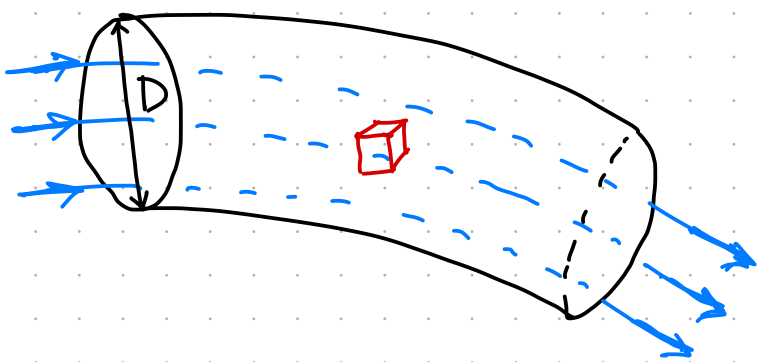
PARTIE III _ Mécanique des Fluides

- On va s'intéresser au comportement des fluides en écoulement (liquides et gaz).
- Comme pour les solides indéformables et élastiques, nous allons considérer :
  - la cinématique : Comment décrire un fluide en écoulement
  - la loi constitutive : Fluide Newtonien
  - la cinétique : Equation de Navier-Stokes

Chap VIII – Cinématique d'un fluide en écoulement

I] Descriptions Eulérienne et Lagrangienne



Comme en élasticité, on va considérer un volume élémentaire, dV, appelé Particule de Fluide, tel que

Distance entre Particules et leur libre parcours $\ll dV \ll$ Dimensions caractéristiques de l'écoulement

- Typiquement $dV \sim (1\,\mu m)^3$
- Une première approche, dite Description Lagrangienne, est analogue à l'élasticité et consiste à suivre les particules de fluide dans leur mouvement :

$$\underbrace{\vec{r}(\vec{r}_0,t)}_{\substack{\text{Position à l'instant } t \\ \text{de la particule en} \\ \vec{r}_0 \text{ à l'instant initial}}} = \underbrace{\vec{r}_0}_{\substack{\text{Position} \\ \text{initiale}}} + \underbrace{\vec{u}(\vec{r}_0,t)}_{\substack{\text{Champ de} \\ \text{déplacement}}}$$

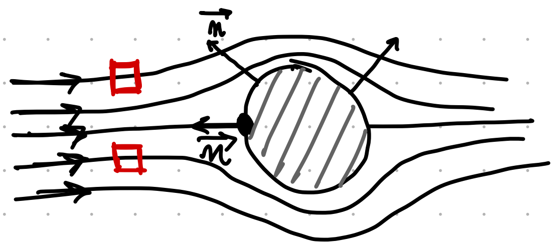
- On en déduit la vitesse Lagrangienne de la particule :

$$\underbrace{\vec{V}(\vec{r_0},t)}_{\substack{\text{Vitesse à } t \text{ de} \\ \text{la particule en} \\ \vec{r_0} \text{ à } t=0}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$ (notée $\vec{V}$ majuscule)

et l'accélération Lagrangienne $\vec{A}(\vec{r_0},t) = \dfrac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$

- Rmq : $\vec{V}(\vec{r_0},t)$ se mesure avec des instruments qui suivent le fluide, ex ballon-sonde

- Mais cette description n'est pas pratique pour les écoulements, surtout pour exprimer les conditions aux limites



Il faudrait imposer $\vec{V}(\vec{r_0},t)\cdot\vec{n} = 0$ quand $\vec{r}(\vec{r_0},t)$ est sur l'obstacle

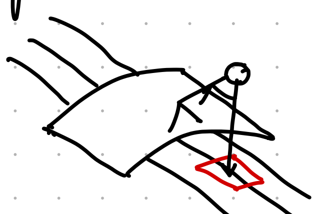
- Une approche mieux adaptée est la description Eulérienne :

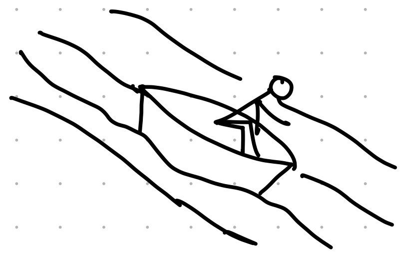
On considère des volumes élémentaires fixes (des "fenêtres"), et on mesure la vitesse des particules qui les traversent au cours du temps.

et on définit :

$\vec{v}(\vec{r},t)$:	Vitesse "Eulérienne" de la particule de fluide en $\vec{r}$ à l'instant t.

