coquille modèle). En revanche, la possibilité d'une propulsion a été démontrée pour des objets présentant deux articulations (ensemble de trois tiges articulées par exemple) : dans ce cas, avec une séquence bien choisie de mouvements séparés des articulations ramenant finalement à l'état initial sans nécessiter de mouvements exactement inverses, on arrive à générer une propulsion. Cela est également possible avec une chaîne de trois sphères par une séquence de variations de leurs positions relatives : on peut ainsi modéliser la propulsion de certains micro-organismes par déformation de leur corps.

9.4 Déplacement d'une sphère dans un fluide visqueux

9.4.1 Champ de vitesse autour d'une sphère en mouvement

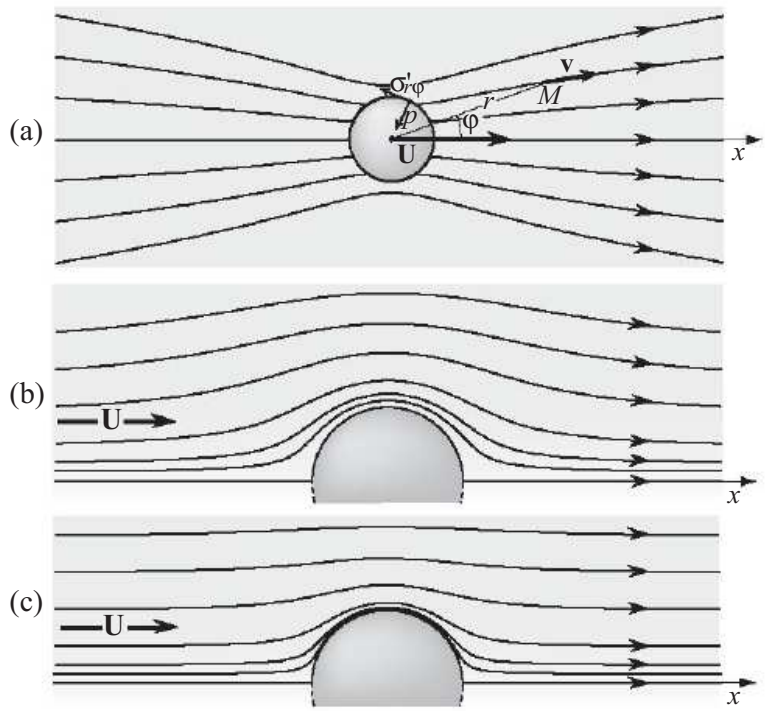

FIG. 9.10 – (a) Lignes de courant de l'écoulement autour d'une sphère se déplaçant à une vitesse constante **U** dans un fluide au repos. On a indiqué les composantes des contraintes normales et tangentielles qui s'exercent sur un point de la surface de la sphère ; (b) lignes de courant de l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'une sphère avec une vitesse **U** loin de la sphère et $Re \ll 1$; (c) Écoulement potentiel d'un fluide parfait autour de la même sphère (section 6.2.4).

On exprime le champ de vitesse en coordonnées sphériques (r, φ, θ) dans un repère au sein duquel le fluide loin de la sphère est au repos et dont l'origine O coïncide à chaque instant avec le centre de la sphère. L'axe Ox ($\varphi = 0$) coïncide avec la direction de la vitesse $\mathbf{U}$ de la sphère de rayon R (Fig. 9.10a). Par suite de l'invariance du problème par rotation autour de l'axe Ox, le champ de vitesse est de révolution autour de cet axe avec une composante v_θ qui est nulle et des composantes v_r et v_φ indépendantes de θ. Après des calculs dont le détail est donné plus loin, on trouve pour les deux composantes v_r et v_φ :

$$v_r = U\cos\varphi\left(\frac{3R}{2r} - \frac{R^3}{2r^3}\right), \tag{9.36a}$$

$$v_\varphi = -U\sin\varphi\left(\frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3}\right)\cdot \tag{9.36b}$$

On vérifie que la vitesse du fluide s'annule bien à l'infini et devient égale à celle de la sphère à la surface de cette dernière ($r = R$). Cette solution est valable seulement si le nombre de Reynolds est très petit devant l'unité et si la vitesse U de la sphère est constante.

