

Chap XI Écoulements à faible Reynolds

• On s'intéresse au cas où $Re = \frac{\rho UL}{\eta} \ll 1$

– Fluides visqueux et/ou solides en écoulement lent:

Par exemple, on étale du miel sur une tartine

$$Re = \frac{1.4 \cdot 10^3 \times 10^{-2} \text{ m/s} \times 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{10^3} \approx 10^{-4}$$

Ou l'écoulement d'un glacier

$$Re = \frac{0.9 \cdot 10^3 \times 1 \text{ m/an} \times 100 \text{ m}}{10^{13}} \approx 10^{-13}$$

– Déplacement d'objets microscopiques

Par ex, une bactérie dans l'eau

$$Re = \frac{10^3 \times 10 \text{ } \mu\text{m/s} \times 1 \text{ } \mu\text{m}}{10^{-3}} \approx 10^{-5}$$

Pour un humain, $L = 1 \text{ m}$, $U = 1 \text{ m/s}$,
 $Re = 10^{-5}$ correspond à se déplacer dans un
fluide de viscosité dynamique $\frac{\eta}{\rho} = 10^5$,
i.e. du beurre de cacahuète!

• La viscosité l'emporte sur l'inertie et par ex. si une bactérie arrête son mouvement, sa vitesse s'annule en environ 1s.

I] Equation de Stokes

1) Propriétés de l'équation

On a
$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \eta \Delta \vec{u} - \vec{\text{grad}} P + \rho \vec{g} \\ \text{avec } \text{div } \vec{u} = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \text{div} [\sigma] + \rho \vec{g}$$

$$\text{avec } [\sigma] = -P [\mathbf{1}] + 2\eta [\mathbf{e}]$$

et donc en régime permanent

$$\boxed{\text{div} [\sigma] + \rho \vec{g} = 0}$$

⇒ En régime permanent, le fluide visqueux est en équilibre mécanique (ce qui n'est pas le cas à $Re \gg 1$ à cause du terme d'entraînement) par rapport aux conditions aux limites

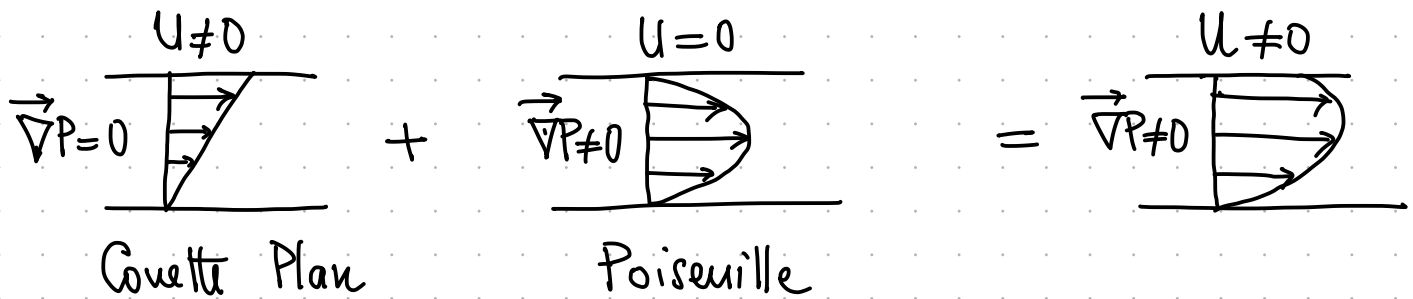
⇒ Si on déplace un obstacle suffisamment lentement pour rester en quasi-équilibre, le mouvement du fluide est réversible (Expérience de G.I. Taylor)



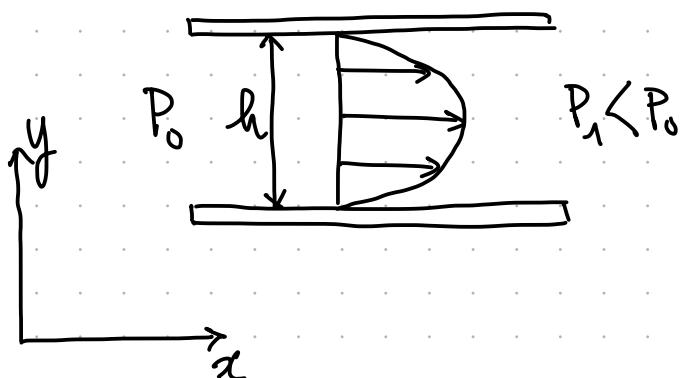
• Autres propriétés :

1) Unicité de la solution

2) Additivité des solutions



2) Exemple simple : Écoulement de Poiseuille Plan



Un fluide visqueux entre 2 plaques fixes. Un écoulement est induit par une différence de pression

$$\frac{\partial P}{\partial x} = - \frac{P_0 - P_1}{L} = - \frac{\Delta P}{L}$$

• On a $\vec{v} = v_x(y) \vec{e}_x$ ($\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$) et

$$\vec{\text{grad}} P = \begin{pmatrix} \partial P / \partial x \\ \partial P / \partial y \\ 0 \end{pmatrix} = \eta \Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, P est constant dans l'épaisseur