- De façon illustrative



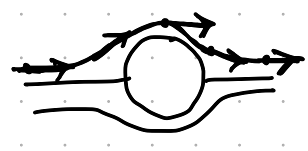


Description Eulérienne : On fixe un volume immobile et on regarde les particules qui le traversent

Description Lagrangienne : On se déplace avec le fluide et on mesure sa vitesse au cours du temps

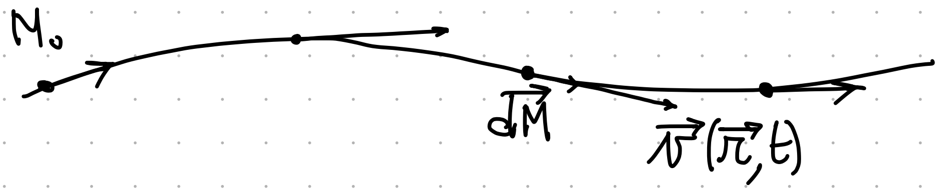
- Rmq : $\vec{v}(\vec{r},t)$ se mesure avec des sondes fixes comme un anémomètre

- Les conditions aux limites s'expriment simplement



$\vec{v}(\vec{r},t)\cdot\vec{n} = \vec{0}$ pour $\vec{r}$ sur l'obstacle.

- La trajectoire est remplacée par la ligne de courant, tangente en tout point à $\vec{v}(\vec{r},t)$ (trajectoire et ligne de courant sont confondues pour un écoulement stationnaire)



- Partant d'un point M_0, un vecteur $\overrightarrow{dM}$ le long de la ligne de courant est tel que

$$\overrightarrow{dM} \wedge \vec{v}(\vec{r},t) = \vec{0}$$

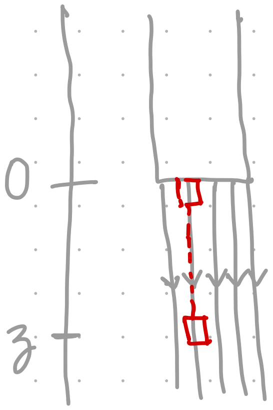
d'où
$$\begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dy\, v_z - dz\, v_y = 0 \\ dz\, v_x - dx\, v_z = 0 \\ dx\, v_y - dy\, v_x = 0 \end{cases}$$

et
$$\boxed{\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}}$$

- On intègre ces relations depuis M_0 pour construire la ligne de courant.

- En régime stationnaire, trajectoire et ligne de courant sont confondues car elles sont toutes 2 parallèles à $\vec{v}(\vec{r})$.

- Exemple de comparaison Eulérien / Lagrangien



Jet d'eau tombant sous l'effet de la gravité.
Une particule de fluide en $z=0$ à $t=0$ a une vitesse $v=0$

Approche Lagrangienne :

$$\begin{cases} A(0,t) = g \\ V(0,t) = gt \\ Z(0,t) = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Accélération, Vitesse et Position à l'instant t de la particule en $z=0$ à $t=0$

Approche Eulérienne : on s'intéresse à $v(z,t)$, vitesse de la particule en z à t

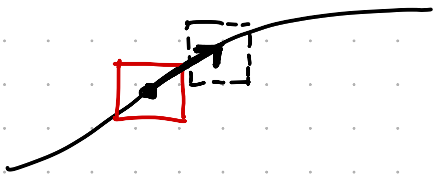
i.e. $v(z,t) = V(0,t)$ avec $z = Z(0,t)$

La particule arrive en z à l'instant $t=\sqrt{\frac{2z}{g}}$ avec la vitesse

$$v(z,t) = g\sqrt{\frac{2z}{g}} = \sqrt{2gz}$$

et le caractère stationnaire de l'écoulement est évident.

