

# Introduction à l'élasticité

Vincent De Zotti

vincent.de\_zotti@ens-lyon.fr

## Préambule

Ce cours est une introduction à la notion d'élasticité linéaire dans les solides. Nous commencerons dans un premier temps par des rappels de mécanique ainsi que sur l'utilisation des tenseurs. Nous aborderons ensuite plusieurs exemples de déformations élastiques simples, ainsi que les applications à la mécanique des poutres. Enfin, nous généraliserons la notion d'élasticité linéaire dans les solides.

Pour vous entraîner, je vous conseille de résoudre l'épreuve C des écrits de l'agrégation externe de physique de 2015. Elle propose l'étude des modes propres de vibration d'un nano-oscillateur électro-mécanique, afin d'établir l'équation de vibration transverse des poutres que nous présenterons dans ce cours.

Il existe plusieurs ouvrages qui traitent de la mécanique et de l'élasticité dans les solides. À titre personnel, je vous conseille d'utiliser :

- des livres de CPGE (anciens programmes) pour avoir de bonnes bases en mécanique,
- *Rhéophysique* de Oswald pour une présentation claire de l'élasticité linéaire,
- *Physique théorique Tome 1 - Mécanique* et *Tome 7 - Théorie de l'élasticité* de Landau et Lifchitz pour aller plus loin.

Enfin, malgré plusieurs relectures, ce polycopié est toujours susceptible de contenir des erreurs. Je vous remercie d'avance de me les faire remonter pour les prochaines promotions d'agrégatifs.

## Table des matières

<b>I Rappels de mécanique</b>	<b>2</b>
I.1 Mécanique du point matériel . . . . .	2
I.2 Mécanique des systèmes . . . . .	4
I.3 Notion de tenseur pour la mécanique . . . . .	5
I.4 Mécanique du solide indéformable . . . . .	7
<b>II Étude de quelques déformations élastiques</b>	<b>12</b>
II.1 Traction uniaxiale d'un solide . . . . .	12
II.2 Solide soumis à une pression . . . . .	12
II.3 Cisaillement d'un solide . . . . .	13
II.4 Flexion d'une poutre . . . . .	13
II.5 Flambage d'une poutre . . . . .	15
II.6 Modes de vibration transverse d'une poutre . . . . .	16
<b>III Théorie de l'élasticité linéaire isotrope</b>	<b>19</b>
III.1 Tenseur des déformations . . . . .	19
III.2 Tenseur des contraintes . . . . .	20
III.3 Relation contrainte-déformation . . . . .	21
III.4 Thermodynamique de la déformation . . . . .	21
III.5 Équation de Navier . . . . .	21
III.6 Retour sur les exemples précédents . . . . .	22
III.7 Propagation d'ondes dans un milieu élastique . . . . .	24

# I Rappels de mécanique

## I.1 Mécanique du point matériel

### I.1.1 Grandeurs cinétiques

Soit un point matériel  $M$ , de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$ , on définit les grandeurs cinétiques suivantes :

— sa quantité de mouvement :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

— son moment cinétique par rapport à un point  $A$  :

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}$$

— son moment cinétique par rapport à un axe  $\Delta$  (passant par  $A$  et de vecteur unitaire  $\vec{u}$ ) :

$$L_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{u}$$

— son énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

### I.1.2 Lois de Newton

**1<sup>re</sup> loi de Newton : principe d'inertie** Il existe des référentiels privilégiés, appelés galiléens, dans lesquels la quantité de mouvement d'un point matériel isolé est constante. Soit le point est au repos, soit il persévère dans son mouvement rectiligne uniforme.

**2<sup>e</sup> loi de Newton : principe fondamental de la dynamique** Dans un référentiel galiléen  $R_g$ , la dérivée de la quantité de mouvement d'un point matériel par rapport au temps est égale à la somme des forces qu'il subit :

$$\left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{R_g} = \sum \vec{F}$$

**3<sup>e</sup> loi de Newton : principe des actions réciproques** Si un point matériel  $A$  exerce une force  $\vec{F}_{A \rightarrow B}$  sur un point matériel  $B$ , alors  $B$  exerce une force sur  $A$  telle que :

$$\begin{cases} \vec{F}_{B \rightarrow A} = -\vec{F}_{A \rightarrow B} \\ \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_{B \rightarrow A} = \vec{0} \end{cases}$$

### I.1.3 Théorème du moment cinétique

Le moment d'une force  $\vec{F}$  par rapport à un point  $A$ , appliquée au point  $M$ , s'exprime :

$$\vec{M}_{A, \vec{F}} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

Le moment de cette force par rapport à un axe  $\Delta$  (passant par  $A$  et de vecteur unitaire  $\vec{u}$ ), s'exprime :

$$M_{\Delta, \vec{F}} = \vec{M}_{A, \vec{F}} \cdot \vec{u}$$

**Théorème du moment cinétique** Dans un référentiel galiléen :

$$\left. \frac{d\vec{L}_A}{dt} \right|_{R_g} = \sum \vec{M}_{A, \vec{F}}$$

### I.1.4 Aspect énergétique

On définit :

— la puissance d'une force :

$$P_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

— le travail d'une force entre  $A$  et  $B$  :

$$W_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

**Théorème de l'énergie cinétique** Dans un référentiel galiléen :

$$\left. \frac{dE_c}{dt} \right|_{R_g} = \sum P_{\vec{F}} \iff \Delta E_c|_{R_g} = \sum W_{\vec{F}}$$

Une force est conservative si elle dérive d'une énergie potentielle  $E_p$  :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

On définit alors l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p$$

**Théorème de l'énergie mécanique** L'énergie mécanique d'un point matériel soumis uniquement à des forces conservatives se conserve au cours du temps :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

Ce théorème est valable dans les référentiels galiléens **et** non galiléens.

### I.1.5 Lois de composition

Soit  $\vec{\Omega}$  le vecteur rotation du repère relatif  $R'$  de centre  $O'$ , par rapport au repère absolu  $R$  de centre  $O$ . Les dérivées d'un vecteur  $\vec{u}$  dans les deux repères sont reliées telles que :

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$$

**Loi de composition des vitesses** La vitesse absolue d'un point matériel  $M$  dans  $R$  s'exprime :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

avec :

- la vitesse relative  $\vec{v}_r = \vec{v}(M)|_{R'}$ ,
- la vitesse d'entraînement  $\vec{v}_e = \vec{v}(O')|_R + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$ .

**Loi de composition des accélérations** L'accélération absolue d'un point matériel  $M$  dans  $R$  s'exprime :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C$$

avec :

- l'accélération relative  $\vec{a}_r = \vec{a}(M)|_{R'}$ ,
- l'accélération d'entraînement  $\vec{a}_e = \vec{a}(O')|_R + \left. \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$ ,
- l'accélération de Coriolis  $\vec{a}_C = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$ .

Remarque :  $\left. \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right|_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} = \left. \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right|_{R'}$

### I.1.6 Théorèmes en référentiel non galiléen

Dans un référentiel non galiléen  $R_{ng}$ , les théorèmes de la mécanique du point s'écrivent :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{R_{ng}} &= \sum \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC} \\ \left. \frac{d\vec{L}_A}{dt} \right|_{R_{ng}} &= \sum \vec{M}_{A,\vec{F}} + \vec{M}_{A,\vec{F}_{ie}} + \vec{M}_{A,\vec{F}_{iC}} \\ \left. \frac{dE_c}{dt} \right|_{R_{ng}} &= \sum P_{\vec{F}} + P_{\vec{F}_{ie}} \end{aligned}$$

avec  $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$  la force d'inertie d'entraînement et  $\vec{F}_{iC} = -m\vec{a}_C$  la force d'inertie de Coriolis dues au mouvement de  $R_{ng}$  par rapport à un référentiel galiléen.

## I.2 Mécanique des systèmes

### I.2.1 Centre d'inertie et référentiel barycentrique

Un système matériel est un ensemble de points matériels  $M_i$  de masses  $m_i$ . On note  $M$  sa masse totale. Son centre d'inertie  $G$  est défini tel que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{OM}_i}{M}$$

Le référentiel barycentrique  $R^*$ , associé au référentiel  $R$ , est en translation (généralement non uniforme) par rapport à  $R$ . Son origine est en  $G$ , et ses axes sont parallèles à ceux de  $R$ .

