

Chap IX - Fluides Parfaits

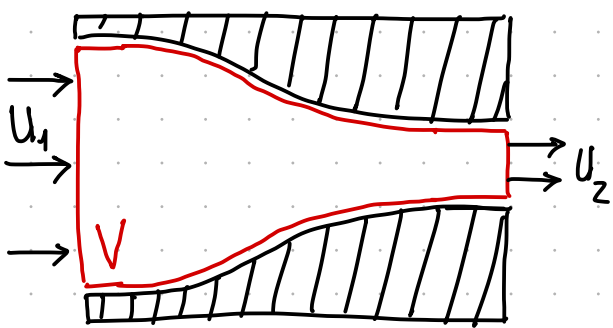
- Fluide parfait = Fluide Newtonien incompressible où les effets de viscosité sont négligeables.
- Cette approximation est valable
 - 1) En régime permanent lorsque le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho UL}{\nu} \gg 1$
 - 2) En régime non-permanent sur des temps courts où la diffusion visqueuse n'a pas le temps d'opérer
- On a alors l'Equation d'Euler (1757)

$$\rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } P + \rho \vec{g}$$

avec $\text{div } \vec{v} = 0$ et $\rho = \text{Cste}$

I] Bilan de quantité de mouvement

- Permet de déterminer des propriétés de l'écoulement (comme la force du fluide sur les parois) sans résoudre l'équation d'Euler.



Un exemple classique : quelle est la force du fluide sur une conduite rétrécissante ?

1) Equation de Conservation

- On considère un volume V fixe. La variation de la quantité de mouvement dans V est

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV \quad \text{car V fixe et } \rho = \text{cte}$$

On d'après l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} - \text{grad } P + \rho \vec{g}$$

qui se ré-écrit

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{div} \left(\rho [\vec{v} \otimes \vec{v}] + P [\mathbb{1}] \right) + \rho \vec{g}$$

Produit diadique $[\vec{v} \otimes \vec{v}]_{ij} = v_i v_j$

Démo : en direction i

$$\text{div}([\vec{v} \otimes \vec{v}])|_i = \sum_j \frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j} = v_i \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$\text{div}(P[\mathbb{1}])|_i = \sum_j \frac{\partial P \delta_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

- Cette équation est de la même forme que le bilan de masse $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \vec{v}) \right)$ avec une variation locale de $\rho \vec{v}$ due à :

1) Flux d'un tenseur d'ordre 2

$$[\pi] = \rho [\vec{v} \otimes \vec{v}] + P [\mathbb{1}]$$

le "tenseur flux de quantité de mouvement"

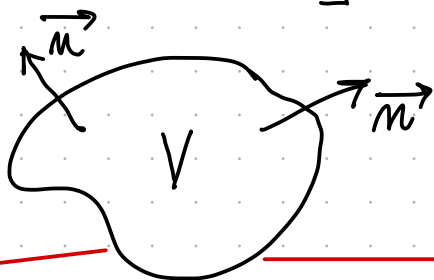
2) Un terme source $\rho \vec{g}$

- Pour V fixe, on a

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = - \int_V \text{div}(\rho [\vec{v} \otimes \vec{v}] + P [\mathbb{1}]) dV + \int_V \rho \vec{g} dV$$

et d'après le théorème de la divergence avec

$$[\vec{v} \otimes \vec{v}] \cdot \vec{n} \Big|_i = \sum_j v_i v_j n_j = v_i (\vec{v} \cdot \vec{n})$$



et \vec{n} la normale sortante à V

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = - \int_S \left(\rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{v} + P \vec{n} \right) dS + \int_V \rho \vec{g} dV$$

