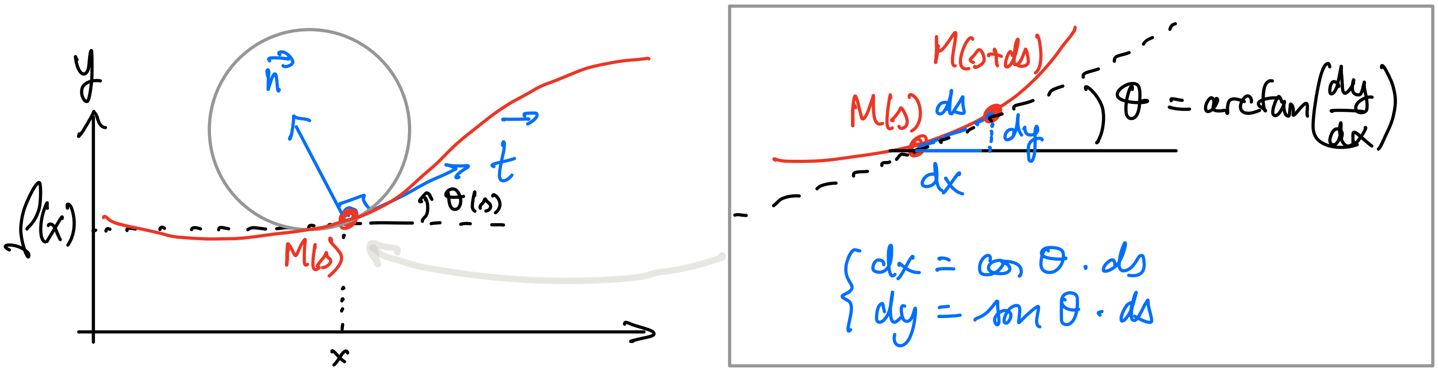
Complément sur le rayon de courbure



- Soit la courbe $y = f(x)$. On note $\vec t$ le vecteur unitaire tangent à la courbe en $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$: $\vec t = \dfrac{1}{\sqrt{1+f'^2_{(x)}}} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$

- On note $\theta(s)$ l'angle entre $\vec t$ et l'axe (Ox) et s une abscisse curviligne le long de la courbe de sorte que :
$$\vec t_{(s)} = \begin{pmatrix} \cos\theta(s) \\ \sin\theta(s) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{dy}{dx} = \tan\theta(s)$$

- En dérivant $\vec t$ par rapport à s : $\dfrac{d\vec t}{ds} = \dfrac{d\theta}{ds} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta(s) \\ \cos\theta(s) \end{pmatrix}$

  soit $\boxed{\dfrac{d\vec t}{ds} = \dfrac{1}{R(s)} \cdot \vec n}$ où $\vec n$ = vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec t$

  et $\boxed{\dfrac{1}{R(s)} = \dfrac{d\theta}{ds}}$ est la courbure en s (par définition)

  ($R(s)$ = rayon de courbure)

  (= rayon du cercle osculateur à la courbe en $M(s)$)

- Comme $\theta = \arctan f'(x)$, $\dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{dx}{ds} \cdot \dfrac{f''(x)}{1+f'^2_{(x)}}$

  (et $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$)

  Or $dx = ds \cdot \cos\theta \Rightarrow \dfrac{dx}{ds} = \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+f'^2_{(x)}}}$

D'où $$\boxed{\frac{1}{R(s)} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{f''(x)}{\left(1+f'^2(x)\right)^{3/2}}}$$

- N.B. 1) $R(s)$ est algébrique : positif si concavité tournée vers le haut

(dans le problème de la flexion d'une poutre vu en cours, on veut $R>0$ d'où un signe "$-$")

2) pour de faibles déformations, $f'(x) \ll 1$

d'où $\frac{1}{R(s)} \simeq f''(x)$

(et dans les notations du cours : $\frac{1}{R(x)} = -\frac{d^2Y}{dx^2}$)