}{1+\nu} \left([\varepsilon] + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{Tr}[\varepsilon]) \cdot [1] \right)$$

Rmq: on retrouve les relations simples vues au Chap IV. Par exemple, pour la traction simple



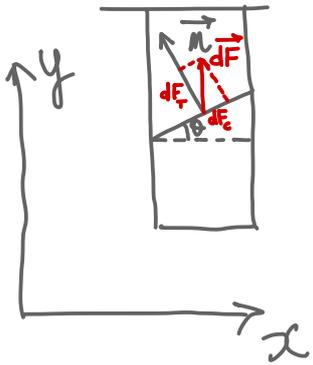
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix} \cdot \frac{\Delta l_y}{l_y}, \text{ et}$$

$$[\sigma] = \frac{E}{1+\nu} \left(\begin{bmatrix} -\nu & & \\ & 1 & \\ & & -\nu \end{bmatrix} \frac{\Delta l_y}{l_y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot (1-2\nu) \frac{\Delta l_y}{l_y} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme $\text{Tr}[\sigma] \neq 0$, la traction simple implique du cisaillement.

Illustration:



Supposons une surface élémentaire dS dans un plan faisant un angle θ avec l'horizontale : $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$

$$d\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \cdot dS = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \cdot dS$$

d'où une force de traction parallèle à \vec{n} :

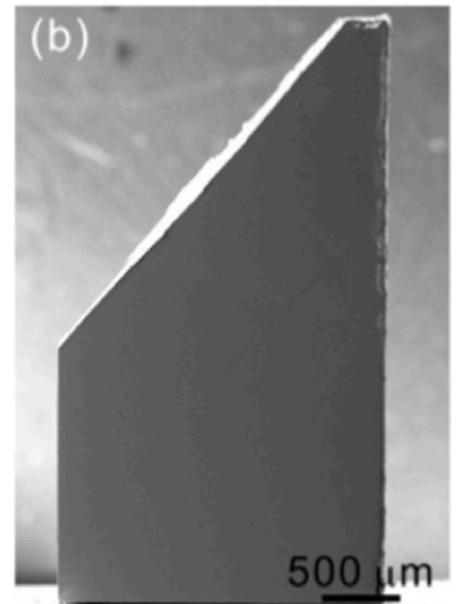
$$dF_T = d\vec{F} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} dS = \sigma \cdot \cos^2\theta \cdot dS$$

et une force de cisaillement, perpend. à \vec{n}

$$dF_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} dS = \sigma \cos\theta \sin\theta dS$$

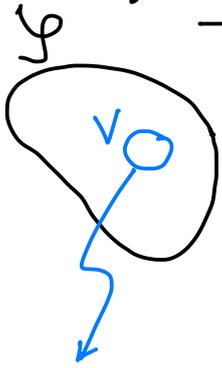
⇒ La force de cisaillement est max. pour $\theta = 45^\circ$

Ceci explique que, par ex. lorsqu'une pile de béton cède, elle forme une fissure avec un angle proche de 45°



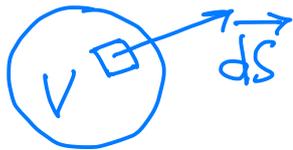
IV] Equation d'équilibre mécanique

1) Equation en contrainte



- Par la pensée, on isole un volume V de \mathcal{Y} . La force sur un élément de vecteur surface sortante \vec{dS} :

$$\vec{dF} = [\sigma] \cdot \vec{dS}$$



et la force totale sur \mathcal{Y} est

$$\vec{F}_{\text{TOT}} = \int_S [\sigma] \cdot \vec{dS}$$

S : surface qui entoure V

$\Rightarrow \vec{F}_{\text{TOT}}$ est le flux de $[\sigma]$ au travers de S

- D'après le théorème de Gauss

$$\vec{F}_{\text{TOT}} = \int_V \text{div} [\sigma] dV \quad \text{i.e.} \quad F_i = \int_V \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV$$