Le point le plus remarquable de ce résultat est la décroissance en $1/r$ avec la distance r de la vitesse de l'écoulement à petit nombre de Reynolds. Ce résultat doit être comparé à la décroissance plus rapide en $1/r^3$ pour la vitesse autour d'une sphère, dans le problème d'écoulement potentiel étudié à la section 6.2.4.

Cette décroissance lente de la perturbation de vitesse est due à la faible efficacité de la diffusion pour transporter loin du corps la quantité de mouvement communiquée au fluide par les forces de frottement visqueux. Nous pouvons retrouver cette variation en $1/r$ par un raisonnement physique simple. Supposons que la vitesse décroisse en $r^{-\alpha}$ loin de la sphère ; le flux de quantité de mouvement associé à la diffusion s'exprime par des gradients des composantes de vitesse et varie en $r^{-\alpha-1}$. L'intégrale de ce flux sur une sphère de rayon r varie donc en $r^{-\alpha+1}$ et doit être une constante indépendante de r, de l'ordre de la force de frottement totale sur le corps : on retrouve bien $\alpha = 1$, correspondant à un champ de vitesse en $1/r$.

Pour une sphère immobile dans un écoulement de vitesse $\mathbf{U}$ loin de la sphère, la vitesse $\mathbf{V}$ du fluide s'obtient en retranchant de la vitesse $\mathbf{U}$ la vitesse donnée par les équations (9.36) :

$$V_r = (U\cos\varphi) - v_r = U\cos\varphi\left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right), \tag{9.37a}$$

$$V_\varphi = (-U\sin\varphi) - v_\varphi = -U\sin\varphi\left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right)\cdot \tag{9.37b}$$

Dans ce référentiel où la sphère est au repos, les lignes de courant retournent beaucoup plus lentement à une configuration de vitesse uniforme lorsque l'on s'éloigne de la sphère que pour un écoulement potentiel (Fig. 9.10b-c).

Nous allons établir, par étapes, les expressions (9.36) du champ de vitesse. Cette démonstration est basée sur une détermination intuitive initiale d'une fonction d'essai pour la distribution de pression autour de la sphère ; à partir de cette dernière, on calcule ensuite un champ de vitesse qui vérifie les conditions aux limites imposées, puis les valeurs des paramètres inconnus de la fonction d'essai. D'après le théorème d'unicité, on obtient alors le champ de vitesse cherché.

Détermination du champ de pression

Le champ de pression $p(r)$ vérifie $\Delta p = 0$ (Éq. 9.9) et il est, par suite, une fonction harmonique. On peut donc développer $p(r)$ dans un système de coordonnées sphériques (r, φ, θ) sous forme d'une combinaison linéaire d'un terme en $1/r$ et de ses dérivées successives par rapport aux coordonnées ; ces dernières sont solutions de l'équation de Laplace scalaire $\Delta\,\phi = 0$, et correspondent au champ créé par une charge, un dipôle, un quadrupôle... Les fonctions d'ordre le plus bas de ce type sont :

$$\phi_0 = \frac{A}{r}, \quad \boldsymbol{\phi_1} = \mathbf{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{et} \quad [\boldsymbol{\phi}_2] \quad \text{tel que :} \quad \phi_{2ij} = \left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3\frac{x_i x_j}{r^5}\right).$$

Supposons que l'on néglige le terme de pression hydrostatique et que l'on prenne une valeur de la pression p égale à 0 à l'infini (elle n'intervient que comme une constante additive) : il n'y a alors pas de terme constant ou contenant une puissance positive de r dans $p(r)$. Utilisons comme fonction d'essai la plus simple des fonctions ϕ respectant la symétrie du problème. Le champ de pression doit se mettre sous la forme $\phi\,\eta\,U$ puisque p est proportionnelle à U et à η (section 9.2.4) ; ϕ est une combinaison linéaire des fonctions de base introduites plus haut. La composante d'ordre le plus faible compatible avec la forme scalaire de p est la composante de $\boldsymbol{\phi}_1$ parallèle à $\mathbf{U}$, soit $(\partial/\partial x)(1/r) = -(\cos\varphi)/r^2$ (en effet, les termes en $(\sin\varphi\,\cos\theta)/r^2$ et $(\sin\varphi\,\sin\theta)/r^2$ ne respectent pas la symétrie de révolution autour de l'axe Ox parallèle à $\mathbf{U}$). D'autre part, le terme ϕ_0 donnerait un gradient de pression radial et, donc, une source de courant. On peut donc écrire :

$$p = C\,\eta\,U\frac{\cos\varphi}{r^2} = -C\,\eta\,\mathbf{U}\cdot\mathbf{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -C\,\eta\,\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{U}}{r}\right). \qquad (9.38)$$

