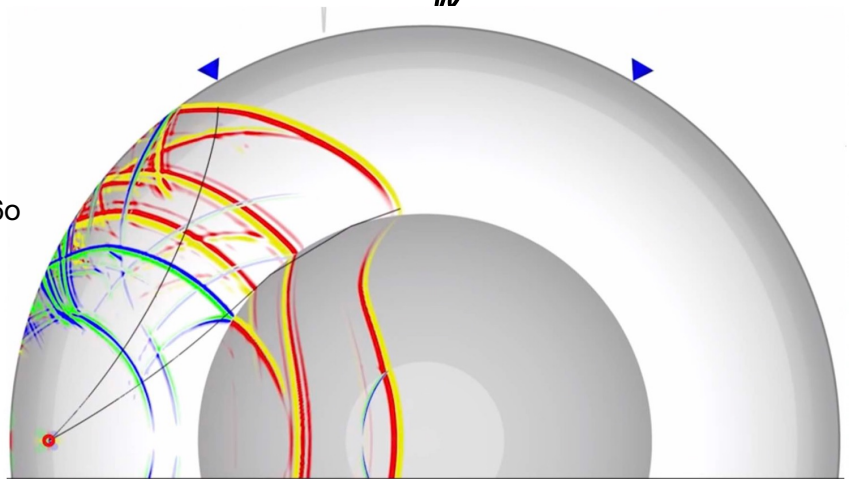


Chap VII - Ondes élastiques

- Jusqu'à maintenant, on a parlé d'équilibre statique. En condition dynamique, une déformation élastique se propage dans un solide à la vitesse du son, comme les ondes de compression dans les gaz.

Par exemple, les ondes sismiques sont des ondes élastiques qui se propagent, rebondissent et/ou sont transmises par les différentes couches terrestres.

<https://www.youtube.com/watch?v=u6-mJ6TCi6o>

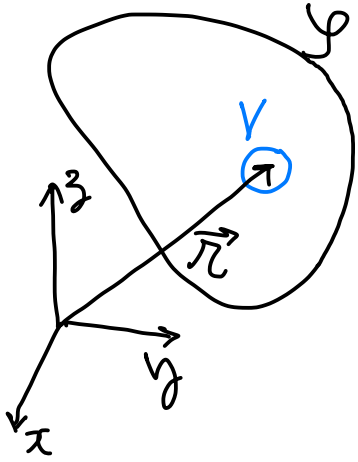


Autre exemple : le boulier de Newton

Nous allons analyser la propagation d'ondes élastiques dans un milieu linéaire, homogène et isotrope



I] Equation de propagation en milieu infini



Soit $\vec{u}_G(t)$, le déplacement du centre de gravité d'un volume élémentaire V .

D'après le PFD :

$$\rho V \ddot{\vec{u}}_G = \int_V \rho \ddot{\vec{u}} dV = \underbrace{\int_V (\text{div} [\sigma] + \rho \vec{g}) dV}_{\text{Force totale sur le volume élémentaire, cf Chap VI}}$$

$$\text{d'où } \int_V (-\rho \ddot{\vec{u}} + \text{div} [\sigma] + \rho \vec{g}) dV = \vec{0}$$

et comme V est arbitraire

$$\boxed{\rho \ddot{\vec{u}} = \text{div} [\sigma] + \rho \vec{g}}$$

• Si le milieu est linéaire isotrope,

$$[\sigma] = \frac{E}{1+\nu} \left([\varepsilon] + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{Tr} [\varepsilon]) [\mathbf{1}] \right)$$

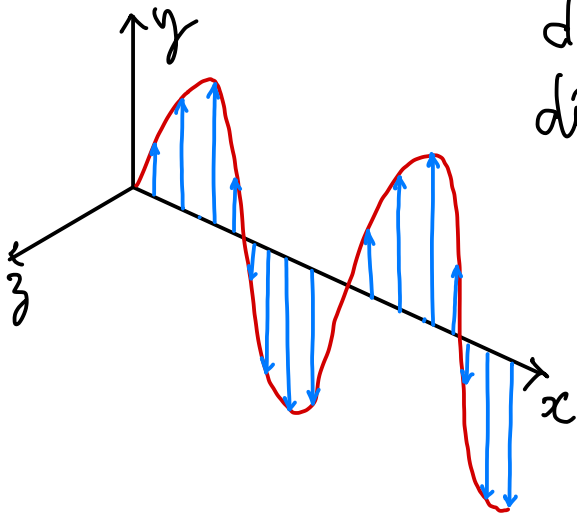
et en refaisant les calculs du chap. précédent

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{u} \right) + \rho \vec{g}$$

Equation dynamique satisfaite par le champ de déplacement $\vec{u}(\vec{r}, t)$

II] Vitesse du son

On considère une onde plane dans le plan (Oxy) , se déplaçant en direction x .