Variation locale
 de $\rho \vec{v}$

Effet
 d'entraînement

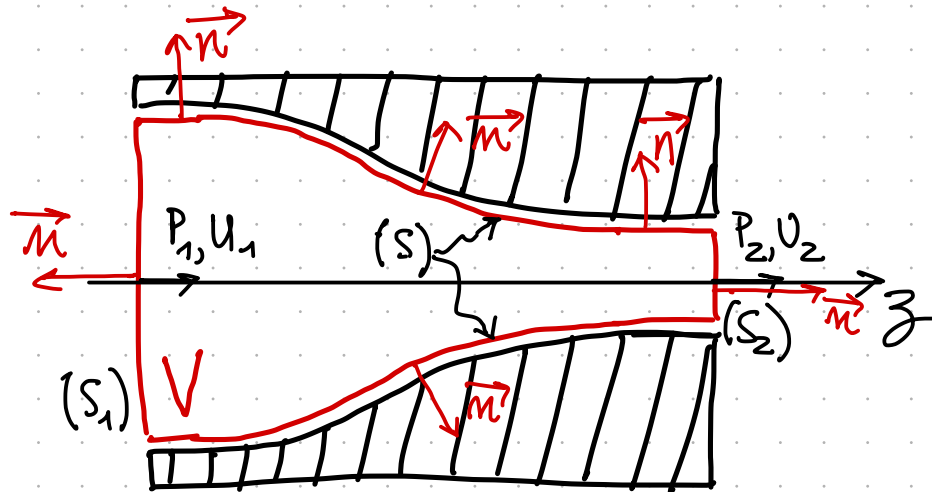
Forces dues
 aux contraintes

Forces
 volumiques

• Et en régime permanent :

$$\int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{v} \, dS + \int_S P \vec{n} \, dS - \int_V \rho \vec{g} \, dV = \vec{0}$$

2) Application à la force imposée par un fluide sur une conduite



- On considère une conduite de révolution parcourue par un fluide parfait (il n'y a pas de forces de frottement sur les parois, seule la pression du fluide agit). On néglige la pesanteur.
- On calcule le bilan de quantité de mouvement au volume V bordé par $(S_1) + (S_2) + (S) \equiv (S_{TOT})$
- Sur (S) , la condition de non-pénétrabilité impose $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ et sur (S_1) et (S_2) , l'écoulement est unidirectionnel et $\vec{v} = U_1 \vec{e}_z$ ou $U_2 \vec{e}_z$

d'où
$$\int_V \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{v} dS = (-\rho U_1^2 S_1 + \rho U_2^2 S_2) \vec{e}_z$$

- la force de la paroi sur le fluide est $\int_{(S)} -P \vec{n} dS$
donc la force du fluide sur la paroi est

$$\vec{F} = \int P \vec{n} dS \quad \left(\begin{array}{l} \text{avec } \vec{n}, \text{ normale} \\ \text{sortante au fluide} \end{array} \right)$$

- Par symétrie, \vec{F} est selon (Oz) et selon cet axe :

$$-\rho U_1^2 S_1 + \rho U_2^2 S_2 + F - P_1 S_1 + P_2 S_2 = 0$$

en (S_1) et (S_2) , comme l'écoulement est unidirectionnel, $P = \text{Cste}$, cf écoulement Couette plan.

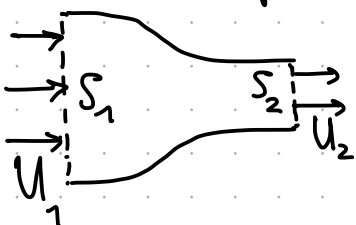
d'où
$$F = (P_1 + \rho U_1^2) S_1 - (P_2 + \rho U_2^2) S_2$$

- D'après le théorème de Bernoulli (cf après),

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2$$

et d'après la conservation de la masse, équivalente à la conservation du débit : $D = \rho U_1 S_1 = \rho U_2 S_2$

- Au final :



$$F = P_1 (S_1 - S_2) - \frac{1}{2} \rho U_1^2 S_1 \left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} - \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \right)^2$$

Pas forcément > 0 !

II] Théorème de Bernoulli

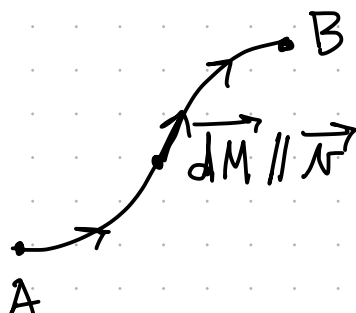
1) Démonstration

- D'après l'équation d'Euler en régime permanent

$$\rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = - \text{grad} P + \rho \vec{g}$$

or on vérifie que $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \wedge \text{rot} \vec{v}$

- Donc en intégrant le long d'une ligne de courant


$$\rho \int_A^B \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cdot d\vec{M} + \int_A^B (\vec{v} \wedge \text{rot} \vec{v}) \cdot d\vec{M}$$

car $d\vec{M} \parallel \vec{v}$

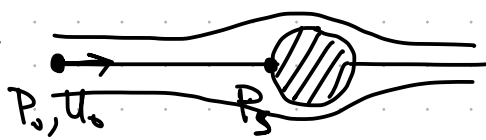
$$= - \int_A^B \text{grad} P \cdot d\vec{M} + \int_A^B \rho \vec{g} \cdot d\vec{M}$$

et $\rho \left(\frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} \right) = - (P_B - P_A) - \rho g (z_B - z_A)$