### I.2.2 Quantité de mouvement

La quantité de mouvement du système s'exprime :

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_G$$

Elle est nulle à tout instant dans le référentiel barycentrique :

$$\vec{p}|_{R^*} = \vec{0}$$

**Théorème du centre d'inertie** Dans un référentiel galiléen, le mouvement du centre d'inertie est celui d'un point matériel de masse  $M$  auquel seraient appliquées toutes les forces extérieures au système :

$$\left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{R_g} = \sum \vec{F}_{ext}$$

### I.2.3 Moment cinétique

Le moment cinétique du système en un point  $A$  quelconque s'exprime :

$$\vec{L}_A = \sum \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

Il est relié au moment cinétique en  $B$  par la relation :

$$\vec{L}_A = \vec{L}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{p}$$

Il est identique en tout point du référentiel barycentrique, et correspond au moment cinétique en  $G$  :

$$\vec{L}|_{R^*} = \vec{L}_G|_{R^*} = \vec{L}_G|_R$$

### Théorème du moment cinétique

— en un point  $A$  quelconque d'un référentiel galiléen :

$$\left. \frac{d\vec{L}_A}{dt} \right|_{R_g} = \sum \overrightarrow{M}_{A, \vec{F}_{ext}} - \vec{v}_A \wedge \vec{p}$$

— en un point  $A$  fixe d'un référentiel galiléen :

$$\left. \frac{d\vec{L}_A}{dt} \right|_{R_g} = \sum \overrightarrow{M}_{A, \vec{F}_{ext}}$$

— au centre d'inertie  $G$  dans un référentiel quelconque :

$$\left. \frac{d\vec{L}_G}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{R^*} = \sum \overrightarrow{M}_{G, \vec{F}_{ext}}$$

**Premier théorème de Koenig** Le moment cinétique en un point  $A$  d'un référentiel  $R$  s'exprime en fonction du moment cinétique barycentrique tel que :

$$\vec{L}_A|_R = \vec{L}|_{R^*} + \overrightarrow{AG} \wedge M \vec{v}_G$$

### I.2.4 Aspect énergétique

L'énergie cinétique du système s'exprime :

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

**Théorème de l'énergie cinétique** Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces intérieures et extérieures au système :

$$\left. \frac{dE_c}{dt} \right|_{R_g} = \sum P_{\vec{F}_{ext}} + \sum P_{\vec{F}_{int}} \iff \Delta E_c|_{R_g} = \sum W_{\vec{F}_{ext}} + \sum W_{\vec{F}_{int}}$$

**Second théorème de Koenig** L'énergie cinétique dans un référentiel  $R$  s'exprime en fonction de l'énergie cinétique barycentrique telle que :

$$E_c|_R = E_c|_{R^*} + \frac{1}{2} M v_G^2$$

**Théorème de l'énergie mécanique** L'énergie mécanique d'un système soumis uniquement à des forces conservatives se conserve au cours du temps :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

### I.3 Notion de tenseur pour la mécanique

Cette partie n'a pas pour but d'introduire la notion de tenseur de façon rigoureuse et mathématique. Au contraire, nous allons les aborder d'un point de vue pratique, de façon à pouvoir résoudre les problèmes usuels de mécanique du solide.

#### I.3.1 Contexte et définition

Nous allons nous restreindre à un espace de dimension  $d = 3$ , correspondant aux coordonnées cartésiennes  $x, y$  et  $z$ . On considère une grandeur physique  $T$ , décrite par un tenseur de rang  $n$ . On la note :

$$T_{ijkl\dots}$$

avec  $n$  indices  $\{i, j, k, l, \dots\}$ . Chacun indice pouvant prendre l'une des trois coordonnées de l'espace ( $x, y$  ou  $z$ ), il faut  $d^n = 3^n$  scalaires pour décrire cette quantité.

**Quelques exemples :**

- la pression  $p$  en un point de l'espace est un tenseur de rang 0, elle est décrite par  $3^0 = 1$  scalaire,
- la vitesse  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  d'un point matériel est un tenseur de rang 1, elle est décrite par  $3^1 = 3$  scalaires, ses composantes sont notées  $v_i$  (avec  $i = x, y$  ou  $z$ ),
- le tenseur gradient de vitesse  $[G]$  est un tenseur de rang 2, il est décrit par  $3^2 = 9$  scalaires, ses composantes sont définies telles que  $G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  (avec  $x_j = x, y$  ou  $z$ ) :

$$[G] = \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

#### I.3.2 Produits de tenseur

**Produit scalaire** Le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  s'écrit :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_{i=\{x,y,z\}} a_i b_i$$

En notation tensorielle, on utilise la **convention de sommation d'Einstein** (ou sommation sur les indices répétés) : **lorsqu'un indice est répété plusieurs fois dans une même expression, on le somme sur toutes ses valeurs possibles**, c'est-à-dire sur les trois coordonnées de l'espace.

Le produit scalaire peut donc s'écrire  $a_i b_i$  car :

$$a_i b_i = \sum_{i=\{x,y,z\}} a_i b_i = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Comme l'indice  $i$  est sommé, c'est un indice muet.

**Produit tensoriel** Le produit tensoriel de deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  définit un tenseur  $[c]$  de rang 2 tel que :

$$[c] = \vec{a} \otimes \vec{b} \iff c_{ij} = a_i b_j$$

Contrairement au produit scalaire, les indices  $i$  et  $j$  sont libres.

**Produit tenseur-vecteur** Le produit d'un tenseur  $[T]$  de rang 2 avec un vecteur  $\vec{u}$  définit un vecteur  $\vec{v}$  tel que :

$$\vec{v} = [T]\vec{u} \iff v_i = T_{ij}u_j$$

L'indice  $j$  étant répété, on le somme pour obtenir la composante  $i$  du vecteur  $\vec{v}$ .

La composante  $v_x$  s'exprime donc :

$$v_x = T_{xj}u_j = \sum_{j=\{x,y,z\}} T_{xj}u_j = T_{xx}u_x + T_{xy}u_y + T_{xz}u_z$$

De même pour  $v_y$  et  $v_z$  :

$$\begin{aligned} v_y &= T_{yx}u_x + T_{yy}u_y + T_{yz}u_z \\ v_z &= T_{zx}u_x + T_{zy}u_y + T_{zz}u_z \end{aligned}$$

### I.3.3 Quelques tenseurs et opérateurs utiles

**Symbole de Kronecker** Le tenseur unité  $\delta_{ij}$ , ou symbole de Kronecker, est défini tel que :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La trace d'un tenseur  $[c]$  de rang 2 peut s'exprimer :

$$\text{Tr}[c] = \delta_{ij}c_{ij} = c_{ii} = c_{xx} + c_{yy} + c_{zz}$$

**Tenseur de Levi-Civita** Le tenseur de Levi-Civita  $\epsilon_{ijk}$  est défini tel que :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{ijk\} = \{xyz\}, \{yzx\}, \{zxy\} \\ -1 & \text{si } \{ijk\} = \{zyx\}, \{yxz\}, \{xzy\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le produit vectoriel  $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$  peut s'exprimer :

$$c_i = \epsilon_{ijk}a_j b_k$$

Par exemple, sa composante selon  $x$  s'exprime :

$$\begin{aligned} c_x &= \epsilon_{xjk}a_j b_k = \sum_j \sum_k \epsilon_{xjk}a_j b_k = \epsilon_{xyz}a_y b_z + \epsilon_{xzy}a_z b_y \\ c_x &= a_y b_z - a_z b_y \end{aligned}$$

On peut également montrer la propriété suivante :

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

**Opérateur gradient** L'opérateur gradient  $\vec{\nabla}$  s'écrit en notation tensorielle  $\partial/\partial x_j$ . En l'appliquant à un vecteur  $\vec{u}$ , on obtient un tenseur de rang 2 :

$$\vec{\nabla}\vec{u}\Big|_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \partial_j u_i$$

On peut également réécrire les opérateurs suivants appliqués à un vecteur avec la notation tensorielle :

— l'opérateur divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \partial_i u_i$$

— l'opérateur rotationnel :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\Big|_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} \partial_j u_k$$

— l'opérateur laplacien :

$$\vec{\Delta}\vec{u}\Big|_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \partial_{jj} u_i$$

### I.3.4 Exercice d'application

Soit un fluide dont le champ de vitesse eulérien s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v}(x, y, z, t) = \begin{cases} v_x = \omega x \\ v_y = \omega^2 t y \\ v_z = \omega y^2 / x \end{cases}$$

avec  $\omega$  une constante.