On a :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \begin{bmatrix} u_x(x, t) \\ u_y(x, t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

• Alors $\Delta \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \\ 0 \end{bmatrix}$

, $\text{div} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$ et $\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

• D'après l'équation dynamique sans la gravité, on a :

$$\rho \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\begin{bmatrix} \partial^2 u_x / \partial x^2 \\ \partial^2 u_y / \partial x^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{1-2\nu} \begin{bmatrix} \partial^2 u_x / \partial x^2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

• On a donc 2 équations de propagation d'onde :

- Onde longitudinale : v_x parallèle à la direction de propagation, onde de traction/compression

$$\rho \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$$

- Onde transverse : u_y perpendiculaire à la direction de propagation, onde de cisaillement

$$\rho \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

• Les 2 équations sont de la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

qui admet comme solution pour toutes fonctions régulières f et g

$$u(x,t) = \underbrace{f(x+ct)}_{\text{Onde progressive vers la gauche}} + \underbrace{g(x-ct)}_{\text{Onde progressive vers la droite}}$$

Onde progressive
vers la gauche

Onde progressive
vers la droite

avançant à la vitesse $\pm c$

⇒ les ondes longitudinales et transverses se propagent à des vitesses différentes

$$C_l = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{E}{1+\nu} \frac{1-\nu}{1-2\nu}} = \sqrt{\frac{B + \frac{4}{3}G}{\rho}}$$

d'après les relations entre coefficients élastiques

$$C_t = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{E}{2(1+\nu)}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Rmqs: 1) ces relations sont utilisées pour mesurer expérimentalement les coeff. élastiques

2) les ondes se propagent sans changer de forme (pas de dispersion) dans un milieu élastique; i.e. toute onde, quel que soit sa longueur d'onde, avance à la même vitesse.

Ordre de grandeur:

	C_l (m/s)	C_t (m/s)
Fer	5800	3100
Béton	5000	2700
Caoutchouc	600	80

$$\frac{C_l}{C_t} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} > 1$$

pour $0 < \nu < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \underline{C_l > C_t}$: les ondes de compression se propagent plus vite que les ondes de cisaillement

$\Rightarrow$ En sismologie, les premières secousses correspondent aux ondes p (p pour primae) qui sont des ondes de compression, suivies des ondes s (secundae), ondes de cisaillement

III] Ondes monochromatiques

1) Cas d'un milieu infini

- Comme l'équation de propagation est linéaire, toute onde peut être décomposée (par transformée de Fourier), en la somme d'ondes monochromatiques de la forme

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- On décompose $\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t$ en projetant

$$\vec{u}_0 = \underbrace{\vec{u}_{0,l}}_{\text{Composante } l \text{ parallèle à } \vec{k}} + \underbrace{\vec{u}_{0,t}}_{\text{Composante } t \text{ perpendiculaire à } \vec{k}}$$

$$\left(\vec{u}_{0,l} = \frac{1}{k^2} (\vec{u}_0 \cdot \vec{k}) \cdot \vec{k} \text{ et } \vec{u}_{0,t} = \vec{u}_0 - \vec{u}_{0,l} \right)$$

- Dans un repère où $(0x)$ est selon $\vec{u}_\ell$ (et $\vec{k}$) et $(0y)$ est selon $\vec{u}_t$, on a

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \begin{bmatrix} u_{0\ell} \\ u_{0t} \\ 0 \end{bmatrix} e^{i(kx - \omega t)}$$

et d'après le calcul précédent

$$\ddot{u}_x = c_\ell^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}, \text{ d'où } -\omega^2 u_x = -c_\ell^2 k^2 u_x$$