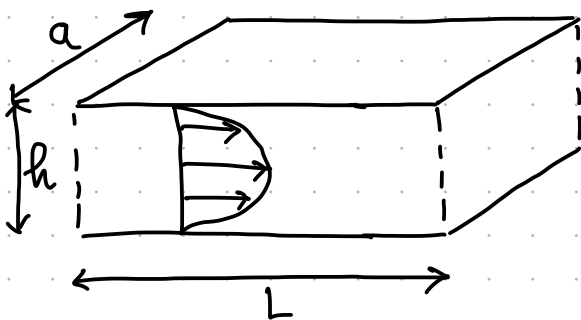
$$\text{et} \quad \underbrace{\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}_{\text{Fonction de } y} = \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_{\text{Fonction de } x}$$

Ceci n'est possible que si les 2 sont constantes
d'où :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = - \frac{\Delta P}{L} \quad \text{et} \quad P(x) = P_0 - \frac{\Delta P}{L} x$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = - \frac{\Delta P}{\eta L} \quad \text{et} \quad v_x(y) = \frac{\Delta P}{8\eta L} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)$$

$$\text{avec} \quad v_x\left(\pm \frac{h}{2}\right) = 0$$



Profil parabolique des vitesses

• Le débit pour une profondeur a :

$$D = a \int_{-h/2}^{h/2} v_x(y) dy = \frac{\Delta P}{L} \frac{a h^3}{12 \eta}$$

Variation
non-linéaire
selon h

Rmq: Pour un cylindre, on a

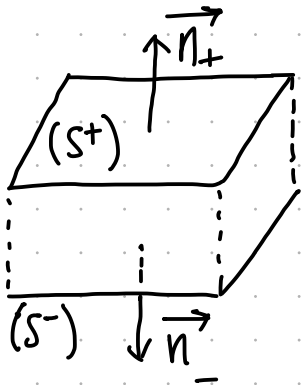


$$v_x(r) = \frac{\Delta P}{L} \frac{R^2}{4\eta} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

et $D = \frac{\Delta P}{L} \frac{\pi}{8\eta} R^4 \propto S^2$ Loi de Poiseuille

⇒ le débit dans un tube de surface $2S$ est 2 fois plus grand que dans 2 tubes de surface S , conséquence des forts gradients de vitesse sur les bords.

• Force de frottement du liquide sur les parois :



$$\vec{F} = - \int_{(S_+) + (S_-)} [\sigma] \cdot \vec{n} dS$$

car $[\sigma]$ est la contrainte appliquée au fluide

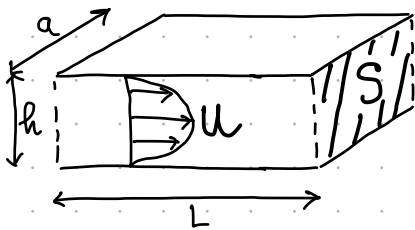
normale sortante au fluide

$$\vec{F} = + \int_{(S_+) + (S_-)} P \vec{n} dS - \int_{(S_+) + (S_-)} 2\eta [e] \cdot \vec{n} dS$$

car P constant dans l'épaisseur et donc identique en (S_+) et (S_-)

$$[\sigma'] = 2\eta [e] = \eta \begin{bmatrix} 0 & \partial v_x / \partial y & 0 \\ \partial v_x / \partial y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } [\sigma'] \cdot \vec{n}_{+/-} = \eta \begin{bmatrix} \pm \partial v_x / \partial y (\pm h/2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{\Delta P}{L} \frac{h}{2} \vec{e}_x$$



$$\vec{F} = \cancel{\eta} \frac{\Delta P}{\cancel{\eta}} \frac{h}{2} a \cdot \vec{e}_x = \Delta P \cdot S \vec{e}_x$$

(que l'on retrouve par un bilan de quantité de mouvement).