Les forces exercées sont donc proportionnelles à la vitesse et à la viscosité. Nous allons maintenant examiner s'il existe un champ de vitesse correspondant à cette distribution de pression, vérifiant l'équation de Stokes et les conditions aux limites sur les parois de la sphère. Si ce n'était pas le cas, il faudrait introduire dans $p(\mathbf{r})$ les termes du développement d'ordre supérieur (ce serait, par exemple, nécessaire pour un corps de forme plus complexe qu'une sphère).

Champ de vorticité correspondant à la répartition de pression

On part de la forme (9.8) de l'équation de Stokes. En utilisant le résultat (9.38), elle devient :

$$-C\,\eta\,\mathbf{grad}\ \mathrm{div}(\mathbf{U}/r) = -C\,\eta\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}(\mathbf{U}/r) - C\,\eta\,\Delta(\mathbf{U}/r) = -\eta\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}. \qquad (9.39)$$

Or on a :

$$\Delta\left(\frac{\mathbf{U}}{r}\right) = \mathbf{U}\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \tag{9.40}$$

donc :

$$\boldsymbol{\omega} = C\,\mathbf{rot}\left(\frac{\mathbf{U}}{r}\right) + \mathbf{grad}\,g(\mathbf{r}) \tag{9.41}$$

où $g(\mathbf{r})$ est une fonction de laplacien nul, comme on le voit en prenant la divergence de la relation (9.41). Or, seule la composante ω_θ est non nulle car $v_\theta = 0$ et $\mathbf{v}$ est indépendant de θ. La fonction inconnue $g(\mathbf{r})$ doit donc être de la forme $\alpha\,\theta + \beta$ où α et β sont des constantes. Mais ω_θ est indépendant de θ car $\mathbf{v}$ l'est aussi ; la constante α est donc nulle. De plus, comme g intervient uniquement par son gradient, on peut prendre, $\beta = 0$. Ainsi, la fonction g est identiquement nulle. En utilisant l'identité : $\mathbf{rot}(m\mathbf{A}) = m\,\mathbf{rot}\,\mathbf{A} + (\mathbf{grad}\,m) \wedge \mathbf{A}$, on en déduit :

$$\omega = C\ \mathbf{rot}\left(\frac{\mathbf{U}}{r}\right) = -C\ \mathbf{U} \wedge\ \mathbf{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{9.42}$$

soit :

$$\omega_\theta = CU\frac{\sin\varphi}{r^2} \tag{9.43}$$

Calcul de la fonction de courant Ψ à partir du champ de vorticité

Introduisons maintenant la fonction de courant de Stokes Ψ (section 3.4.3), telle que :

$$v_r = \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \tag{9.44}$$

et :

$$v_\varphi = -\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial r}. \tag{9.45}$$

On a alors :

$$\omega_\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right) = -\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right). \tag{9.46}$$

En reportant (9.46) dans (9.43), on obtient :

$$-\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right) = CU\,\frac{\sin\varphi}{r^2} \tag{9.47}$$

On peut séparer les variables en posant $\Psi = (\sin^2\varphi)f(r)$. Ce choix se justifie car l'axe Ox doit être une ligne de courant. L'équation (9.47) devient alors, après avoir simplifié par $\sin\varphi$:

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2f}{r^3} = \frac{CU}{r^2}. \tag{9.48}$$

$CU\,r/2$ est une solution particulière. Les solutions générales de l'équation sans second membre sont L'/r et $(M'r^2)$ où L' et M' sont des constantes. D'où, en posant $L = L'/U$ et $M = M'/U$:

$$\Psi = U\sin^2\varphi\left(\frac{L}{r} + Mr^2 + \frac{Cr}{2}\right). \tag{9.49}$$