1. Calculer le gradient de la vitesse  $\vec{\nabla} \vec{v}$ .
2. Calculer l'accélération eulérienne définie telle que :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \iff a_i = \partial_t v_i + (v_j \cdot \partial_j) v_i$$

Solution :

1.

$$\vec{\nabla} \vec{v} = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 t & 0 \\ -\frac{\omega y^2}{x^2} & \frac{2\omega y}{x} & 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \begin{cases} a_x = (v_x \cdot \partial_x) v_x = \omega^2 x \\ a_y = \partial_t v_y + (v_y \cdot \partial_y) v_y = \omega^2 y (1 + \omega^2 t^2) \\ a_z = (v_x \cdot \partial_x) v_z + (v_y \cdot \partial_y) v_z = \frac{\omega^2 y^2}{x} (2\omega t - 1) \end{cases}$$

## I.4 Mécanique du solide indéformable

### I.4.1 Définition et propriétés

Un solide indéformable est un système de points matériels tel que pour tout couple de points  $(A, B)$ , la distance  $AB$  est conservée au cours du temps. Toutes les définitions et tous les théorèmes de la mécanique des systèmes sont donc valables. Le caractère indéformable du solide implique deux propriétés supplémentaires :

- la somme des forces intérieures est nulle,
- la somme des travaux des forces intérieures est nulle.

Un solide indéformable a 6 degrés de liberté : 3 en translation et 3 en rotation. On le repère usuellement à l'aide de la position de son centre d'inertie  $G$  et de 3 angles.

### I.4.2 Cinématique du solide

Le champ des vitesses d'un solide est équiprojectif, pour tout couple de points  $(A, B)$  :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_A = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_B$$

Soit  $\vec{\Omega}$  le vecteur rotation du solide, la relation entre les vitesses s'écrit :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}$$

Cette relation est la définition d'un **torseur**. Le couple  $(\vec{\Omega}, \vec{v}_A)$  est le torseur cinématique :  $\vec{\Omega}$  est la résultante et  $\vec{v}_A$  est le moment en  $A$ .

### I.4.3 Moment cinétique et opérateur d'inertie

Le moment cinétique d'un solide en un point  $A$  s'exprime :

$$\vec{L}_A = \iiint \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}_M dm = \overrightarrow{AG} \wedge M_G \vec{v}_A + \iiint \overrightarrow{AM} \wedge (\overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}) dm$$

avec  $dm$  la masse de l'élément de matière infinitésimal entourant chaque point  $M$ .

Si le point  $A$  est **fixe**, ou s'il correspond au centre d'inertie ( $A = G$ ), le premier terme s'annule. Le moment cinétique s'exprime alors en notation tensorielle :

$$\vec{L}_A = [J(A)] \vec{\Omega} \iff L_A|_i = J_{ij}(A) \Omega_j$$

avec  $[J(A)]$  l'opérateur d'inertie en  $A$ . En choisissant  $A$  comme origine, il s'exprime :

$$[J(A)] = \begin{pmatrix} J_{xx}(A) & J_{xy}(A) & J_{xz}(A) \\ J_{yx}(A) & J_{yy}(A) & J_{yz}(A) \\ J_{zx}(A) & J_{zy}(A) & J_{zz}(A) \end{pmatrix}$$

avec  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$  et  $J_{zz}$  les moments d'inertie par rapport aux axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  définis tels que :

$$\begin{cases} J_{xx}(A) = \iiint (y^2 + z^2) dm \\ J_{yy}(A) = \iiint (x^2 + z^2) dm \\ J_{zz}(A) = \iiint (x^2 + y^2) dm \end{cases}$$

Les autres termes sont les produits d'inertie, ils sont symétriques et définis tels que :

$$\begin{cases} J_{xy}(A) = J_{yx}(A) = - \iiint xy dm \\ J_{yz}(A) = J_{zy}(A) = - \iiint yz dm \\ J_{xz}(A) = J_{zx}(A) = - \iiint xz dm \end{cases}$$

Par exemple, d'après la convention de sommation d'Einstein, la composante selon  $x$  du moment cinétique s'écrit :

$$L_A|_x = J_{xj}(A) \Omega_j = J_{xx}(A) \Omega_x + J_{xy}(A) \Omega_y + J_{xz}(A) \Omega_z$$

$$L_A|_x = \iiint (y^2 + z^2) dm \Omega_x - \iiint xy dm \Omega_y - \iiint xz dm \Omega_z$$

Les composantes de  $[J(A)]$  dépendent de la base considérée. Si  $[J(A)]$  est diagonal dans une base, alors ses axes définissent les axes principaux d'inertie du solide en  $A$ .

#### I.4.4 Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un solide est la somme de son énergie cinétique de translation et de son énergie cinétique de rotation dans son référentiel barycentrique :

$$E_c = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{L}_A|_{R^*} \cdot \vec{\Omega}$$

#### I.4.5 Cas particulier d'une rotation autour d'un axe fixe

Considérons un solide en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ , passant par  $A$  et de vecteur unitaire  $\vec{u}$ . Il tourne à la vitesse angulaire  $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$ . Chaque point est associé à une masse élémentaire  $dm$ , distante de  $r$  par rapport à l'axe  $\Delta$ .

Nous allons projeter les relations précédentes sur l'axe. Soit  $J_\Delta$  le moment d'inertie par rapport à  $\Delta$ , il est défini tel que :

$$J_\Delta = \vec{u} \cdot [J(A)] \cdot \vec{u} = \iiint r^2 dm$$

Le moment cinétique par rapport à  $\Delta$  s'écrit :

$$L_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{u} = J_\Delta \Omega$$

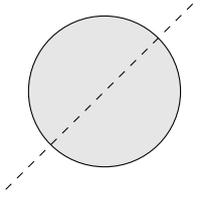
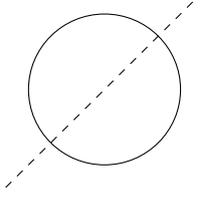
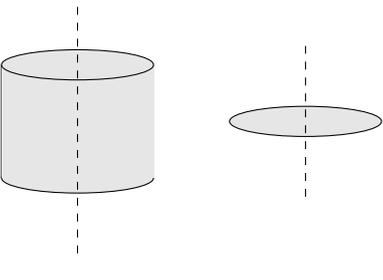
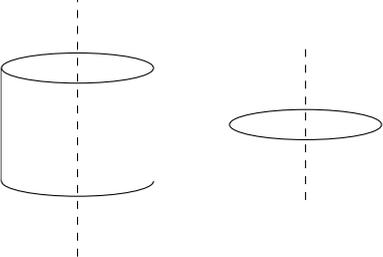
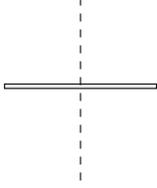
Le théorème du moment cinétique appliqué en  $A$  peut se projeter sur l'axe  $\Delta$ , on obtient :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta \frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum M_{\Delta, \vec{F}_{ext}}$$

L'énergie cinétique du solide s'exprime :

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2$$

### I.4.6 Moments d'inertie usuels

<p>Boule homogène de rayon <math>R</math> et de masse <math>M</math>.  <math>\Delta</math> passe par le centre.</p>		$J_{\Delta} = \frac{2}{5}MR^2$
<p>Sphère creuse de rayon <math>R</math> et de masse <math>M</math>.  <math>\Delta</math> passe par le centre.</p>		$J_{\Delta} = \frac{2}{3}MR^2$
<p>Cylindre plein homogène ou disque homogène de rayon <math>R</math> et de masse <math>M</math>.  <math>\Delta</math> est l'axe de révolution.</p>		$J_{\Delta} = \frac{1}{2}MR^2$
<p>Cylindre creux ou anneau de rayon <math>R</math> et de masse <math>M</math>.  <math>\Delta</math> est l'axe de révolution.</p>		$J_{\Delta} = MR^2$
<p>Tige homogène de longueur <math>l</math> et de masse <math>M</math>.  <math>\Delta</math> est perpendiculaire à la tige et passe par son centre.</p>		$J_{\Delta} = \frac{1}{12}Ml^2$

### I.4.7 Théorème de Huygens

On considère un solide de masse  $M$  et de moment d'inertie  $J_{\Delta}$  par rapport à un axe  $\Delta$  quelconque. On définit un axe  $\Delta_G$ , parallèle à  $\Delta$  et passant par le centre d'inertie du solide. La distance entre  $\Delta$  et  $\Delta_G$  est notée  $d$ .