- On définit un coefficient de frottement sans dimension C_d en normalisant F par une pression dynamique

$$P_{\text{dyn}} = \frac{1}{2} \rho U^2 \quad \text{avec} \quad U = v_x|_{\text{max}} = \frac{\Delta P}{L} \frac{h^2}{8\eta}$$

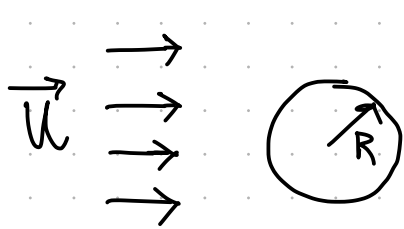
$$C_d = \frac{|F|}{\frac{1}{2} \rho U^2 S} = \frac{\Delta P \cdot S}{\frac{1}{2} \rho U^2 \cdot S} = \frac{8\eta L U}{\frac{1}{2} \rho h^2 U^2} = 16 \underbrace{\frac{\eta}{\rho h U}}_{1/Re} \cdot \frac{L}{h}$$

$$\Rightarrow C_d \propto \frac{1}{Re} \quad \text{caractéristique des fluides visqueux}$$

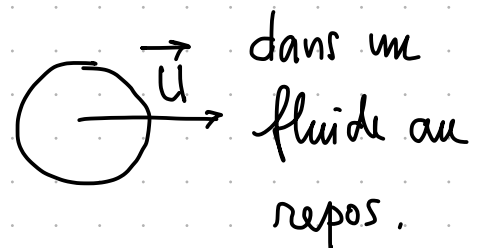
II] Sphère dans un écoulement uniforme

1) Formule de Stokes

- On veut calculer la force de frottement d'un liquide en écoulement sur une sphère immobile ou, de façon équivalente, la force de résistance pour déplacer une sphère dans un liquide au repos, i.e., la force de traînée



ou, de façon
équivalente au
signe de $\vec{U}$ près



- On cherche $\vec{v}$ et P telles que

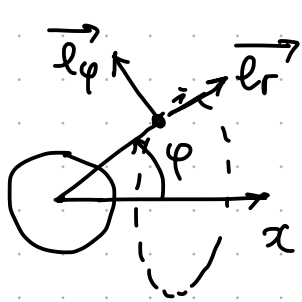
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grad } P = \eta \Delta \vec{v} \quad \text{et } \text{div } \vec{v} = 0 \\ \text{avec } \vec{v}(r=R) = U \vec{e}_x \\ \vec{v}(r \rightarrow \infty) = \vec{0} \end{array} \right.$$

Le calcul est détaillé dans "Hydrodynamique Physique" d'E. Guéon. Le point de départ est

$$\begin{aligned} \text{div grad } P &= \eta \underbrace{\text{div } \Delta \vec{v}}_{= \Delta \text{div } \vec{v} \rightarrow 0} \\ &= \Delta \text{div } \vec{v} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

On cherche donc P , solution de $\Delta P = 0$
 Puis on répond

$$\Delta \vec{w} = \frac{1}{\eta} \text{grad } P$$

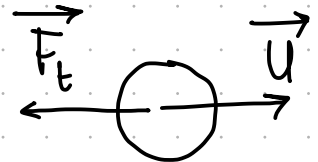


$$\begin{cases} v_r(r, \varphi) = U \cos \varphi \left(\frac{3R}{2r} - \frac{R^3}{2r^3} \right) \\ v_\varphi(r, \varphi) = -U \sin \varphi \left(\frac{3}{4} \frac{R}{r} + \frac{R^3}{4r^3} \right) \end{cases}$$

et
$$\vec{F} = - \int_{(S_{int})} [\sigma] \cdot \vec{n} dS = \int_{(S_{int})} P \vec{n} dS - 2\eta \int_{(S_{int})} [e] \cdot \vec{n} dS$$

Par symétrie, la portance $F_y = 0$.

Par contre, la traînée :



$$\vec{F}_t = -6\pi\eta R \vec{U}$$

Formule de Stokes

Comme pour le fluide parfait, on retrouve le même résultat avec un bilan de quantité de mouvement

$$\vec{F} = - \int_{(S_{ext})} [\sigma] \cdot \vec{n} dS = -2\eta \int_{(S_{ext})} [e] \cdot \vec{n} dS$$

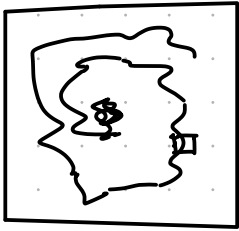
mais $v \propto \frac{1}{r}$ d'où $[e] \propto \frac{1}{r^2}$ et

$$F_t \propto \int \frac{1}{R'^2} \cdot R'^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = \text{Cste} \quad \text{quand } R' \rightarrow \infty$$

et
$$C_d = \frac{6\pi\eta R v}{\frac{1}{2} \rho v^2 \pi R^2} = \frac{12}{Re}$$

On retrouve la dépendance de C_d en $1/Re$

2) Application à l'équation de Langevin



Expérience historique de Jean Perrin :
Diffusion de grains de pollen
à la surface d'un réservoir d'eau

le mouvement erratique vient de 2 forces :

- Une force aléatoire $\vec{F}_{th}$ due aux chocs avec le fluide
- Une force visqueuse de résistance de l'eau au déplacement des grains

d'où une équation du mouvement

$$M \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}_{th} - 6\pi\eta R \vec{v}$$

et l'amplitude de $\vec{F}_{th}$ est fixée pour satisfaire l'équipartition de l'énergie

$$\frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T.$$