Calcul du champ de vitesse

Les composantes du champ de vitesse peuvent maintenant être calculées à partir des relations (9.44) et (9.45) :

$$v_r = U\cos\varphi\left(\frac{C}{r}+\frac{2L}{r^3}+2M\right), \tag{9.50a}$$

$$v_\varphi = -U\sin\varphi\left(\frac{C}{2r}-\frac{L}{r^3}+2M\right)\cdot \tag{9.50b}$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à partir des conditions aux limites :

- pour $r\to\infty$, $\mathbf{v}\to 0$ et donc $M=0$;
- pour $r=R$, on doit avoir : $v_r = U$ pour $\varphi = 0$ et $v_\varphi = -U$ pour $\varphi=\pi/2$.

Donc $C = 3R/2$ et $L = -R^3/4$.

On obtient donc bien le champ de vitesse donné par les équations (9.36), ainsi que les expressions suivantes des champs de pression et de vorticité ($\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire le long du rayon vecteur $\mathbf{OM}$) :

$$p = \frac{3}{2}\,\eta\,U\,R\,\frac{\cos\varphi}{r^{\,2}} = \frac{3}{2}\eta\,R\,\frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}}{r^2} \tag{9.51}$$

et :

$$\omega_\theta = \frac{3}{2}U\,R\,\frac{\sin\varphi}{r^2} = \frac{3}{2}R\,\frac{(\mathbf{U}\wedge\mathbf{n})_\theta}{r^2}\cdot \tag{9.52}$$

9.4.2 Force exercée sur une sphère en mouvement dans un fluide – coefficient de traînée

Cas d'un milieu infini

En utilisant les résultats précédents, on trouve que la force de traînée totale sur une sphère de rayon R et de vitesse $\mathbf{U}$ dans un fluide de viscosité η vaut :

$$\mathbf{F} = -6\pi\,\eta\,R\,\mathbf{U}. \tag{9.53}$$

Cette formule, dite *formule de Stokes*, est bien vérifiée expérimentalement jusqu'à un nombre de Reynolds de l'ordre de l'unité (alors qu'elle a été établie sous l'hypothèse plus restrictive $Re \ll 1$). Par ailleurs, la force $\mathbf{F}$ de traînée a bien la forme dimensionnelle que nous avions trouvée à la section 9.2.4 (Éq. 9.19b).

Démonstration. La contrainte normale à la surface de la sphère s'écrit :

$$\sigma_{rr} = \left[-p+2\eta\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)\right]_{r=R} = -\frac{3}{2}\frac{\eta\,U\cos\varphi}{R}\cdot \tag{9.54a}$$

Soulignons que la contribution due au gradient de vitesse s'annule à la surface de la sphère. L'effet de cette contrainte normale est maximal sur l'axe Ox. Par ailleurs, il

existe une contrainte tangentielle due à la viscosité, dont l'expression est donnée à l'annexe A-2 du chapitre 4 :

$$\sigma_{r\varphi} = \eta \left[\left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right]_{r=R} = \frac{3}{2} \frac{\eta U \sin \varphi}{R}. \tag{9.54b}$$

Elle est maximale à angle droit de l'axe Ox. Tous les autres termes du tenseur des contraintes sont nuls. La force résultante par unité de surface en tout point de la sphère s'écrit donc :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathbf{d}S} = [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{n} = \sigma_{rr}\, \mathbf{e}_\mathrm{r} + \sigma_{r\varphi}\, \mathbf{e}_\varphi ;$$

$$\text{soit :} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathbf{d}S} = \frac{3\,\eta\, U}{2R} \left(-\cos\varphi\, \mathbf{e}_\mathrm{r} + \sin\varphi\, \mathbf{e}_\varphi \right) = -\frac{3}{2} \frac{\eta\, \mathbf{U}}{R}. \tag{9.55}$$

Cette force par unité de surface est opposée à $\mathbf{U}$ car les composantes radiale et orthoradiale de $\mathbf{U}$ sont respectivement $(U \cos\varphi)$ et $(-U \sin\varphi)$ et elle est constante avec φ et θ. On obtient alors la force de traînée totale, simplement en multipliant la valeur de $\mathrm{d}\mathbf{F}/\mathrm{d}S$ par l'aire $4\pi R^2$ de la sphère.