**Théorème de Huygens** Les moments d'inertie par rapport aux axes  $\Delta$  et  $\Delta_G$  sont reliés par la relation :

$$J_{\Delta} = J_{\Delta_G} + Md^2$$

**Exemple** On considère une tige homogène de longueur  $l$  et de masse  $M$ . Calculons son moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta$ , perpendiculaire à la tige et passant par l'une de ses extrémités.

$$J_{\Delta} = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}Ml^2$$

### I.4.8 Contact entre solides

**Vitesse de glissement** On considère deux solides  $S_1$  et  $S_2$  en contact ponctuel. On définit la vitesse de glissement au point de contact  $I$  de  $S_1$  par rapport à  $S_2$  telle que :

$$\vec{v}_g = \vec{v}_{I,1} - \vec{v}_{I,2}$$

Il y a roulement sans glissement si  $\vec{v}_g = \vec{0}$ .

**Lois de Coulomb** Soit  $\vec{N}$  la composante normale et  $\vec{T}$  la composante tangentielle de la réaction de contact d'un solide sur un support.

— En cas de non glissement ( $\vec{v}_g = \vec{0}$ ) :

$$|\vec{T}| \leq f_s |\vec{N}|$$

avec  $f_s$  le coefficient de frottement statique.

— En cas de glissement ( $\vec{v}_g \neq \vec{0}$ ) :

$$\vec{T} = -f_d |\vec{N}| \vec{u}_g$$

avec  $f_d$  le coefficient de frottement dynamique et  $\vec{u}_g$  un vecteur unitaire de même sens et direction que  $\vec{v}_g$ . Usuellement, on considère que  $f_d \approx f_s \approx f$  le coefficient de frottement.

### I.4.9 Exercice d'application

On considère un disque homogène de rayon  $R$  et de masse  $M$ . Il roule sans glissement le long d'un plan incliné d'axe  $x$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. Le coefficient de glissement est noté  $f$ .

1. Calculer son moment d'inertie  $J$  par rapport à l'axe  $\Delta$  perpendiculaire au disque et passant par son centre d'inertie  $G$ .
2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique, puis le théorème du moment cinétique par rapport à  $\Delta$  pour aboutir à l'équation du mouvement.
3. Appliquer le second théorème de Koenig pour remonter à son énergie cinétique dans le référentiel du laboratoire.
4. Calculer l'angle limite  $\alpha_l$  au-delà duquel le disque commence à glisser.

Solution :

1.

$$J = \iiint r^2 dm = \sigma \iint r^2 r dr d\theta = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\sigma R^4 \pi}{2} = \frac{1}{2} MR^2$$

2. Principe fondamental de la dynamique selon  $x$  et  $y$  :

$$\begin{cases} M\ddot{x} = Mg \sin \alpha - T \\ 0 = -Mg \cos \alpha + N \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à  $\Delta$  :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = J\ddot{\theta} = \frac{1}{2} MR^2 \ddot{\theta} = \underbrace{M_{\vec{P}}}_{=0} + \underbrace{M_{\vec{N}}}_{=0} + M_{\vec{T}} = -RT$$

Or pour un roulement sans glissement :

$$v_{I,\text{plan}} = v_{I,\text{disque}} = \dot{x} + R\dot{\theta} = 0 \implies \dot{x} = -R\dot{\theta}$$

On en déduit l'équation différentielle sur  $x$  :

$$\ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

Puis les équations du mouvement :

$$x(t) = \frac{t^2 g \sin \alpha}{3} \iff \theta(t) = -\frac{t^2 g \sin \alpha}{3R}$$

3. L'énergie cinétique dans le référentiel du laboratoire s'écrit :

$$E_c = E_c|_{R^*} + \frac{1}{2}Mv_G^2 = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 = \frac{1}{3}Mg^2 \sin^2(\alpha) t^2$$

4. La condition de non glissement n'est plus respectée à partir d'un angle  $\alpha_l$  tel que :

$$T = fN \iff \frac{1}{3}Mg \sin \alpha_l = fMg \cos \alpha_l \iff \tan \alpha_l = 3f$$

## II Étude de quelques déformations élastiques

Dans cette partie, nous allons étudier plusieurs cas simples de déformations. La généralisation de la théorie de l'élasticité sera effectuée dans la partie suivante. Nous supposons ici que toutes les sollicitations sont suffisamment faibles pour obtenir des réponses élastiques linéaires.

### II.1 Traction uniaxiale d'un solide

On considère un parallélépipède rectangle isotrope de dimensions  $\{L_x, L_y, L_z\}$ . On lui applique une force de traction  $\vec{F}$ , uniformément répartie sur les deux surfaces perpendiculaires à l'axe  $x$ .

On définit l'allongement relatif du matériau dans la direction  $x$ , ou **déformation longitudinale** :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta L_x}{L_x}$$

La force par unité de surface, ou **contrainte**, qui s'exerce sur les deux surfaces  $S_x = L_y L_z$  s'exprime :

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{S_x}$$

En appliquant la **loi de Hooke**, on peut relier ces deux paramètres par une loi linéaire :

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} \iff \frac{\Delta L_x}{L_x} = \frac{1}{E} \frac{F}{S_x}$$

avec  $E$  le module d'Young du matériau, il a la dimension d'une pression.

Quelques ordres de grandeur :  $E_{\text{gel}} \approx 100$  Pa,  $E_{\text{caoutchouc}} \approx 10^6$  Pa,  $E_{\text{métal}} \approx 10^{11}$  Pa,  $E_{\text{diamant}} \approx 10^{12}$  Pa...

Les allongements relatifs dans les directions  $y$  et  $z$ , ou déformations transverses, sont définis de manière analogue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{yy} = \frac{\Delta L_y}{L_y} \\ \epsilon_{zz} = \frac{\Delta L_z}{L_z} \end{array} \right.$$

La loi de Hooke les relie à la contrainte par la relation :

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \iff \frac{\Delta L_y}{L_y} = \frac{\Delta L_z}{L_z} = -\frac{\nu}{E} \frac{F}{S_x}$$

avec  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau (sans dimension). On peut montrer que pour des raisons de stabilité :

$$-1 < \nu < 0,5$$

avec  $\nu \approx 0,3$  pour la plupart des matériaux. Un matériau tel que  $\nu < 0$  est un matériau auxétique.

### II.2 Solide soumis à une pression

On considère un parallélépipède rectangle isotrope de dimensions  $\{L_x, L_y, L_z\}$ . Il est soumis à une pression uniforme  $P$  sur toutes ses faces.

La déformation dans la direction  $x$  est la somme de trois termes :

- la déformation longitudinale due à la pression sur les surfaces  $S_x$ ,
- la déformation transverse due à la pression sur les surfaces  $S_y$ ,
- la déformation transverse due à la pression sur les surfaces  $S_z$ .

La loi de Hooke s'écrit donc :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta L_x}{L_x} = \frac{1}{E}(-P) - \frac{\nu}{E}(-P) - \frac{\nu}{E}(-P) = -\frac{P}{E}(1 - 2\nu)$$

De même selon  $y$  et  $z$  :

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\frac{P}{E}(1 - 2\nu)$$

La variation relative du volume  $V = L_x L_y L_z$  du solide sous cette pression vaut :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L_x}{L_x} + \frac{\Delta L_y}{L_y} + \frac{\Delta L_z}{L_z} = -\frac{3P}{E}(1 - 2\nu)$$

### II.3 Cisaillement d'un solide

On considère un parallélépipède rectangle isotrope de dimensions  $\{L_x, L_y, L_z\}$ . On lui applique une force de cisaillement  $\vec{F}$  dans la direction  $x$ , uniformément répartie sur les deux surfaces  $S_y$ . En réponse, les surfaces  $S_x$  s'inclinent d'un angle  $\theta$  par rapport à l'axe  $y$ .

Pour une faible déformation, l'angle de déformation s'exprime :

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{u_x}{L_y}$$

On peut le relier à la contrainte de cisaillement par la loi de Hooke :

$$\theta = \frac{1}{G} \left( \frac{F}{S_y} \right)$$

avec  $G$  le module de cisaillement du matériau, il a la dimension d'une pression. On peut montrer qu'il s'exprime en fonction de  $E$  et  $\nu$  tel que :

$$G = \frac{E}{2(1 - \nu)}$$

### II.4 Flexion d'une poutre

On considère une poutre horizontale de longueur  $L$  et de section rectangulaire  $S$ . L'une de ses extrémités est encastree à angle droit en  $x = 0$ . Sur l'extrémité en  $x = L$ , on applique une force  $\vec{F} = F \vec{e}_y$  verticale qui engendre une flexion de la poutre. On néglige les effets de la pesanteur.