et

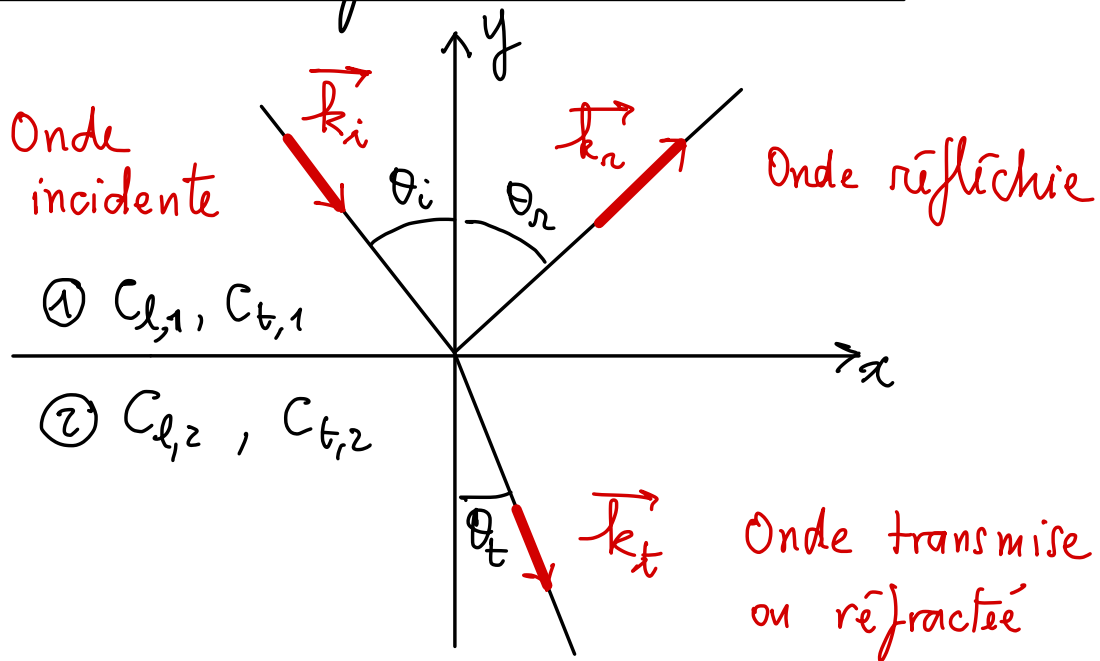
$$k_\ell = \omega / c_\ell$$

$$\ddot{u}_y = c_t^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}, \text{ d'où }$$

$$k_t = \omega / c_t$$

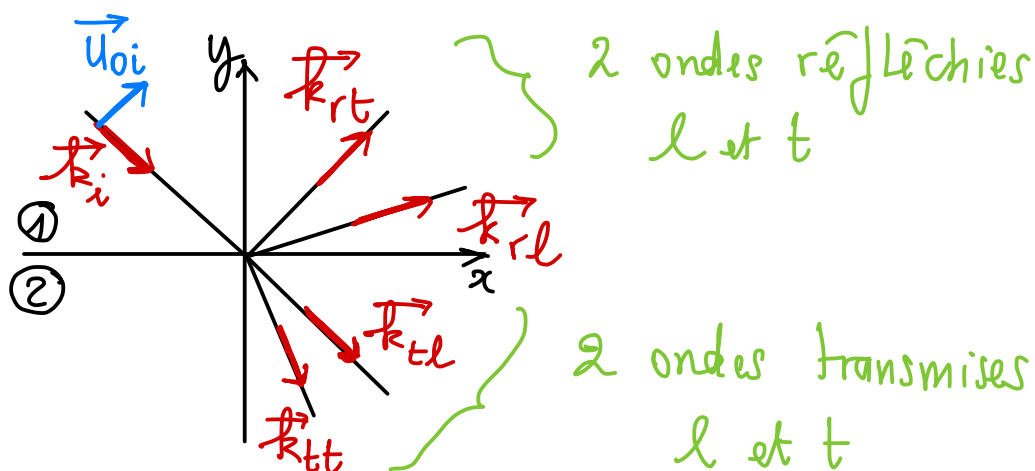
$\Rightarrow$ Pour une pulsation ω donnée, les ondes ℓ et t ont des vecteurs d'onde, et donc des longueurs différentes

2) Cas d'une interface entre 2 milieux



- Sauf si $\vec{k}_i$ est perpendiculaire à l'interface, une onde incidente (l ou t) est transmise ou réfléchiée en une superposition d'ondes l et t

Ex. d'une onde incidente t dans le plan (Oxy)