Pour tenir compte de l'effet de la pesanteur, il faut ajouter à la contribution de la pression celle due au terme de pression hydrostatique en $\rho\, gz$. Après intégration sur la surface de la sphère, ce terme conduit à la poussée d'Archimède $(\rho_{\text{fluide}} V_{\text{sphère}} g)$. ■

Application à la détermination de la vitesse limite de chute d'une bille dans un fluide visqueux à petit nombre de Reynolds

Une bille de rayon R et de densité ρ_s tombe dans un fluide s'étendant à l'infini, de densité ρ_f et de viscosité η avec une vitesse terminale qui correspond à un équilibre entre le poids, diminué de la poussée d'Archimède, et la force de friction visqueuse exercée par le fluide (force de Stokes). Cette vitesse s'écrit :

$$V_{\text{terminale}} = \frac{2}{9} \frac{(\rho_s - \rho_f)\, g R^2}{\eta}. \tag{9.56}$$

Exemple. Pour une bille de verre ($\rho_s = 2{,}5 \times 10^3$ kg.m^{-3}) de 1 mm de diamètre, tombant dans de la glycérine ($\rho_f = 10^3$ kg.m^{-3}, $\eta \approx 1$ Pa.s), on obtient $V_{\text{terminale}} \approx 10^{-3}$ m.s^{-1} ; si nous calculons le nombre de Reynolds correspondant à cet écoulement, nous trouvons $Re = 10^{-3}$. La condition de petit nombre de Reynolds est donc bien vérifiée.

Cette relation entre la vitesse de chute d'une bille et la viscosité du fluide est mise à profit dans des viscosimètres qui utilisent la mesure du temps de chute d'une bille calibrée sur une distance connue. En pratique, on utilise des tubes verticaux dont le diamètre n'est pas grand devant celui de la bille (voir Fig. 9.11). Il en résulte, comme nous allons le voir, un facteur de correction important sur la force de friction. La viscosité est déterminée en utilisant un étalonnage avec des liquides de viscosité connue.

Le *coefficient de traînée*, défini par l'équation (9.20), peut être calculé à partir de la force de Stokes, sous la forme :

$$C_d = \frac{F}{(\pi R^2)\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{24}{Re} \tag{9.57}$$

avec $Re = \rho U(2R)/\eta$. Ce coefficient de traînée a bien le type de variation en $(1/Re)$ prévu dimensionnellement dans la section 9.2.4. C'est également la même forme que celle du coefficient de frottement dans l'écoulement de Poiseuille obtenue à la section 4.5.3.

Remarque. Nous voyons ainsi que le calcul complet de la force exercée par un écoulement à petit nombre de Reynolds autour d'une sphère (problème pourtant très simple par ses symétries) est beaucoup plus complexe que la détermination de sa forme dimensionnelle. Cela souligne l'intérêt, en mécanique des fluides, de la recherche de solutions approchées qui dégagent les mécanismes fondamentaux et conduisent à des expressions en termes de nombres sans dimension comme la relation (9.19b). La détermination des préfacteurs corrects, qui dépendent des effets de forme, ne pourra souvent se faire, en pratique, que par des approches numériques ou des séries d'essais expérimentaux.

Influence de parois

La présence de parois planes ou cylindriques, placées parallèlement ou perpendiculairement au mouvement d'une sphère qui sédimente, augmente les effets de la friction. Il faut souligner la grande sensibilité de la force de Stokes à ces obstacles.

À titre d'exemple, pour une sphère placée dans un tube de rayon dix fois celui de la sphère, l'augmentation de la force est de 20 %. Cette augmentation résulte pour l'essentiel de l'influence de la paroi du tube, ainsi que, dans une moindre mesure, du contre-écoulement vers le haut du liquide déplacé par la sphère en mouvement qui contribue aussi au freinage (ce dernier effet, lié au rapport de la surface de la particule projetée parallèlement à la direction de son mouvement, à celle du tube, est donc proportionnel au *carré* du rapport du rayon de la particule à celui du tube, alors que le premier effet est proportionnel à ce rapport).