**Ligne neutre** On définit la ligne neutre d'une poutre, ou fibre neutre, comme la ligne passant par le centre d'inertie de ses sections droites. Si la poutre est symétrique, elle correspond à la ligne passant par le **milieu de la poutre**. De plus, lors d'un mouvement de flexion la ligne neutre ne subit ni allongement ni compression, sa longueur est donc constante.

Pour caractériser la déformation, nous allons déterminer le déplacement vertical de la ligne neutre  $u_y(x)$  le long de la poutre, aussi appelé « déformée ».

**Équilibre statique de la poutre** La poutre étant encastree en  $x = 0$ , le mur exerce sur elle une force de réaction  $\vec{R}$  (comme tout support) et un moment  $\vec{M}_e = M_e \vec{e}_z$ .

À l'équilibre statique, la somme des forces appliquées sur la poutre est nulle :

$$\vec{R} + \vec{F} = \vec{0} \implies \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y + F = 0 \end{cases}$$

De même, la somme des moments en  $O$  est nulle :

$$\begin{aligned} \vec{M}_e + \vec{M}_{O, \vec{R}} + \vec{M}_{O, \vec{F}} &= \vec{0} \\ \vec{M}_e + \vec{OO} \wedge \vec{R} + (L\vec{e}_x + u_y(L)\vec{e}_y) \wedge F\vec{e}_y &= \vec{0} \\ M_e + LF &= 0 \end{aligned}$$

**Effort tranchant et moment fléchissant** La déformation de la poutre engendre des efforts internes dans le matériau. On appelle :

- effort tranchant  $\vec{V}(x)$  la force qui s'exerce sur la section perpendiculaire à la ligne neutre à l'abscisse  $x$ ,
- moment fléchissant  $\vec{M}(x)$  le moment qui s'exerce sur la section perpendiculaire à la ligne neutre à l'abscisse  $x$ .

Appliquons l'équilibre statique sur la **portion de poutre comprise entre 0 et  $x$** .

La somme des forces étant nulle :

$$\vec{R} + \vec{V}(x) = \vec{0} \implies \begin{cases} V_x(x) = 0 \\ R_y + V_y(x) = 0 \end{cases}$$

La somme des moments en  $O$  étant nulle :

$$M_e + xV_y(x) + M(x) = 0$$

On en déduit l'expression des efforts internes :

$$\begin{cases} V_x(x) = 0 \\ V_y(x) = -R_y = F \\ M(x) = -M_e - xV_y(x) = LF - xF = F(L - x) \end{cases}$$

**Rayon de courbure** Considérons un petit élément de longueur  $\Delta x$  de la poutre non-déformée. Après la déformation, la longueur de sa ligne neutre est conservée et peut s'écrire  $\Delta x = R\Delta\theta$ , avec  $R$  le rayon de courbure.

Une fibre située à une hauteur  $y$  de la ligne neutre, initialement de longueur  $R\Delta\theta$  est comprimée lors de la déformation. Sa longueur étant maintenant de  $(R - y)\Delta\theta$ , elle subit un allongement relatif :

$$\epsilon_{xx} = \frac{(R - y)\Delta\theta - R\Delta\theta}{R\Delta\theta} = -\frac{y}{R}$$

On en déduit la contrainte longitudinale avec la loi de Hooke :

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} = -E\frac{y}{R}$$

La force longitudinale qui s'exerce sur cette fibre de section  $dS$  vaut :

$$d\vec{F} = \sigma_{xx}dS\vec{e}_x = -E\frac{y}{R}dS\vec{e}_x$$

Le moment de cette force par rapport au centre d'inertie  $G$  de l'élément, situé sur la ligne neutre, s'écrit :

$$d\vec{M} = y\vec{e}_y \wedge d\vec{F} = \frac{Ey^2}{R}dS\vec{e}_z$$

Le moment fléchissant  $M(x)$  correspond à la somme de ces moments que l'on intègre sur la section  $S$  de la poutre, d'où :

$$M(x) = \iint_S \frac{Ey^2}{R}dS = \frac{EI}{R}$$

avec  $I = \iint_S y^2 dS$  le moment quadratique de la poutre défini par rapport à la ligne neutre.

Or le rayon de courbure  $R$  est défini comme l'inverse de la courbure  $\gamma$  tel que :

$$\frac{1}{R} = \gamma = \frac{\Delta\theta}{\Delta x} \approx \frac{d\theta}{dx}$$

Dans l'approximation des petits angles, on a :

$$\theta \approx \frac{\Delta u_y}{\Delta x} \approx \frac{du_y}{dx}$$

D'où l'expression du rayon de courbure :

$$\frac{1}{R} \approx \frac{d^2 u_y}{dx^2}$$

On en déduit la relation entre le moment fléchissant et le déplacement de la ligne neutre pour une poutre :

$$EI \frac{d^2 u_y}{dx^2} = M(x)$$

**Équation de la déformée** En remplaçant  $M(x)$  par son expression, on obtient :

$$EI \frac{d^2 u_y}{dx^2} = F(L - x)$$

La poutre étant encastree, les conditions aux limites en  $x = 0$  s'écrivent :

$$\begin{cases} u_y(x=0) = 0 \\ \theta(x=0) = \left. \frac{du_y}{dx} \right|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

Au final, on obtient l'équation de la déformée :

$$u_y(x) = \frac{F}{EI} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

**Cas d'une poutre de section rectangulaire** Dans le cas d'une poutre de section rectangulaire  $S = l_y l_z$ , son moment quadratique par rapport à la ligne neutre s'exprime :

$$I = \iint_S y^2 dS = \int_{-l_y/2}^{l_y/2} y^2 dy \int_{-l_z/2}^{l_z/2} dz = \frac{l_y^3 l_z}{12}$$

D'où l'équation de la déformée :

$$u_y(x) = \frac{12F}{El_y^3 l_z} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

## II.5 Flambage d'une poutre

On considère une poutre horizontale de longueur  $L$  et de section  $S$ . On applique une force horizontale  $\vec{F}$  à chacune de ses extrémités de manière à comprimer la poutre. Ses extrémités sont maintenues, mais l'angle est libre de varier (pas de moment d'encastrement). On néglige les effets de la pesanteur.

Nous allons chercher les états d'équilibre de la poutre en fonction de la force appliquée.

Pour la **portion de poutre comprise entre 0 et  $x$** , appliquons l'équilibre statique des forces :

$$\vec{F} + \vec{V}(x) = \vec{0} \implies \begin{cases} V_x(x) = -F \\ V_y(x) = 0 \end{cases}$$

Appliquons maintenant l'équilibre statique des moments par rapport au point  $O$  :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O,\vec{F}} + \vec{M}_{O,\vec{V}} + \vec{M}(x) &= \vec{0} \\ (x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y) \wedge V_x(x)\vec{e}_x + \vec{M}(x) &= \vec{0} \\ M(x) = u_y V_x(x) &= -u_y F \end{aligned}$$

Comme dans le cas de la flexion, la relation entre le moment fléchissant et le déplacement de la ligne neutre s'écrit :

$$EI \frac{d^2 u_y}{dx^2} = M(x)$$

D'où l'équation différentielle sur  $u_y$  :

$$EI \frac{d^2 u_y}{dx^2} = -u_y F$$

La solution est de la forme :

$$u_y(x) = A \cos \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} x \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} x \right)$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes.

En utilisant les conditions aux limites  $u_y(x=0) = u_y(x=L) = 0$ , on déduit qu'il existe deux solutions :

— soit la poutre est rectiligne :

$$u_y(x) = 0$$

— soit la poutre forme une sinusoïde :

$$u_y(x) = B \sin \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} x \right)$$

avec  $B \neq 0$  et  $\sqrt{\frac{F}{EI}} L = k\pi$  où  $k$  est un entier non-nul.

La force minimale à appliquer pour former la sinusoïde correspond au cas où  $k = 1$ , on l'appelle force critique d'Euler :

$$\sqrt{\frac{F_c}{EI}} L = \pi \iff F_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Au final :

- Lorsque  $F < F_c$ , la poutre est rectiligne car c'est la seule solution.
- Lorsque  $F > F_c$ , on peut montrer que la poutre rectiligne est instable. La poutre flambe et prend la forme d'un arc de sinusoïde. L'amplitude  $B$  est déterminée en sortant de l'approximation des petits angles, et en utilisant la conservation de la longueur  $L$  de la ligne neutre. Cependant, en pratique cela conduit souvent à la rupture de la poutre.