En régime permanent, le long d'une ligne de courant

$$P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z = \text{Cste}$$

- $P + \rho \frac{v^2}{2}$ s'appelle Pression totale ou Pression de stagnation car



$$P_s = P_0 + \rho \frac{v_0^2}{2}$$

- Pour un écoulement irrotationnel, $\overline{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ et l'équation d'Euler en régime permanent se ré-écrit :

$$\overline{\text{grad}} \left(\frac{\rho v^2}{2} + P + \rho g z \right) = \vec{0}$$

et

$$P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z = \text{Cste dans tout le volume d'un écoulement irrotationnel permanent.}$$

Rmq : le théorème de Bernoulli traduit le bilan de l'énergie cinétique

En utilisant la même technique que pour le bilan de $\rho \vec{v}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= - \text{div} \left(\vec{v} \left(P + \rho \frac{v^2}{2} \right) \right) + \rho \vec{g} \cdot \vec{v} \\ &= - \vec{v} \cdot \overline{\text{grad}} \left(P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z \right) \end{aligned}$$

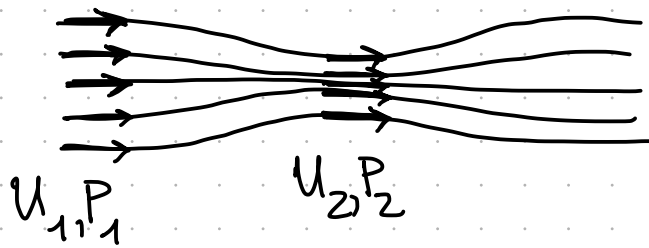
En régime permanent, $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = 0$

et $\nabla \left(P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z \right)$ est perpendiculaire à \vec{v} et

donc constant le long d'une ligne de courant.

2) Exemples d'application

a) Effet Venturi

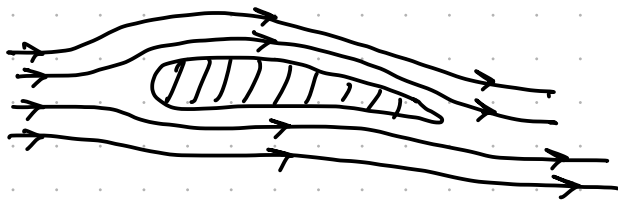


Par conservation du débit, $U_2 = \frac{S_1}{S_2} U_1 > U_1$

$$\text{or } P_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2 \quad \text{donc } P_2 < P_1$$

⇒ Effet Venturi: "P diminue là où v augmente"

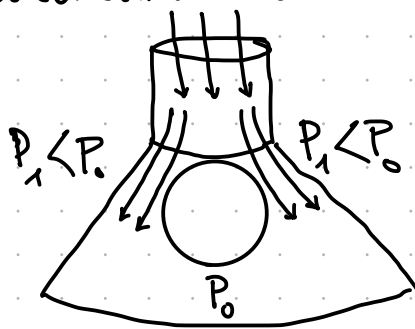
- Effet souvent utilisé pour expliquer la portance d'une aile d'avion. Mais cette explication simple



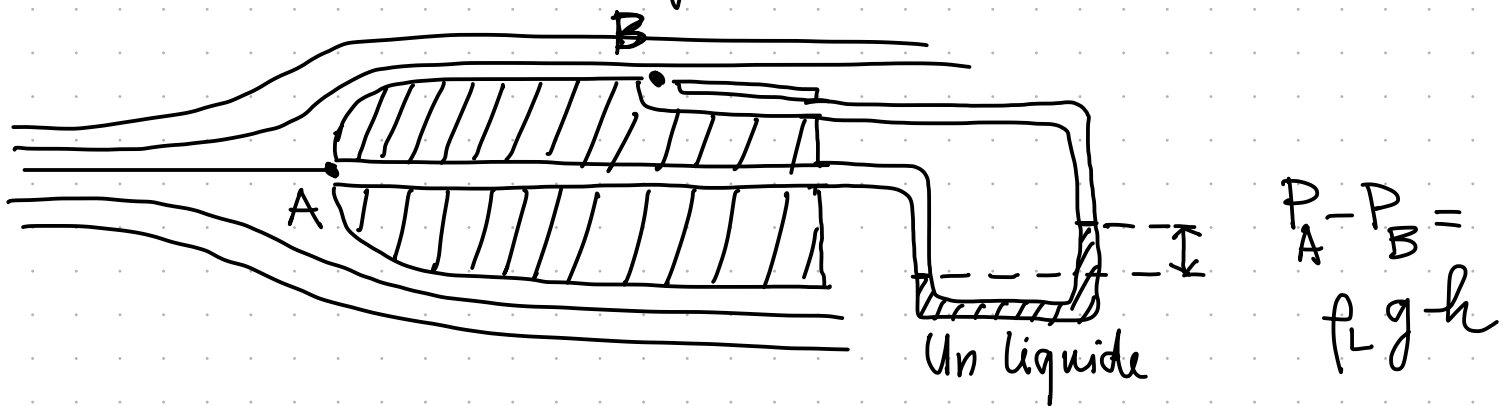
est incomplète car (1) les lignes de courant ne se reforment pas en oval