II] Accélération Eulérienne



On veut calculer

$\vec{a}(\vec{r},t)$: accélération de la particule en $\vec{r}$ à l'instant t

Pour cela, on doit suivre la particule et calculer sa variation de vitesse entre t et $t+\delta t$

- la particule en $\vec{r}$ à t a une vitesse $\vec{v}(\vec{r},t)$
- En $t+\delta t$, elle est en $\vec{r}\,' \simeq \vec{r} + \vec{v}(\vec{r},t)\,\delta t$ et a une vitesse $\vec{v}(\vec{r}\,', t+\delta t)$

Donc :

$$\begin{aligned}
\delta\vec{v} &= \vec{v}\left(\vec{r}+\vec{v}(\vec{r},t)\,\delta t\ ,\ t+\delta t\right) - \vec{v}(\vec{r},t) \\
&= \vec{v}\left(x+v_x\,\delta t,\ y+v_y\,\delta t,\ z+v_z\,\delta t,\ t+\delta t\right) - \vec{v}(x,y,z,t) \\
&\simeq \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\cdot v_x\,\delta t + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\,v_y\,\delta t + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\,v_z\,\delta t}_{\equiv\ (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\vec{v}\,\cdot\,\delta t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\cdot\delta t
\end{aligned}$$

et $$\boxed{\vec{a}(\vec{r},t) = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\vec{v}}{\delta t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\vec{v}}$$

• On appelle **dérivée totale ou particulaire**

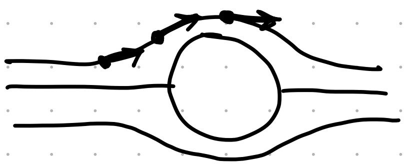
$$\boxed{\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}}$$

$\frac{D\vec{v}}{Dt}$: Variation de $\vec{v}$ en suivant la particule

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$: Dérivée locale

$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$: Effet d'entrainement : variation de $\vec{v}$ à cause des variations dans l'espace du champ de vitesse.
Dérivée convective

• **Rmq** : un écoulement stationnaire est tel que $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ mais $\frac{D\vec{v}}{Dt} \neq 0$ si l'écoulement n'est pas homogène dans l'espace



$\frac{D\vec{v}}{dt} \neq 0$ car les particules sont entrainées dans des régions où $\vec{v}$ varie.

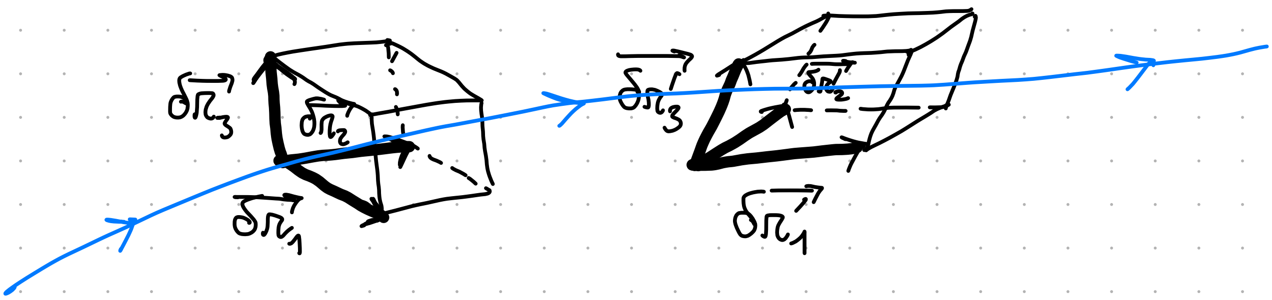
• La dérivée particulaire s'applique à toute grandeur transportée par l'écoulement

par ex, la densité volumique $\rho(\vec{r},t)$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\rho$$

III] Déformation d'une particule de fluide

1) Gradient des vitesses



- Dans l'écoulement, une particule de fluide se déplace, mais aussi se déforme et tourne

Entre t et $t+\delta t$, on a un déplacement

$$\delta\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{v}(\vec{r},t)\,\delta t$$

et donc une arête $\delta\vec{r_i}$ de la particule devient

$$\delta\vec{r_i}' = \left([\mathbb{1}] + [F]\right)\cdot\delta\vec{r_i}$$

avec $[F] = \vec{\nabla}\,\delta\vec{u} = \vec{\nabla}\,\vec{v}\cdot\delta t$

cf Chap sur élasticité

- Comme le fluide est en écoulement continu dans le temps, ce sont les taux de variation qui comptent et

$$\frac{\delta\vec{r_i}' - \delta\vec{r_i}}{\delta t} = \left(\vec{\nabla}\vec{v} \equiv [G]\right)\cdot\delta\vec{r_i}$$