## II.6 Modes de vibration transverse d'une poutre

On considère une poutre horizontale de longueur  $L$ , de section rectangulaire  $S$  et de masse volumique  $\rho$ . L'une de ses extrémités est encastree à angle droit en  $x = 0$ . L'autre extrémité en  $x = L$  est libre. On néglige les effets de la pesanteur.

Nous allons appliquer les théorèmes de la mécanique sur un petit élément de longueur  $dx$ , de centre  $G$ , à l'abscisse  $x$  de la poutre. Pour cela, il est nécessaire de définir une convention pour orienter les forces et les moments : nous choisissons d'orienter positivement les efforts appliqués par l'élément de droite sur l'élément de gauche à travers une section.

**Principe fondamental de la dynamique** Il s'exerce un effort tranchant  $\vec{T}(x)$  à chaque extrémité de l'élément. D'après la convention adoptée et le principe des actions réciproques, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho S dx \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \vec{e}_y &= \vec{T} \left( x + \frac{dx}{2} \right) + \vec{T} \left( x - \frac{dx}{2} \right) \\ \rho S dx \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= T \left( x + \frac{dx}{2} \right) - T \left( x - \frac{dx}{2} \right) \\ \rho S dx \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &\approx \left[ T(x) + \frac{dx}{2} \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \left[ T(x) - \frac{dx}{2} \frac{\partial T}{\partial x} \right] \\ \rho S \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &\approx \frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned}$$

**Théorème du moment cinétique** En plus des efforts tranchants, il s'exerce un moment fléchissant  $\vec{M}(x)$  à chaque extrémité. Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\delta J \ddot{\vec{e}}_z = \vec{M}_{G, \vec{T}(x+\frac{dx}{2})} + \vec{M}_{G, \vec{T}(x-\frac{dx}{2})} + \vec{M}\left(x + \frac{dx}{2}\right) + \vec{M}\left(x - \frac{dx}{2}\right)$$

avec  $\delta J$  le moment d'inertie de l'élément de longueur  $dx$ . On peut montrer *a posteriori* que le terme  $\delta J \ddot{\theta}$  est négligeable dans la plupart des cas, en particulier pour les grandes longueurs d'onde.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dx}{2} T\left(x + \frac{dx}{2}\right) - \frac{dx}{2} \left[-T\left(x - \frac{dx}{2}\right)\right] + M\left(x + \frac{dx}{2}\right) - M\left(x - \frac{dx}{2}\right) \\ 0 &= \frac{dx}{2} \left[T(x) + \frac{dx}{2} \frac{\partial T}{\partial x}\right] + \frac{dx}{2} \left[T(x) - \frac{dx}{2} \frac{\partial T}{\partial x}\right] + \left[M(x) + \frac{dx}{2} \frac{\partial M}{\partial x}\right] - \left[M(x) - \frac{dx}{2} \frac{\partial M}{\partial x}\right] \\ 0 &= T(x) + \frac{\partial M}{\partial x} \end{aligned}$$

**Équation de propagation des ondes transverses** En utilisant la relation entre le moment fléchissant et le déplacement de la ligne neutre :

$$EI \frac{d^2 u_y}{dx^2} = M(x)$$

On obtient finalement l'équation de propagation des ondes transverses :

$$\begin{aligned} \rho S \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \\ \rho S \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= -EI \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} \end{aligned}$$

**Solution générale de l'équation** En cherchant des solutions sous la forme complexe  $u_y(x, t) = \lambda e^{iqx} e^{i\omega t}$ , on aboutit à une solution générale réelle de la forme :

$$u_y(x, t) = [A \cosh(kx) + B \sinh(kx) + C \cos(kx) + D \sin(kx)] \cos(\omega t)$$

avec  $k = \left(\frac{\rho S}{EI} \omega^2\right)^{1/4}$ .

**Cas de la poutre encastree à une extrémité** Nous disposons des conditions aux limites suivantes :

— en  $x = 0$  : la poutre est encastree, le déplacement et l'angle sont nuls

$$\begin{cases} u_y(x=0) = 0 \\ \theta(x=0) = \frac{\partial u_y}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

— en  $x = L$  : l'extrémité est libre, il ne s'applique aucun moment et aucune force

$$\begin{cases} M(x=L) = EI \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \\ T(x=L) = -\frac{\partial M}{\partial x} \Big|_{x=L} = -EI \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^3} \Big|_{x=L} = 0 \end{cases}$$

En utilisant ces conditions aux limites avec la solution générale de l'équation, on obtient un système de 4 équations à 4 inconnus. Sa résolution aboutit à la condition :

$$\cosh(kL) \cos(kL) + 1 = 0$$

Il n'existe pas de solution analytique à cette équation. Une résolution numérique nous donne les premières racines :

$$(kL)_0 \approx 1,875 \quad (kL)_1 \approx 4,694 \quad (kL)_2 \approx 7,855 \dots$$

On peut retrouver des valeurs approchées de ces racines en remarquant que  $\cosh(kL) \rightarrow \infty$  rapidement. L'équation se résume alors à  $\cos(kL) \approx 0$ , d'où les solutions (en particulier pour  $n$  grand) :

$$(kL)_n \approx \frac{\pi}{2} + n\pi$$

On en déduit les modes propres de vibrations de la poutre :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \left[\frac{(kL)_n}{L}\right]^2 \approx \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \frac{\pi^2}{4L^2} (1 + 2n)^2$$

**Application à la mesure d'un module d'Young** Nous disposons d'une lame en laiton (P78.17) de dimensions  $\{l_x = 400 \text{ mm}, l_y = 2 \text{ mm}, l_z = 10 \text{ mm}\}$  et de masse  $M \approx 67 \text{ g}$ . Nous pouvons l'encastrier à l'aide de serre-joint afin d'obtenir une poutre vibrante une longueur  $L$  ajustable. La fréquence de son mode fondamental est :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho S} \frac{1.875^2}{L^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{El_y^3 l_z / 12}{M/l_x} \frac{1.875^2}{L^2}} \approx 3,53 \cdot 10^{-6} \times \frac{\sqrt{E}}{L^2}$$

À partir de la mesure de  $f_0$  pour différentes longueurs  $L$ , on peut remonter à son module d'Young  $E$  par régression linéaire, on obtient :

$$E \approx \quad \text{GPa}$$

Le module d'Young du laiton est généralement de l'ordre de 100 GPa.

### III Théorie de l'élasticité linéaire isotrope

#### III.1 Tenseur des déformations

**Champ de déplacement** On considère un point  $M$  d'un solide, repéré par sa position  $\vec{r}$ . Après déformation du solide, le point  $M$  se retrouve à la position  $\vec{r}'$ .

Le champ de déplacement est défini pour tout point  $M$  tel que :

$$\vec{u}(M(\vec{r})) = \vec{r}' - \vec{r}$$

**Tenseur gradient de déplacement** Le tenseur gradient de déplacement  $\vec{\nabla}\vec{u}$  est un tenseur de rang 2, défini tel que :

$$\vec{\nabla}\vec{u}\Big|_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \partial_j u_i$$

avec  $x_j = x, y$  ou  $z$  en coordonnées cartésiennes.

On peut le décomposer en la somme de deux tenseurs :

— un tenseur symétrique  $\epsilon_{ij}$ , appelé **tenseur des déformations** :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

— un tenseur antisymétrique  $\omega_{ij}$ , qui ne joue pas de rôle en élasticité des solides :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

On retrouve bien :

$$\vec{\nabla}\vec{u}\Big|_{ij} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

Le tenseur des déformations  $\epsilon_{ij}$  étant symétrique, il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Ses axes sont alors les axes principaux du tenseur  $\epsilon_{ij}$ .

**Distance entre deux points** Soient  $M(\vec{r})$  et  $N(\vec{r} + \vec{dr})$  deux points voisins d'un solide, on note  $dl$  la distance entre ces points.