et (2) il n'y a pas de portance sans circulation (i.e. $\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l} \neq 0$, cf Effet Magnus plus tard)

- Par contre, l'effet Venturi explique la lévitation d'une balle de ping-pong dans un courant descendant dans un entonnoir



b) Tube de Pitot pour mesurer la vitesse d'un fluide

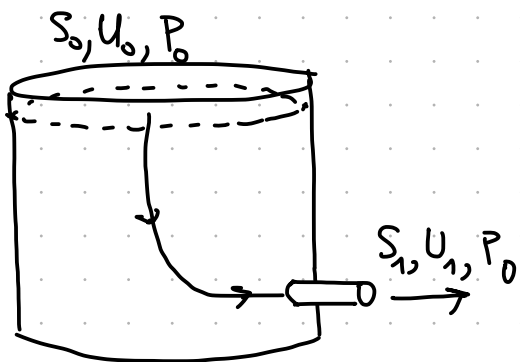


A est un point de stagnation $P_A = P_0 + \frac{1}{2} \rho U^2$

Si la sonde est suffisamment petite, elle ne perturbe pas l'écoulement et $V_B = U$ et $P_B = P_0$

$$\text{d'où } \frac{1}{2} \rho U^2 = \rho_L g h$$

c) Formule de Torricelli



A quelle vitesse sort le fluide?

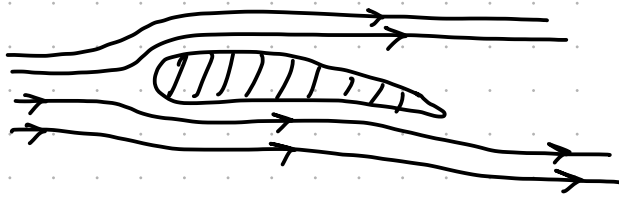
$$\text{On a } U_0 = \frac{S_1}{S_0} U_1 \ll U_1$$

$$\text{et } \cancel{P_0} + \frac{1}{2} \cancel{\rho} U_0^2 + \rho g h = \cancel{P_0} + \frac{1}{2} \rho U_1^2$$

$$U_1 = \sqrt{2gh}$$

d) Effet Coanda (Henri Coanda 1886-1972, père de l'avion à réaction)

- Autour d'une aile d'avion, les lignes de courant pourraient se décoller

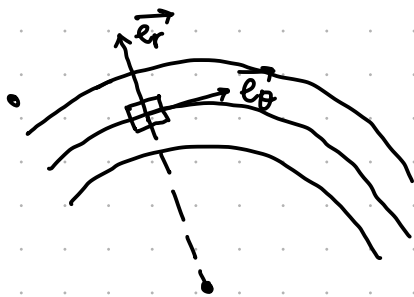


pourraient se décoller

Mais dans la pratique, elles suivent le profil de l'aile.

C'est l'effet Coanda selon lequel "un fluide en écoulement tend à suivre le relief"

- Son origine est encore mal connue mais il vient au moins en partie des forces de frottement qui retiennent les particules à l'interface
- Plein d'effets amusants comme éteindre une bougie derrière une bouteille ou la déflexion d'un jet d'eau par une cuillère.



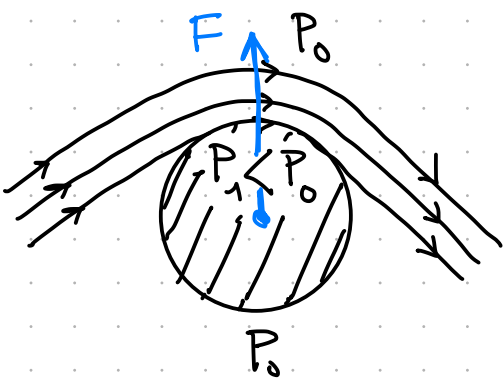
Supposons un écoulement localement circulaire $\vec{v} = v(r) \vec{e}_\theta$

$$\text{et } (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r$$

D'après Euler :
$$-\rho \frac{v^2}{r} \vec{e}_r = -\frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r$$