$\Rightarrow \text{div} [\sigma]$ peut être interprété comme une densité volumique de force appliquée

- Avec une force volumique comme la gravité, à l'équilibre statique
- $$\vec{F}_{\text{TOT}} = \int_V (\text{div} [\sigma] + \rho \vec{g}) dV = \vec{0}$$

- Comme V peut être choisi arbitrairement :

$$\text{div} [\sigma] + \rho \vec{g} = 0$$

Equation différentielle que doit vérifier $[\sigma]$ compte tenu des conditions aux limites

$$[\sigma] \cdot \vec{n} = \frac{d\vec{F}_{\text{ext}}}{ds} \text{ sur la surface de } \mathcal{V}$$

- Ainsi posé le problème est sous-déterminé car $[\sigma]$ a 6 composantes alors que \vec{F}_{ext} seulement 3. On doit compléter par des conditions de compatibilité, qui s'expriment comme pour les déformations car Hooke est linéaire : $\forall i, j \quad \frac{\partial^2 \sigma_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{jj}}{\partial x_i^2} = 2 \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$
- On évite ce problème en passant en déplacement

2) Equation en déplacements

• On a
$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0$$

et
$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\sum_l \varepsilon_{ll} \right) \delta_{ij} \right)$$

$$= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij} \right)$$

d'où
$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\sum_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l \partial x_j} \right) \delta_{ij} \right)$$

et
$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{1}{2} \Delta u_i + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \text{div} \vec{u} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \text{div} \vec{u} \right)$$

Au final :

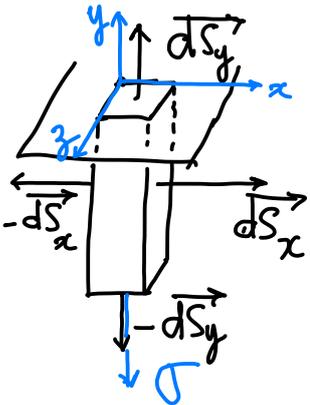
$$\frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \vec{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{u}) + \rho \vec{g} = \vec{0}$$

Equation de Navier

Plusieurs remarques :

- 1) Comme \vec{u} et \vec{F}_{ext} ont 3 composantes, le problème est bien posé. Pour le résoudre, on intègre l'équation différentielle avec 2 constantes d'intégration. On en déduit $[\varepsilon]$ puis $[\sigma]$ et on fixe les constantes grâce aux conditions aux limites.
- 2) On montre que cette équation admet une unique solution pour des conditions aux limites données (donc si on trouve une solution, c'est la bonne !)

Par ex., en traction simple, les conditions aux limites sont :



$$[\sigma(L_x, y, z)] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [\sigma(0, y, z)] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$[\sigma(x, y, L_z)] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\sigma(x, y, 0)] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$[\sigma(x, L_y, z)] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sigma \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma(x, 0, z)] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avant, on a supposé intuitivement qu'à l'équilibre

que

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} -\nu \frac{\Delta y}{L_y} x \\ \frac{\Delta y}{L_y} y \\ -\nu \frac{\Delta y}{L_y} z \end{bmatrix}$$

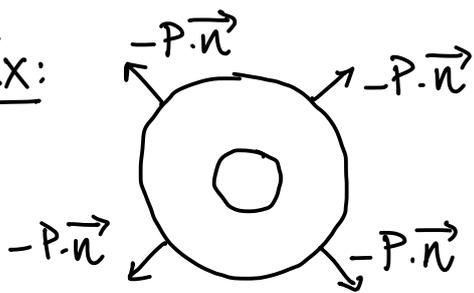
Sans gravité, tout champ linéaire est solution de l'équation de Navier. Donc, s'il vérifie les conditions aux limites, c'est LE champ d'équilibre

Or avec ce \vec{u} , $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix} \frac{\Delta y}{L_y}$ et $[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