Lorsque le solide est non-déformé, la distance s'exprime telle que :

$$dl^2 = \vec{dr}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Après déformation du solide, le point  $M$  se retrouve à la position :

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}(\vec{r})$$

et le point  $N$  se retrouve à la position :

$$(\vec{r} + \vec{dr})' = (\vec{r} + \vec{dr}) + \vec{u}(\vec{r} + \vec{dr})$$

La distance  $dl'$  entre ces deux points est alors telle que :

$$dl'^2 = \left( (\vec{r} + \vec{dr})' - \vec{r}' \right)^2 = \left( \vec{dr} + \vec{u}(\vec{r} + \vec{dr}) - \vec{u}(\vec{r}) \right)^2$$

En notation tensorielle, les deux points étant voisins on peut écrire :

$$\left( \vec{u}(\vec{r} + \vec{dr}) - \vec{u}(\vec{r}) \right)_i \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

D'où :

$$dl'^2 = \left( dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \right)^2$$

En ne gardant que les termes d'ordre le plus bas, on obtient :

$$dl'^2 \approx dx_i dx_i + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j$$

On peut exprimer le second terme en fonction du tenseur des contraintes car :

$$\epsilon_{ij} dx_i dx_j = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_j dx_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j$$

La distance après déformation s'exprime donc en fonction de  $\epsilon_{ij}$  :

$$dl'^2 = dl^2 + 2\epsilon_{ij} dx_i dx_j$$

**Dilatation volumique** On considère un volume élémentaire  $dV = dL_x dL_y dL_z$  d'un solide non-déformé. Après déformation du solide, ce volume vaut  $dV' = dL'_x dL'_y dL'_z$ .

En se plaçant dans la base où  $\epsilon_{ij}$  est diagonal, on peut exprimer simplement  $dL'_x$  :

$$dL'_x{}^2 = dL_x^2 + 2\epsilon_{xx} dL_x dL_x$$

Soit au premier ordre en  $\epsilon_{ij}$  :

$$dL'_x \approx (1 + \epsilon_{xx}) dL_x$$

En faisant de même pour  $dL'_y$  et  $dL'_z$ , on obtient l'expression de la **dilatation volumique** en fonction de  $\epsilon_{ij}$  :

$$\begin{aligned} \frac{dV'}{dV} &= \frac{(1 + \epsilon_{xx}) dL_x (1 + \epsilon_{yy}) dL_y (1 + \epsilon_{zz}) dL_z}{dL_x dL_y dL_z} \approx 1 + \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \\ \frac{dV'}{dV} &= 1 + \text{Tr}(\epsilon) \end{aligned}$$

### III.2 Tenseur des contraintes

**Définition du tenseur** On considère un élément de surface  $\vec{dS}_x = dS_x \vec{e}_x$  à l'intérieur d'un solide qui subit une déformation. Les efforts internes dans le matériau exercent une force  $\vec{dF}$  sur cette surface, qui n'est pas forcément orientée selon la direction  $\vec{e}_x$ .

On peut l'exprimer :

$$\begin{aligned} \vec{dF} &= dF_x \vec{e}_x + dF_y \vec{e}_y + dF_z \vec{e}_z \\ \vec{dF} &= \sigma_{xx} dS_x \vec{e}_x + \sigma_{yx} dS_x \vec{e}_y + \sigma_{zx} dS_x \vec{e}_z \end{aligned}$$

De même, la force exercée sur un élément de surface  $\vec{dS}_y = dS_y \vec{e}_y$  s'écrit :

$$\vec{dF} = \sigma_{xy} dS_y \vec{e}_x + \sigma_{yy} dS_y \vec{e}_y + \sigma_{zy} dS_y \vec{e}_z$$

et la force exercée sur un élément de surface  $\vec{dS}_z = dS_z \vec{e}_z$  s'écrit :

$$\vec{dF} = \sigma_{xz} dS_z \vec{e}_x + \sigma_{yz} dS_z \vec{e}_y + \sigma_{zz} dS_z \vec{e}_z$$

On peut généraliser en exprimant sous forme tensorielle la force  $\vec{dF}$  exercée sur un élément de surface quelconque  $\vec{dS}$  en un point  $M$  du solide :

$$\vec{dF} = [\sigma(M)] \vec{dS} \iff dF_i = \sigma_{ij}(M) dS_j$$

avec  $[\sigma(M)]$  le **tenseur des contraintes** au point  $M$ . C'est un tenseur de rang 2 (donc 9 composantes), chaque composante  $\sigma_{ij}$  représente la force exercée dans la direction  $i$  sur la composante  $j$  de la surface.

**Symétrie du tenseur** En appliquant le théorème du moment cinétique à un élément de volume, on peut montrer qu'en l'absence de couple volumique, le tenseur des contraintes est symétrique :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Cette propriété est strictement vérifiée pour les solides isotropes, mais on peut également l'appliquer dans le cas des solides anisotropes car les couples élastiques sont en général négligeables.

### III.3 Relation contrainte-déformation

**Loi de Hooke** Dans le cadre de l'élasticité linéaire, la loi de Hooke relie les composantes du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes par une relation linéaire :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$$

avec  $[C]$  un tenseur de rang 4, composé de  $3^4 = 81$  coefficients élastiques.

**Réduction du nombre de coefficients** En prenant en compte la symétrie du tenseur des déformations ( $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ ), la symétrie du tenseur des contraintes ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ) et la stabilité thermodynamique du matériau, on peut montrer que les 81 coefficients  $C_{ijkl}$  ne s'expriment qu'en fonction de 21 paramètres indépendants.

Pour un solide totalement anisotrope, il est nécessaire de connaître ces 21 paramètres pour décrire son comportement lors d'une déformation quelconque.

Pour un solide isotrope, sa réponse à une déformation est identique pour toutes les directions de l'espace. On peut alors montrer que toutes les composantes  $C_{ijkl}$  ne s'expriment qu'en fonction de 2 coefficients :  $\lambda$  et  $\mu$ . Ce sont les coefficients de Lamé du matériau, ils ont la dimension d'une pression.

La loi de Hooke s'écrit alors dans le cas d'un matériau isotrope :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij}$$

avec  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker.

On peut inverser cette relation pour exprimer le tenseur des déformations en fonction du tenseur des contraintes :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

**Autres couples de coefficients élastiques** Nous avons établi la loi de Hooke en utilisant les coefficients de Lamé, mais il est aussi possible de l'exprimer en fonction d'autres coefficients élastiques, comme par exemple le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ .

On peut montrer que  $E$  et  $\nu$  s'expriment en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$  tels que :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

La loi de Hooke s'écrit alors :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left( \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \iff \epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

Elle peut également s'exprimer en fonction de nombreux autres coefficients élastiques, tous reliés aux coefficients de Lamé, comme par exemple le module de cisaillement  $G = \mu$ , ou le module de compressibilité :  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ .

### III.4 Thermodynamique de la déformation

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, on peut montrer que l'énergie libre volumique d'un solide à l'équilibre thermodynamique s'exprime :

$$f = f_0 + \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} = f_0 + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$$

### III.5 Équation de Navier

**Conservation de la quantité de mouvement** On considère un ensemble de points de volume  $V$  mobile, de surface  $S$  et de masse volumique  $\rho$ . On note  $\vec{n}$  le vecteur normal en chaque point de la surface orienté vers l'extérieur.

L'ensemble est soumis à des forces volumiques extérieures de résultante  $\vec{f}$  (la gravité par exemple), et à des contraintes internes  $[\sigma]$  (surfactive). L'application du principe fondamental de la dynamique à cet ensemble donne :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV = \iint_S [\sigma] \vec{n} dS + \iiint_V \vec{f} dV$$

Le théorème de dérivation sous le signe somme (voir *Rhéophysique* pour la démonstration) montre que pour toute grandeur  $\vec{A}(x, y, z, t)$  associée à un volume  $V$  mobile :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{A} dV = \iiint_V \rho \frac{D\vec{A}}{Dt} dV$$

avec  $\frac{D}{Dt}$  la dérivée particulaire définie telle que :

$$\frac{D\vec{A}}{Dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \iff D_t A_i = \partial_t A_i + (v_j \cdot \partial_j) A_i$$

En utilisant cette propriété et le théorème de la divergence, on obtient :

$$\iiint_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot [\sigma] dV + \iiint_V \vec{f} dV$$

Cette égalité étant vraie pour tout volume  $V$ , on en déduit :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot [\sigma] + \vec{f}$$

**Cas des solides isotropes** Dans le cas d'un solide, la vitesse correspond à la dérivée du déplacement :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

et le terme d'advection de la dérivée particulaire  $(v_j \cdot \partial_j) v_i$  est négligeable. L'équation s'écrit alors :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \cdot [\sigma] + \vec{f}$$