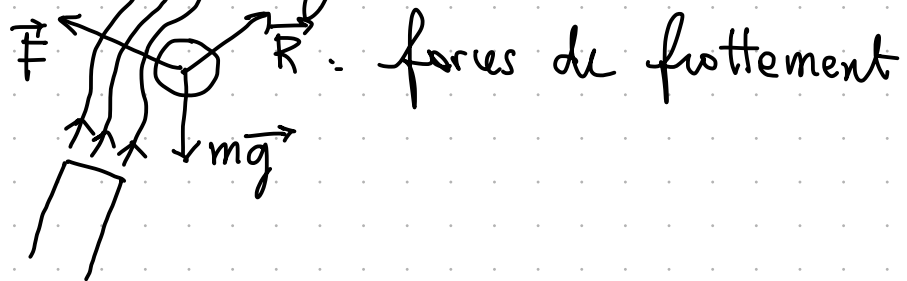
$$\text{et } \frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} \Rightarrow$$

P augmente vers l'extérieur de l'écoulement



D'après Bernoulli, si P augmente vers l'extérieur, v diminue.

Application à la lévitation d'une balle de ping-pong dans un flux d'air incliné



III] Écoulements irrotationnels (permanents)

- Un cas particulier de fluide "plus que parfait" est lorsque, en plus d'être incompressible et non visqueux, un écoulement est aussi irrotationnel avec

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$$

- C'est en fait le cas des exemples discutés jusqu'à maintenant car les écoulements rotationnels implique généralement des tourbillons
- En plus, on va montrer que pour un fluide parfait, un écoulement initialement irrotationnel le reste à jamais (Théorème de Kelvin)

- Comme $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$, il existe un potentiel des vitesses ϕ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ (on parle aussi d'écoulement potentiel) et comme $\text{div } \vec{v} = 0$, ϕ est solution de l'équation de Laplace

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{avec des conditions aux limites du type } \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur les obstacles.}$$

et on montre que ϕ est unique (à une constante près).

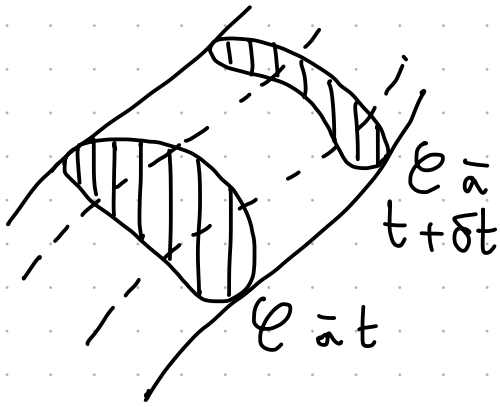
- Inversement, si on connaît ϕ tel que $\Delta \phi = 0$ alors on connaît $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ qui vérifie $\text{div } \vec{v} = 0$ et $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$. Alors avec P donné par le théorème de Bernoulli $P = -\rho \frac{v^2}{2} - \rho g z + \text{cte}$

$$\text{on a } \overrightarrow{\text{grad}} \left(P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \rho \overrightarrow{\text{grad}} \frac{v^2}{2} &= \rho (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} - \cancel{\rho \vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v}} \rightarrow 0 \\ &= -\overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{g} \end{aligned}$$

donc \vec{v} est bien solution de l'équation d'Euler

1) Théorème de Kelvin



Pour toute surface S s'appuyant sur un contour C porté par l'écoulement :

$$\frac{D}{Dt} \int_S (\vec{rot} \vec{v}) \cdot \vec{n} \, ds = \frac{D}{Dt} \int_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$$

Donc si initialement $\vec{rot} \vec{v} = \vec{0}$ dans une zone de l'écoulement, elle le reste dans l'écoulement au cours du temps.