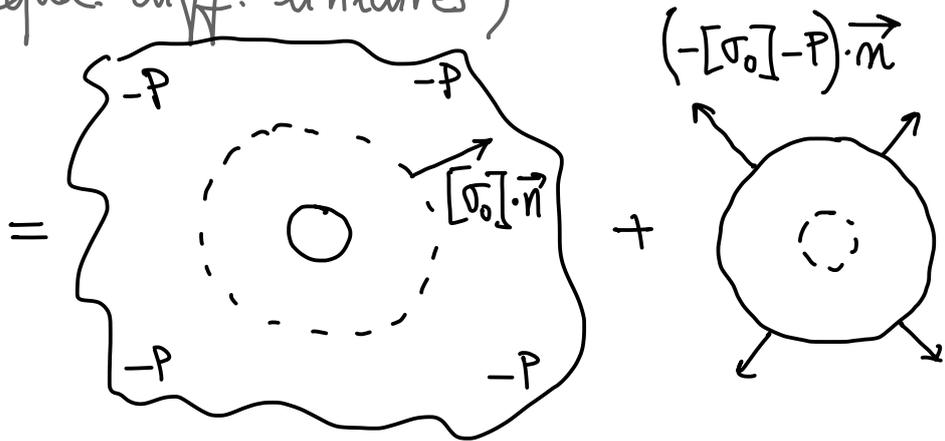
Et $[\sigma]$ vérifie bien les conditions aux limites, donc le \vec{u} intuitif est le bon!

3) Equation linéaire \Rightarrow Principe de superposition (équivalent à la méthode solution générale + solution particulière des équ. diff. linéaires)

Ex:



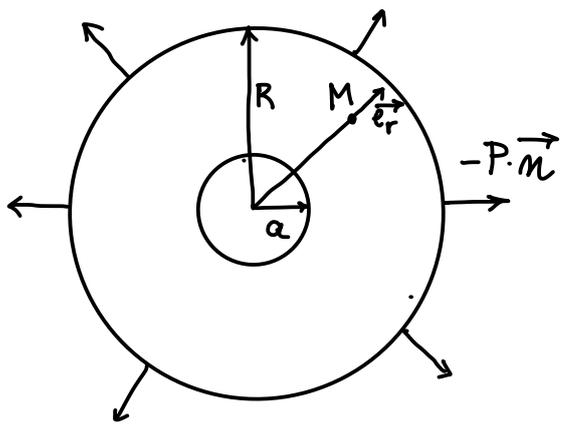
Un trou dans une enceinte sous pression



$$\vec{u}, [\sigma]$$

$$= \vec{u}_0, [\sigma_0] \text{ solution avec un trou dans un milieu infini} + \vec{u}_1, [\sigma_1] \text{ pour corriger les cond. limites}$$

3) Exemple : Concentration de contrainte autour d'un trou



On suppose un trou sphérique (de rayon a) dans une capsule sphérique (de rayon R)

On suppose une pression externe P , interne 0

Quels sont les champs de déplacement et contrainte ?

A cause des symétries, $\vec{u}(\vec{r})$ est radial et

$$\vec{u}(\vec{r}) = u(r) \cdot \vec{e}_r$$

A l'équilibre, en négligeant la gravité

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \vec{u} = \vec{0}$$

or pour un champ radial, $\text{rot } \vec{u} = \vec{0}$
et $\text{rot rot } \vec{u} = \text{grad div } \vec{u} - \Delta \vec{u}$

donc, le problème se ramène à

$$\text{grad div } \vec{u} = \vec{0}$$

avec $\text{div } \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{r} u$

et $\text{grad div } \vec{u} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{r} u \right) \vec{e}_r = \vec{0}$

$$\text{d'où } \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{r} u = \text{Cste} \equiv 3A$$

$$\text{Avec } v = r^2 u, \text{ on a } \frac{\partial v}{\partial r} = 2r u + r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = 3A r^2$$