Pour un solide isotrope, en se plaçant dans l'approximation de l'élasticité linéaire, on peut remplacer  $[\sigma]$  par son expression. D'où en notation tensorielle :

$$\begin{aligned} \rho \partial_{tt} u_i &= \partial_j \sigma_{ij} + f_i \\ \rho \partial_{tt} u_i &= \partial_j (2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk}) + f_i \\ \rho \partial_{tt} u_i &= \partial_j \left( 2\mu \frac{1}{2} [\partial_j u_i + \partial_i u_j] + \lambda \delta_{ij} \partial_k u_k \right) + f_i \\ \rho \partial_{tt} u_i &= \mu \partial_{jj} u_i + \mu \partial_{ij} u_j + \lambda \partial_{ik} u_k + f_i \\ \rho \partial_{tt} u_i &= \mu \partial_{jj} u_i + (\mu + \lambda) \partial_i (\partial_j u_j) + f_i \end{aligned}$$

On aboutit à l'**équation de Navier** :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu \vec{\Delta} \vec{u} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) + \vec{f}$$

Elle peut s'écrire de façon équivalente sous la forme :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) - \mu \vec{\nabla} \wedge \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \right) + \vec{f}$$

## III.6 Retour sur les exemples précédents

### III.6.1 Traction uniaxiale d'un solide

Nous allons retrouver les expressions précédemment obtenues dans la partie II.1 en calculant le tenseur des contraintes, puis en appliquant la loi de Hooke.

On considère un parallélépipède rectangle isotrope de dimensions  $\{L_x, L_y, L_z\}$ . On lui applique une force de traction  $\vec{F}$ , uniformément répartie sur les deux surfaces  $S_x$ .

1. Déterminer le tenseur des contraintes  $[\sigma]$  en tout point du solide à partir de sa définition.
2. Calculer le tenseur des déformations  $[\epsilon]$  à l'aide de la loi de Hooke avec les coefficients élastiques  $E$  et  $\nu$ .
3. En déduire le champ de déplacement  $\vec{u}$ .
4. Exprimer l'énergie libre volumique  $f$  du solide.

Solution :

1. La force est exercée dans la direction  $x$  sur la surface  $S_x$  :

$$F = \sigma_{xx} S_x$$

D'où le tenseur des contraintes :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \frac{F}{S_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. En appliquant la loi de Hooke, on obtient le tenseur des déformations :

$$[\epsilon] = \begin{pmatrix} \frac{F}{ES_x} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu F}{ES_x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu F}{ES_x} \end{pmatrix}$$

3. On cherche un champ de déplacement  $\vec{u}$  tel que sa dérivée soit reliée au tenseur des déformations par la relation :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

On obtient à une constante additive près (on la choisit nulle) :

$$\vec{u} = \begin{cases} u_x = \frac{F}{ES_x} x \\ u_y = -\frac{\nu F}{ES_x} y \\ u_z = -\frac{\nu F}{ES_x} z \end{cases}$$

4. L'énergie libre volumique s'exprime :

$$f = f_0 + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \sigma_{ij} = f_0 + \frac{F^2}{2ES_x^2}$$

### III.6.2 Cisaillement d'un solide

Nous allons retrouver les expressions précédemment obtenues dans la partie II.3, en partant cette fois du champ de déformation.

On considère un parallélépipède rectangle isotrope de dimensions  $\{L_x, L_y, L_z\}$ . On lui applique une force de cisaillement  $\vec{F}$  dans la direction  $x$ , uniformément répartie sur les deux surfaces  $S_y$ . En réponse, les surfaces  $S_x$  s'inclinent d'un angle  $\theta$  par rapport à l'axe  $y$ .

1. Déterminer le champ de déplacement  $\vec{u}$  en tout point du solide à partir de sa définition.
2. Calculer le tenseur des déformations  $[\epsilon]$ .
3. En déduire le tenseur des contraintes  $[\sigma]$  avec la loi de Hooke en utilisant les coefficients de Lamé.
4. Retrouver que le module de cisaillement  $G$  est équivalent au second coefficient de Lamé  $\mu$ , sachant qu'il est défini tel que  $\sigma_{xy} = G\theta$ .

Solution :

1. Le champ de déformation  $\vec{u}$  correspond à la différence entre la position du point  $M$  avant déformation et sa position après déformation, d'où :

$$\vec{u}(y) = u_x(y) \vec{e}_x = y \tan \theta \vec{e}_x \approx y\theta \vec{e}_x$$

2. Le tenseur des déformations s'exprime :

$$[\epsilon] = \begin{pmatrix} 0 & \theta/2 & 0 \\ \theta/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Le tenseur des contraintes s'exprime :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & \mu\theta & 0 \\ \mu\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. On trouve immédiatement :  $G = \mu$ .

### III.7 Propagation d'ondes dans un milieu élastique

On considère un milieu élastique semi-infini, de masse volumique  $\rho$ , qui occupe l'espace  $y > 0$ . Il ne s'exerce aucune force volumique à l'intérieur de ce milieu :  $\vec{f} = \vec{0}$ .

**Ondes longitudinales** On exerce une onde plane de compression sur la surface libre en  $y = 0$ . Celle-ci engendre un déplacement :

$$\vec{u}_l(y = 0, t) = U_0 e^{i\omega t} \vec{e}_y$$

Le milieu étant non-dissipatif, nous cherchons un champ de déplacement sous la forme d'une onde plane harmonique :

$$\vec{u}_l(y, t) = U_0 e^{i(\omega t - ky)} \vec{e}_y$$

L'équation de Navier pour ce champ s'écrit :

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2 \vec{u}_l &= (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_l) - \mu \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_l) \\ -\rho\omega^2 \vec{u}_l &= (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla} (-ikU_0 e^{i(\omega t - ky)}) - \mu \vec{\nabla} \wedge (\vec{0}) \\ -\rho\omega^2 \vec{u}_l &= (\lambda + 2\mu) (-k^2 \vec{u}_l) \end{aligned}$$

Nous aboutissons à la relation de dispersion :

$$\omega^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} k^2 = c_l^2 k^2$$

La célérité des ondes longitudinales dans un milieu élastique est donc :

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

**Ondes transverses** On exerce une onde plane de cisaillement sur la surface libre en  $y = 0$ . Celle-ci engendre un déplacement :

$$\vec{u}_t(y = 0, t) = U_0 e^{i\omega t} \vec{e}_x$$

Le milieu étant non-dissipatif, nous cherchons un champ de déplacement sous la forme d'une onde plane harmonique :

$$\vec{u}_t(y, t) = U_0 e^{i(\omega t - ky)} \vec{e}_x$$

L'équation de Navier pour ce champ s'écrit :

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2 \vec{u}_t &= (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_t) - \mu \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_t) \\ -\rho\omega^2 \vec{u}_t &= (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla} (0) - \mu \vec{\nabla} \wedge (ikU_0 e^{i(\omega t - ky)} \vec{e}_y) \\ -\rho\omega^2 \vec{u}_t &= -\mu k^2 \vec{u}_t \end{aligned}$$

Nous aboutissons à la relation de dispersion :

$$\omega^2 = \frac{\mu}{\rho} k^2 = c_t^2 k^2$$

La célérité des ondes transverses dans un milieu élastique est donc :

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

**Cas général** Par analyse vectorielle, on peut montrer qu'un champ de déplacement  $\vec{u}$  peut s'écrire comme la somme du gradient d'un scalaire  $\Phi$  et du rotationnel d'un vecteur  $\vec{A}$  :

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\Phi + \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

En posant :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\Phi = \vec{u}_l & \iff \vec{\nabla} \wedge \vec{u}_l = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{u}_t & \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_t = 0 \end{cases}$$

on remarque que tout champ de déplacement  $\vec{u}$  peut s'écrire comme la somme d'une onde longitudinale  $\vec{u}_l$  de célérité  $c_l$  et d'une onde transverse  $\vec{u}_t$  de célérité  $c_t$ .

**Exemple des ondes sismiques** Dans le cas de la Terre,  $\lambda \approx \mu \approx 10^{11}$  Pa et  $\rho \approx 10^3$  kg/m<sup>3</sup>. On obtient alors des célérités :

$$c_l \approx \sqrt{3}c_t \approx 10 \text{ km/s}$$

A la suite d'un tremblement de terre, les ondes sismiques les plus rapides à se propager sont les ondes longitudinales, appelées « ondes P » (ondes primaires). Elles sont suivies par les ondes transverses, appelées « ondes S » (ondes secondaires), puis par diverses réflexions et par des ondes de surface (ondes de Rayleigh).