Démo:
$$\frac{D}{Dt} \int_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_C \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{l} + \int_C \vec{v} \cdot \frac{D}{Dt}(d\vec{l})$$

et
$$\int_C \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\rho} \int_C \text{grad}(-P - \rho g z) \cdot d\vec{l} = 0$$

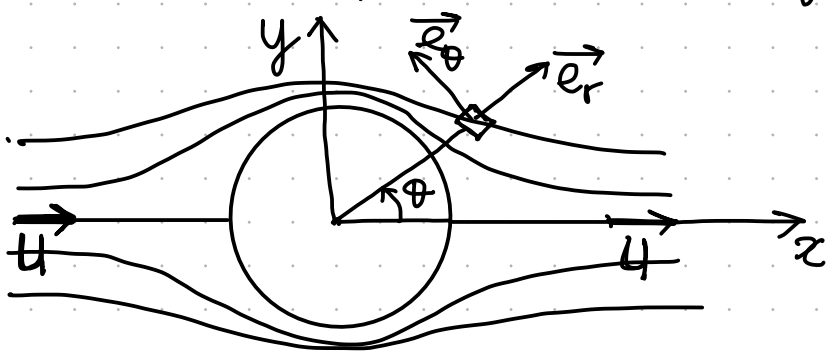
Entre t et $t + \delta t$, $d\vec{l}' = ([1] + [a] \cdot \delta t) d\vec{l}$

donc
$$\frac{D d\vec{l}}{Dt} = \frac{d\vec{l}' - d\vec{l}}{\delta t} = [a] \cdot d\vec{l}$$

et
$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \frac{D d\vec{l}}{Dt} &= \sum_{ij} v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dl_j = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_i^2}{2} \right) \cdot dl_j \\ &= \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

d'où
$$\int_C \vec{v} \cdot \frac{D}{Dt}(d\vec{l}) = \int_C \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cdot d\vec{l} = 0$$

2) Exemple : Cas du cylindre statique



Un cylindre de rayon R dans un écoulement uniforme à l'infini avec $\vec{v} = U \vec{e}_z$

• Sans le cylindre, $\phi_0(r, \theta) = Ux = Ur \cos \theta$

• On cherche une solution de la forme

$$\phi(r, \theta) = \phi_0(r, \theta) + \delta\phi(r, \theta)$$

avec

$$\begin{cases} \Delta \delta\phi = 0 & \text{pour } r > R \\ \delta\phi = \text{cte} = 0 & \text{à l'infini (pour retrouver l'écoulement uniforme)} \\ \vec{\text{grad}}(\delta\phi) \cdot \vec{n} = -\vec{\text{grad}}\phi_0 \cdot \vec{n} = -U \cos \theta & \text{en } r=R \\ & \text{pour avoir } \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$

Le Laplacien en coordonnées cylindriques est

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \delta\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial \theta^2} = 0$$

On cherche une solution de la forme

$$\delta\phi = \sum_n f_n(r) e^{im\theta} \quad \text{avec } f_n \text{ solution de}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f_n}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r} f_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}$$

A cause des conditions aux limites, seul $n=1$ est non nul et par symétrie $\Theta/-\Theta$,

$$\delta\phi = C + \left(Ar + \frac{B}{r}\right) \cos\Theta$$

A l'infini, $\delta\phi = 0 \Rightarrow A = C = 0$

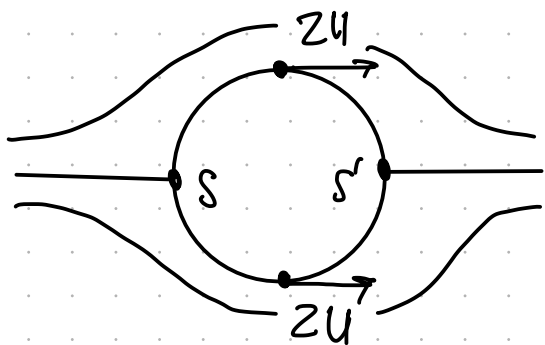
$$\begin{aligned} \text{D'où } \vec{v} = \text{grad } \phi &= \frac{\partial\phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\Theta} \vec{e}_\Theta \\ &= \left(U - \frac{B}{r^2}\right) \cos\Theta \vec{e}_r - \left(U + \frac{B}{r^2}\right) \sin\Theta \vec{e}_\Theta \end{aligned}$$

et $\vec{v} \cdot \vec{e}_r = 0$ en $r = R$ d'où $B = UR^2$

$$\vec{v} = U \left(\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos\Theta \vec{e}_r - \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin\Theta \vec{e}_\Theta \right)$$

et grâce au théorème de Bernoulli, on connaît P en tout point :

$$P_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 = P + \frac{1}{2} \rho v^2$$