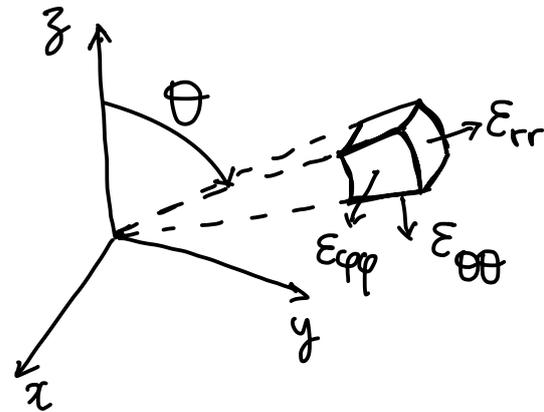
$$\text{d'où } v = A r^3 + B \text{ et}$$

$$u = A r + \frac{B}{r^2}$$

⇒ Tout problème de symétrie radiale admet une solution de cette forme. A, B dépendent des conditions aux limites.

Avec \vec{u} radial, $[\varepsilon]$ est diagonale:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$$



$$\text{avec } \begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = A - \frac{2B}{r^3} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = A + \frac{B}{r^3} \end{cases}$$

$$\text{et } [\sigma] = \frac{E}{1+\nu} \left([\varepsilon] + \frac{\nu}{1-2\nu} \underbrace{(\text{Tr}[\varepsilon])}_{=3A} [\mathbb{1}] \right)$$

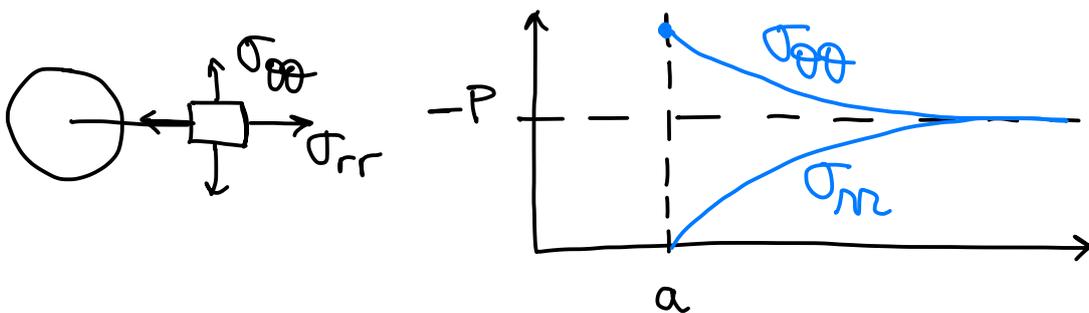
$$\text{donc } \sigma_{rr} = \frac{E}{1+\nu} \left(A - \frac{2B}{r^3} + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot 3A \right) = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} A - \frac{2B}{r^3} \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \dots = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} A + \frac{B}{r^3} \right)$$

• Conditions aux limites :
$$\begin{cases} \sigma_{rr}(a) = 0 \\ \sigma_{rr}(R) = -P \end{cases}$$

Dans la limite $R \gg a$, on a

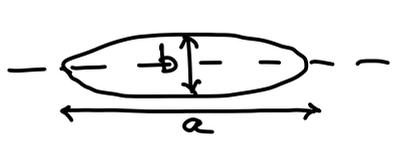
$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r) = -P \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = -P \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \end{cases}$$



\Rightarrow le trou induit une perturbation locale des contraintes (\searrow comme $\frac{1}{r^3}$)

\Rightarrow $\sigma_{\theta\theta}$ augmente près du trou qui concentre les contraintes (analogue à l'effet de pointe en électrostatique)

Pour un trou ellipsoïdal, on trouve à l'extrémité



$$\sigma_{\infty} = (-P) \left(1 + \alpha \frac{a}{b} \right)$$

↳ Constante numérique

⇒ plus le trou est fin, plus il concentre les contraintes

Si on admet qu'une fissure se propage si

$\sigma_{\infty} > \sigma_{\text{crit}}$, on voit que plus une fissure est fine, plus elle est dangereuse

⇒ on fera des trous à ses extrémités