- La continuité des déplacements dans l'interface ($y=0$) impose $\vec{u}_i + \vec{u}_r = \vec{u}_t$

avec
$$\vec{u}_\alpha = \vec{u}_{\alpha 0} e^{i(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega_\alpha t)}$$

$$\alpha = i, r, t$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \vec{u}_{i0} e^{i(k_{ix}x - \omega_i t)} + \vec{u}_{r0} e^{i(k_{rx}x - \omega_r t)} \\ = \vec{u}_{t0} e^{i(k_{tx}x - \omega_t t)} \end{aligned}$$

$$\forall x, t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_i = \omega_r = \omega_t \\ \text{et } k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} \end{cases}$$

les 3 vecteurs d'onde ont la même composante dans l'interface

donc $k_i \sin \theta_i = k_n \sin \theta_n = k_t \sin \theta_t$

or $k_i = \frac{\omega_i}{c_i}$, $k_n = \frac{\omega_n}{c_n}$, $k_t = \frac{\omega_t}{c_t}$

où c_i, c_n, c_t dépendent de si les ondes sont l ou t

Comme $\omega_i = \omega_n = \omega_t$,

$$\frac{\sin \theta_i}{c_i} = \frac{\sin \theta_n}{c_n} = \frac{\sin \theta_t}{c_t}$$