Gradient des vitesses

• Comme en élasticité, on écrit

$$G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{\substack{e_{ij}\text{, symétrique} \\ \text{Taux de déformation}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{\substack{\omega_{ij}\text{, antisym.} \\ \text{Taux de Rotation}}}$$

avec $\mathrm{Tr}[e] = \mathrm{div}\,\vec{v}$: taux de dilatation

et $$[e] = \underbrace{\left(\frac{1}{3}\mathrm{div}\,\vec{v}\right)[\mathbb{1}]}_{\substack{\text{taux de dilation} \\ [t]}} + \underbrace{\left([e] - \left(\frac{1}{3}\mathrm{div}\,\vec{v}\right)[\mathbb{1}]\right)}_{\substack{\text{taux de cisaillement} \\ [d]}}$$

et $$[\omega]\cdot\delta\vec{r} = \vec{\Omega}\wedge\delta\vec{r} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{v}\right)}_{\substack{\text{Vitesse de rotation instant.} \\ \text{ou Vecteur tourbillon}}}\wedge\,\delta\vec{r}$$

d'où $$[G] = [t] + [d] + [\omega]$$

$[t]$: taux de dilatation : matrice diagonale

$[d]$: taux de cisaillement : matrice symétrique de trace nulle

$[\omega]$: taux de rotation : Matrice antisymétrique.

• <u>Rmq :</u> $$\mathrm{Tr}[e] = \frac{1}{dV} \underbrace{\frac{D(dV)}{Dt}}_{}$$

Dérivée particulaire du volume de la particule de fluide

Or comme on suit la particule dans son mouvement, sa masse dm est constante (le nombre de molécules dans la particule est constant, seul son volume change).

D'où $$\mathrm{Tr}[e] = \left(\frac{dm}{dV}\right) \cdot \frac{D(dV/dm)}{Dt} = \rho \frac{D(1/\rho)}{Dt}$$

et $$\mathrm{Tr}[e] = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \mathrm{div}\,\vec{v}$$

Donc $$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\, \mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\rho$$

et $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho\, \mathrm{div}\,\vec{v} - (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\rho$$
$$= -\,\mathrm{div}(\rho \vec{v})$$

On retrouve l'équation de continuité ou bilan de Masse.

2) Cas particuliers

- **Ecoulement incompressible**

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,[e] = \mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \rho(\vec{r},t) = \text{Cste}}$$

C'est une approximation valable lorsque la vitesse de l'écoulement est faible devant la vitesse du son des ondes de pression

D'après le cours d'élasticité, $\delta P = B \dfrac{\delta \rho}{\rho}$ B : module de compressibilité

or on va démontrer plus tard le théorème de Bernouilli $\delta P \sim \rho U^2$ U : vitesse carac. de l'écoulement

d'où $\dfrac{\delta \rho}{\rho} = \dfrac{\rho}{B} U^2 = \left(\dfrac{U}{c}\right)^2$ $c = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}}$, cf chap. sur les ondes élastiques

donc $\underbrace{\dfrac{U}{c}}_{\text{Nombre de Mach}} \ll 1 \Rightarrow \dfrac{\delta \rho}{\rho} \ll 1$

Comme $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$, il existe un potentiel vecteur $\vec{\psi}$ tel que :

$$\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\psi}$$

et pour un écoulement plan, par ex. dans le plan (Oxy), on a

$$\vec{\psi} = \psi(x,y)\,\vec{e_z} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\psi} = \begin{vmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial\psi/\partial y \\ -\partial\psi/\partial x \\ 0 \end{vmatrix}$$

Donc le long d'une ligne de courant,

$$dx\, v_y - dy\, v_x = 0 = -\frac{\partial\psi}{\partial x}dx - \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -d\psi$$

$$\text{donc} \quad \boxed{\psi(x,y) = \text{Cste}}$$

ψ est appelée fonction courant car elle est constante le long d'une ligne de courant