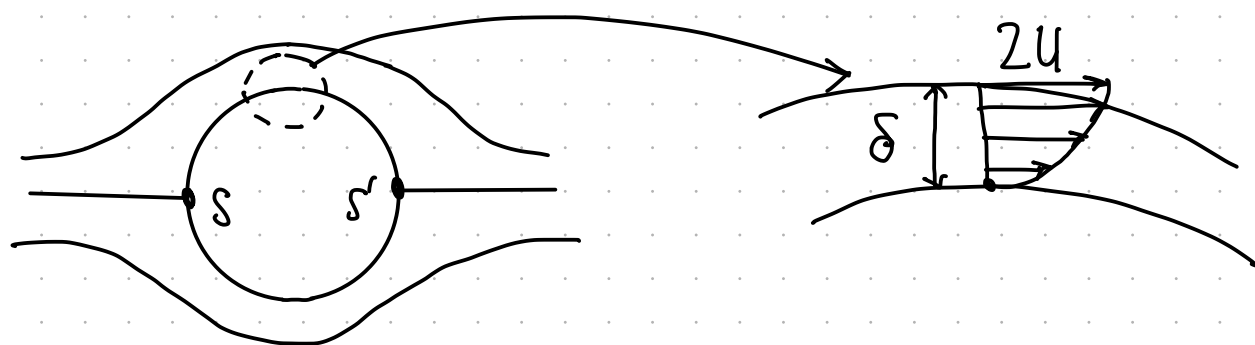


Il y a 2 points de stagnation et on retrouve l'augmentation de vitesse sur les côtés attendue par la conservation du débit.

$$P_s = P_{s'} = P_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 : \text{Pression de stagnation}$$

- Notons que sur l'obstacle, $\vec{v} = -2U \sin \theta \vec{e}_\theta \neq \vec{0}$ car sans viscosité, le fluide peut glisser librement le long du cylindre.

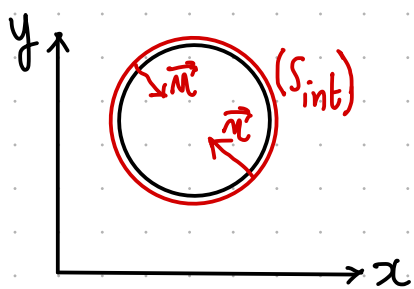
Physiquement, il existe une zone d'épaisseur réduite, dite couche limite, où la vitesse passe de 0 à une vitesse de l'ordre de U .



Dans la couche limite, d'épaisseur δ faible, $Re = \frac{\rho U \delta}{\eta} \ll 1$ et la viscosité ne peut être négligée.

L'approximation de fluide parfait n'est valable que hors de la couche limite.

3) Force sur le cylindre : Paradoxe de d'Alembert



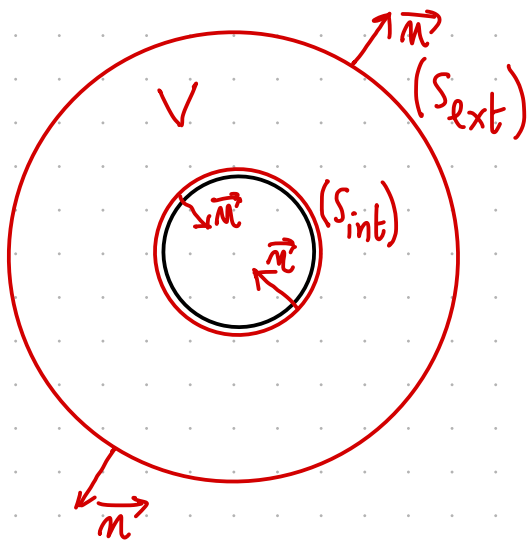
$$\vec{F} = \int_{(S_{int})} P \vec{m} dS \quad (\text{avec } \vec{m}, \text{ normale sortante au fluide})$$

$$\text{avec } P = P_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{1}{2} \rho v^2(r, \theta)$$

On appelle F_x , la traînée
 F_y , la portance

On par symétrie $P(\theta) = P(-\theta) = P(\pi - \theta) = P(\pi + \theta)$

et $\vec{F} = \vec{0}$



On retrouve le même résultat en utilisant le bilan de quantité de mouvement :

$$\int_{(S_{int})} \rho (\vec{r} \cdot \vec{n}) \vec{v} dS + \int_{(S_{ext})} \rho (\vec{r} \cdot \vec{n}) \vec{v} dS + \int_{(S_{int})} P \vec{n} dS + \int_{(S_{ext})} P \vec{n} dS = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= \vec{F}}$

d'où $\vec{F} = - \int_{(S_{ext})} \rho (\vec{r} \cdot \vec{n}) \vec{v} dS - \int_{(S_{ext})} P \vec{n} dS$

Les intégrales ne dépendent pas de (S_{ext}) . Donc on peut choisir un cylindre de rayon $R' \rightarrow \infty$