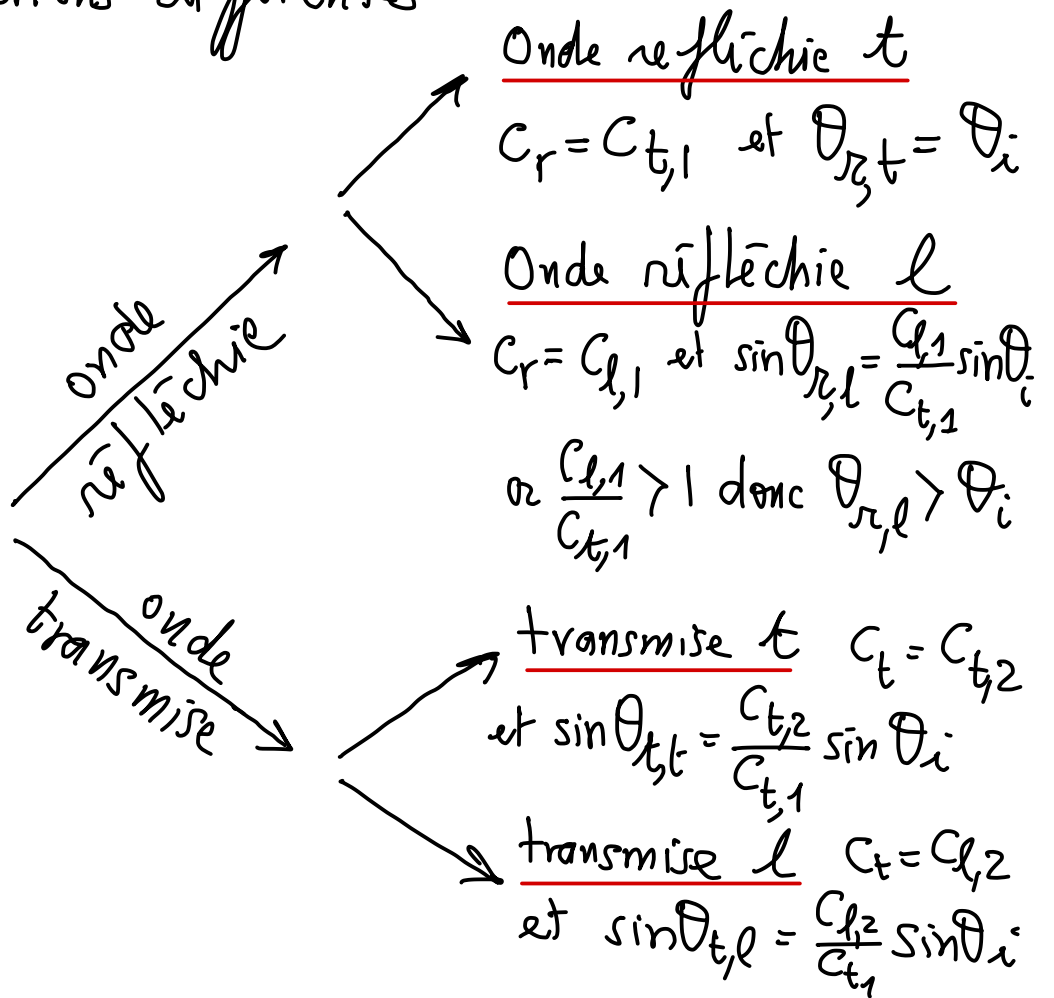
Loi de
Snell -
Descartes

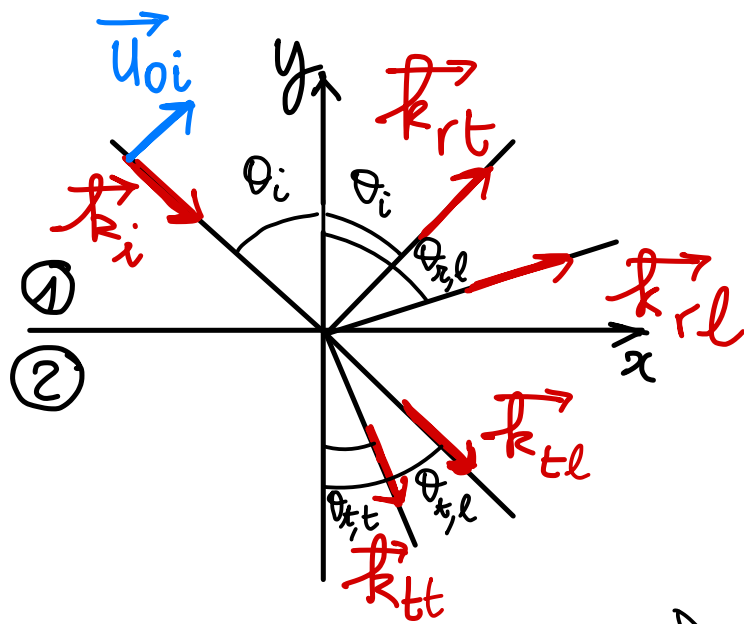
⇒ Les ondes l et t, ayant des vitesses différentes, sont transmises et réfléchies dans des directions différentes

Par exemple,

Pour une onde incidente A

$$c_i = c_{t,1}$$

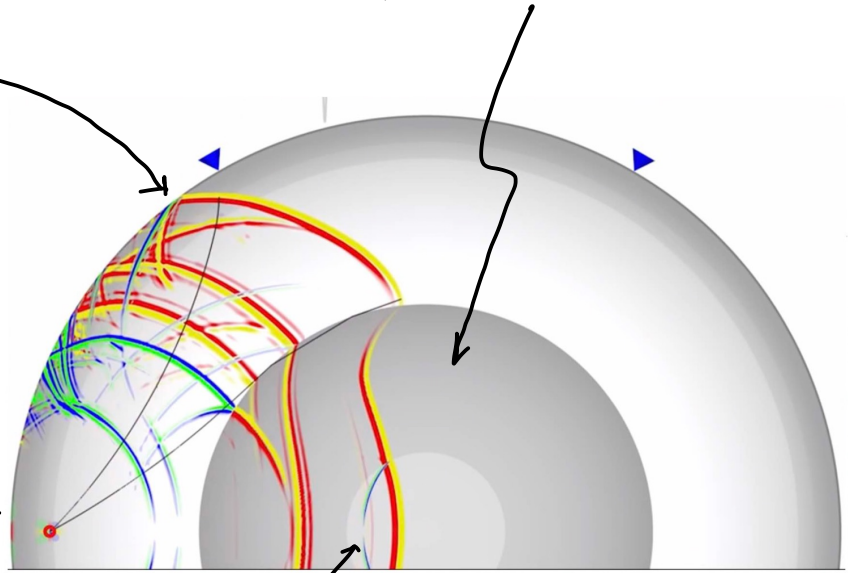




Onde transverse réfléchiée avec un angle différent de l'onde longitudinale

Onde l transmise dans cœur solide en l+t

Dans le noyau liquide, pas d'onde -transverse



- Les amplitudes des ondes réfléchies et transmises, l et t , sont déterminées par les conditions

$$\vec{u}_{oi} + \vec{u}_{or} = \vec{u}_{ot} \quad \left. \vphantom{\vec{u}_{oi} + \vec{u}_{or} = \vec{u}_{ot}} \right\} \text{Continuité des déplacements}$$

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_i(y=0)] \cdot \vec{e}_y + [\sigma_r(y=0)] \cdot \vec{e}_y \\ = [\sigma_t(y=0)] \cdot \vec{e}_y \end{aligned} \right\} \text{Continuité des forces}$$

(6 équations pour les 6 inconnues $\vec{u}_{or}$ et $\vec{u}_{ot}$)