- Ecoulement irrotationnel

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}}$$

les particules de fluide se déforment mais ne tournent pas

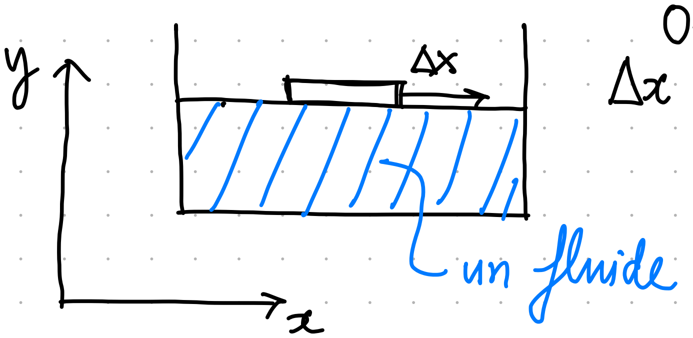
Il existe alors un potentiel φ, tel que

$$\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi}$$

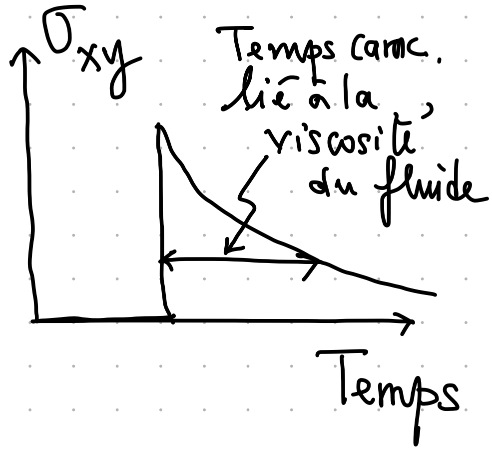
et on parle d'écoulement à potentiel des vitesses, ou simplement écoulement potentiel

IV] Fluide Newtonien

- On peut comprimer un fluide et lui imposer une pression. Par contre, si on impose un cisaillement, le fluide va s'écouler et revenir au repos avec une contrainte de cisaillement nulle



On déplace Δx brusquement



$\Longrightarrow$ Pour induire une contrainte de cisaillement dans un fluide, il faut cisailler continuement et imposer une vitesse de cisaillement :

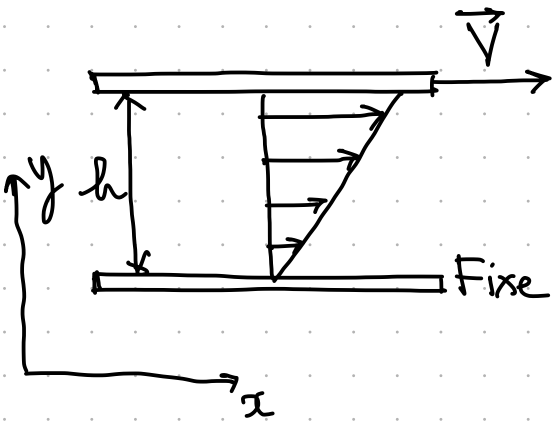
$$\boxed{\sigma_{xy} = \eta \frac{dv_x}{dy}}$$

η ↳ Coefficient de viscosité

Fluide Newtonien :

Contrainte et vitesse de cisaillement sont proportionnelles

- Exemple : Ecoulement de Couette plan



La plaque supérieure se déplace à la vitesse $\vec{V}$ et entraine le fluide :

$$v_x(x,y) = V\frac{y}{h}$$

les couches de fluide glissent à des vitesses différentes et frottent les unes sur les autres entraînant une résistance

et $\sigma_{xy} = \eta \frac{V}{h}$:

- η
  - 10^{12} Glace
  - ⋮
  - 10 Miel
  - 10^{-1} Huile
  - 10^{-3} Eau
  - 10^{-5} Air

η s'exprime en $Pa.s = Po$ Poiseuille

⇒ Très grandes variations entre les gaz, les liquides et les solides (qui, déformés très lentement s'apparentent à des liquides)

Aucun fluide n'est parfaitement Newtonien mais c'est une bonne approximation pour beaucoup de fluides

- Généralisation tensorielle

$$\boxed{[\sigma] = -P[\mathbb{1}] + 2\eta\left([e] - \left(\frac{1}{3}\mathrm{Tr}[e]\right)[\mathbb{1}]\right) + \xi\left(\mathrm{Tr}[e]\right)[\mathbb{1}]}$$

Viscosité de cisaillement

Viscosité de volume

et si le fluide est incompressible, $\mathrm{Tr}[e] = 0$ et

$$[\sigma] = -P[\mathbb{1}] + 2\eta[e]$$