Compliments Chap VI

I] Conditions de compatibilité

- Le tenseur de déformation $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$

  a 6 degrés de liberté, alors que le champ de déplacement $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ n'a que 3 degrés de liberté.

  $\Rightarrow$ Un tenseur symétrique ε_{ij} ne s'écrit pas forcément $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

- On montre qu'il existe $\vec{u}$ tel que
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$
si et seulement si
$$\forall ijkl, \quad \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} = \varepsilon_{il,jk} + \varepsilon_{jk,il} \qquad (1)$$
avec $\varepsilon_{ik,jl} \triangleq \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l}$ Conditions de Compatibilité

Rmq : il n'y a en fait que 3 relations non-triviales de la forme
$$\varepsilon_{ii,jj} + \varepsilon_{jj,ii} = 2\,\varepsilon_{ij,ij}$$
car, sur les 4 coefficients $i\,j\,k$ et l, au moins 2 sont égaux (car $i,j,k,l \in [x,y,z]$) d'où par ex. si $j = i \neq k \neq l$, (1) devient
$$\varepsilon_{ik,il} + \varepsilon_{il,ik} = \varepsilon_{il,ik} + \varepsilon_{ik,il}$$
qui est évident.

De même si $k = j = i \neq l$ et $k = j = i = l$

Démonstration :

- Si $\exists \vec{u}$ / $\quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$

  alors $\varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}$
$$= \frac{1}{2}\left(u_{i,kjl} + u_{k,ijl} + u_{j,lik} + u_{l,jik}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(u_{i,ljk} + u_{l,ijk} + u_{j,kil} + u_{k,jil}\right)$$
$$= \varepsilon_{il,jk} + \varepsilon_{jk,il}$$
où on a utilisé le théorème de Schwarz:
$$u_{i,kjl} = \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_l \partial x_j \partial x_k} = \varepsilon_{i,ljk}$$

• Pour la démonstration inverse, on utilise ~~te~~ théorème de Poincaré :

une 1-forme différentielle $\omega = \sum_i P_i \, dx_i$ est exacte, i.e. $\exists f \,/\, \omega = df$, ssi

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i} \quad \forall i,j$$

• Supposons $[\varepsilon]$ vérifiant (1). On introduit $W_{ijk} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}$

D'après (1), $W_{ijk,l} = W_{ijl,k}$.

D'après le théorème de Poincaré, il existe une fonction ω_{ij} / $W_{ijk} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \omega_{ij,k}$

De plus, par définition, $W_{ijk} = -W_{jik}$

donc, on peut choisir ω_{ij} / $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$

et on considère $F_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$

on a

$$\begin{aligned} F_{ij,k} - F_{ik,j} &= \varepsilon_{ij,k} + \omega_{ij,k} - \varepsilon_{ik,j} - \omega_{ik,j} \\ &= \cancel{\varepsilon_{ij,k}} + \cancel{\varepsilon_{ik,j}} - \cancel{\varepsilon_{jk,i}} \\ &\quad - \cancel{\varepsilon_{ik,j}} - \cancel{\varepsilon_{ij,k}} + \cancel{\varepsilon_{kj,i}} = 0 \end{aligned}$$

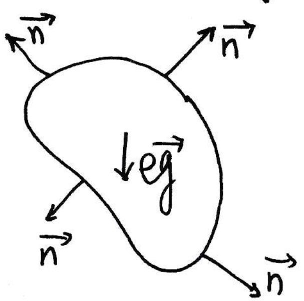
donc il existe un champ u_i / $F_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

et comme $[\omega]$ antisymétrique,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(F_{ij} + F_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

• Les conditions de compatibilité sont utiles pour résoudre des problèmes à 2D, cf le Chap 3 du livre de Timoshenko et Goodier "Theory of Elasticity"

II] Energie libre de déformation



Soit $\mathcal{S}$ soumis sur sa surface à une force appliquée $d\vec{F}_{ext} = [\sigma]\cdot\vec{n}\, dS$ et à une force volumique $\rho\vec{g}$

- A l'équilibre $\quad \mathrm{div}[\sigma] + \rho\vec{g} = 0$
- On suppose qu'un opérateur externe change le déplacement de $\delta\vec{u}(\vec{r})$, changement quasistatique. Le travail fourni par l'opérateur est :

$$\delta W_{op} = \oint_S d\vec{F}_{ext}\cdot\delta\vec{u} + \int_V \rho\vec{g}\cdot\delta\vec{u}\, dV$$

$$= \oint_S \left([\sigma]\cdot\vec{n}\right)\cdot\delta\vec{u}\, dS + \int_V \rho\vec{g}\cdot\delta\vec{u}\, dV$$

or $[\sigma]$ est symétrique, donc

$$\oint_S \left([\sigma]\cdot\vec{n}\right)\delta\vec{u}\, dS = \oint_S \left([\sigma]\cdot\delta\vec{u}\right)\vec{n}\, dS = \int_V \mathrm{div}\left([\sigma]\cdot\delta\vec{u}\right) dV$$

théo. de Gauss

et $$\mathrm{div}\left([\sigma]\cdot\delta\vec{u}\right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j \sigma_{ij}\cdot\delta u_j$$

$$= \sum_{ij} \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}\delta u_j + \sum_{ij}\sigma_{ij}\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}$$

$$= \left(\mathrm{div}[\sigma]\right)\cdot\delta\vec{u} + \underbrace{[\sigma]:\delta[F]}_{=[\sigma]:\delta[\varepsilon]}$$

car $[\sigma]$ symétrique

et $$\delta W_{op} = \int\left[\left(\cancel{\mathrm{div}[\sigma] + \rho\vec{g}}^{\,0}\right)\delta\vec{u} + [\sigma]:\delta[\varepsilon]\right] dV$$

- Or pour une variation quasistatique,

$$\delta W_{op} = dF$$

variation d'énergie libre (ne pas confondre avec $[F]$ gradient de déplacements)

d'où $$dF = \int \sum_{ij} \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\, dV$$

et on peut définir une densité d'énergie libre mécanique, telle que

$$df = \sum_{ij} \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}$$

et $$\sigma_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}}$$