Les figures 9.11a et 9.11b, montrent les lignes de courant autour d'une sphère en mouvement le long de l'axe d'un tube cylindrique dans un référentiel respectivement fixe par rapport à la sphère (Fig. 9.11a) et fixe par rapport au tube (Fig. 9.11b). Sur cette seconde vue, on remarque nettement l'existence d'une recirculation due à un écoulement ascendant (contre-écoulement), à proximité des parois du tube, opposé au mouvement descendant de la sphère (et du fluide proche de celle-la). Dans les deux cas, les lignes de courant sont symétriques par rapport au plan diamétral horizontal de la sphère, ce qui ne serait plus le cas à un plus grand nombre de Reynolds.

Dans le cas d'une sphère se déplaçant perpendiculairement à une paroi plane, nous avons établi à la section 8.1.6 l'expression (8.33) de la force de

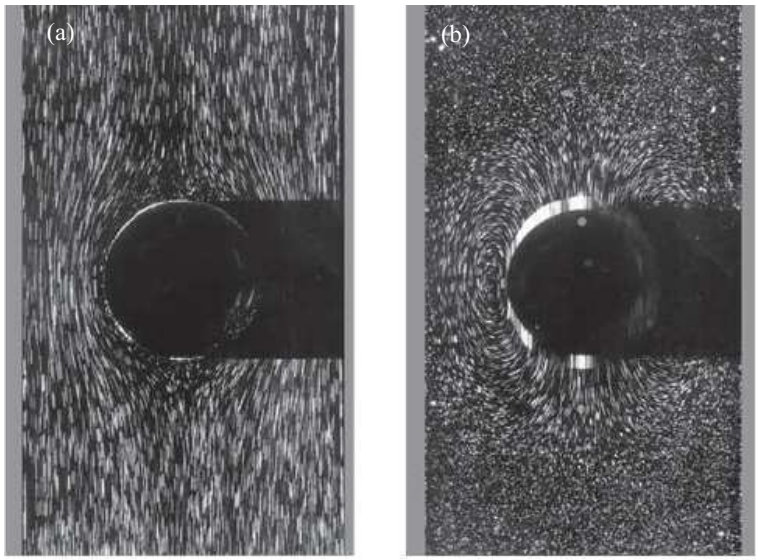

FIG. 9.11 – Visualisation de l'écoulement induit par la chute d'une sphère le long de l'axe d'un tube cylindrique vertical rempli de glycérol et de diamètre 163 mm, double de celui de la sphère. Le nombre de Reynolds est Re = 0,1. Les lignes de courant sont rendues visibles par de petites particules de magnésium éclairées par un fin plan de lumière (l'éclairage est réalisé par le côté gauche de la figure, et la partie sombre de la photographie correspond à l'ombre de la sphère) ; (a) l'appareil photo se déplace de manière à être fixe par rapport à la sphère ; (b) l'appareil est fixe par rapport au tube. Durant le temps d'exposition, la sphère s'est déplacée d'une petite fraction de son diamètre (docs. M. Coutanceau).

résistance lorsque la sphère est très proche de la paroi. On constate que, dans ce cas, l'expression (9.53) de la force de résistance est corrigée par un facteur multiplicatif R/h, où h est la distance minimale entre la sphère et la paroi, avec :

$$\mathbf{F} = -6\pi\,\eta\,R\,\mathbf{U}\,\frac{R}{h}\cdot$$

Précisons que, par suite de la réversibilité des écoulements aux petits nombres de Reynolds, cette expression est valable lorsque la sphère se rapproche de la paroi comme lorsqu'elle s'en éloigne.

Remarque. On peut raccorder cette expression, valable quand $h \ll R$, avec l'équation (9.53) qui s'applique dans la limite $h \gg R$ pour obtenir :

$$\mathbf{F} = -6\pi\,\eta\,R\left(1 + \frac{R}{h}\right)\mathbf{U}\cdot$$

La force donnée par cette relation (*a priori* valable dans les deux limites $R/h \gg 1$ et $R/h \ll 1$) reste proche de la valeur exacte (déterminée par un calcul faisant intervenir un développement en une série de termes) à mieux que 6,5% pour les valeurs intermédiaires du rapport R/h.