Comme $\delta r_x \sim \frac{1}{R'^2}$, les intégrales impliquant

r_x décroissent comme $\int \frac{1}{R'^2} \cdot R' d\theta \sim \frac{1}{R'} \xrightarrow{R' \rightarrow \infty} 0$

$$F_x = F_y = 0$$

\Rightarrow

En l'absence de frottement, le fluide parfait n'impose pas de force sur l'obstacle

- Ceci reste vrai pour un obstacle de forme quelconque, en 2D et en 3D

⇒ Une aile d'avion n'a pas de portance dans un fluide parfait (sans) s'il y a une circulation non nulle, cf après)

- Réciproquement, un fluide parfait n'oppose pas de résistance au déplacement d'un objet

4) Ecoulement avec circulation



- Supposons maintenant que le cylindre tourne sur lui-même et entraîne le fluide au travers de la couche limite. On a alors une circulation

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

qui s'ajoute à la condition aux limites $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sur \mathcal{C} .

- Remq: on peut toujours avoir $\vec{n} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ sur \mathcal{C} autour l'obstacle, pas le fluide.

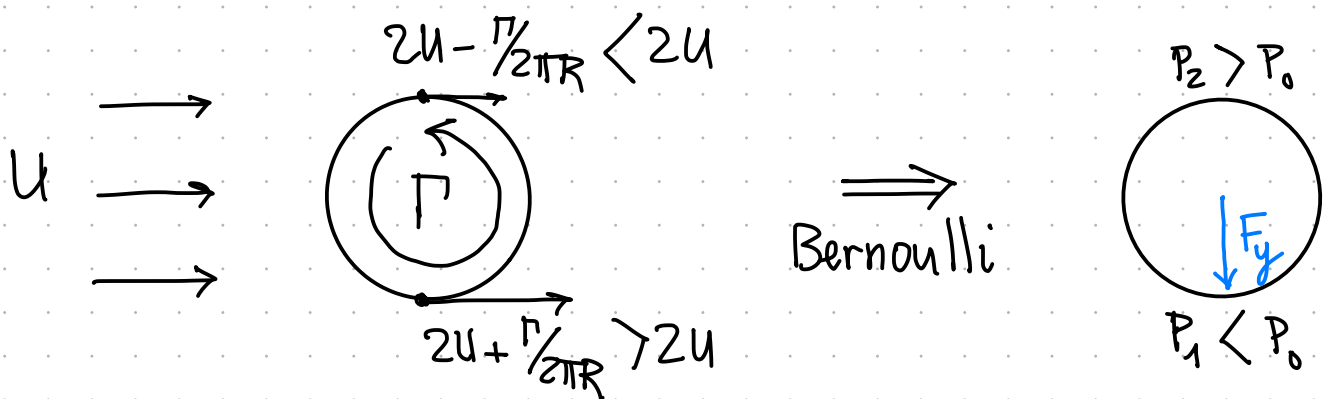
- le nouveau champ de vitesse est obtenu en rajoutant un champ de type tourbillon :

$$v_r = U \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos\theta \quad v_\theta = -U \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

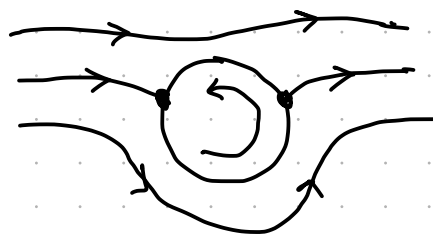
En reprenant les calculs précédents, on a

$$F_x \text{ (trainée)} = 0 \quad \text{et} \quad F_y \text{ (portance)} = -\rho U \Gamma \neq 0$$

C'est l'effet Magnus, qui explique la trajectoire des balles en rotation

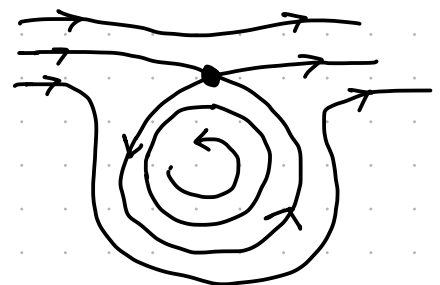


- Rmq 1)



$$|\Gamma| < 4\pi UR$$

2 points de stagnation sur le cylindre



$$|\Gamma| > 4\pi UR$$

1 point de stagnation hors du cylindre et des boucles fermées de courant autour de C

- La théorie de Kutta - Joukowski (début du 20^e siècle) explique la portance de l'aile d'avion par une circulation non nulle autour de l'aile.