

LP-48-Phénomènes de diffractions. Utilisations

Maud

12 juin 2022

1 Pré-requis

-

Références

Table des matières

1	Pré-requis	1
2	Présentation et caractérisation du phénomène	1
2.1	Approche expérimentale	1
2.2	Caractéristiques du phénomène	2
3	Traitement physique de la diffraction	2
3.1	Principe de Huygens Fresnel (1690)	2
3.2	La diffraction de Fraunhofer	3
3.3	Retour sur la manip introductive	3

Introduction pédagogique

Objectifs pour les profs

-

Objectifs pour les élèves

-

Introduction générale

-

2 Présentation et caractérisation du phénomène

2.1 Approche expérimentale

Suite d'expériences non exhaustives :

- Optique [?] p. 296 : diffraction d'un fil (c'est plus spectaculaire) par un laser → **on a une zone sombre au centre de l'image** objectif de microscope après le laser pour éclater le faisceau, on fait suivre par un trou de diamètre 100 micromètres (au point de convergence du faisceau) pour épurer¹ le faisceau, on place l'objet dans ce faisceau et on regarde l'image sur un écran au loin
- MF : cuve à onde, diffraction par une fente → **surface d'onde sphérique** on fait varier l'ouverture pour montrer qu'il y a un régime limite entre diffraction et non.
- Acoustique : diffraction de la voix à travers une porte (en effet longueur d'onde plus grande

1. permet d'éliminer les fréquences spatiales élevées résultant de la diffraction du faisceau laser par les traces de doigts, de rayures ou de poussière présente sur la lentille

2.2 Caractéristiques du phénomène

On remarque que l'on a deux cas :

- la largeur de l'ouverture est très grande devant la longueur d'onde (environ 10 fois plus), l'onde est soit réfléchiée sur l'obstacle soit elle est transmise sans aucune modification (comme un simple diaphragme).
- la largeur de l'ouverture est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde. L'onde réfléchiée est de la même nature que l'onde incidente mais l'onde transmise est circulaire et se propage même dans la zone d'ombre géométrique de l'obstacle. $\rightarrow$ la longueur d'onde de l'onde incidente et de l'onde réfléchiée est identique.

Définition

La diffraction est un phénomène **ondulatoire**. Il se produit lorsque des ondes, quelle que soit leur nature, rencontrent **des obstacles ou des ouvertures** dont les dimensions sont de **l'ordre de grandeur de la longueur d'onde** et qui se traduit par des perturbations dans la propagation de ces ondes (contournement d'obstacles ou divergence à partir d'ouverture dans ces obstacles).

Application

- onde sonore de la longueur d'onde environ 1m : diffraction avec les objets de la vie quotidienne. elle permet au son de se propager d'une pièce à l'autre dans un appartement
- pour les ondes radio AM, ou la longueur d'onde est de l'ordre du kilomètre : diffraction sur les collines
- à l'échelle atomique : la diffraction de rayons X pour analyser la structure des réseaux cristallins

3 Traitement physique de la diffraction

Il faut savoir que résoudre un problème de diffraction complet est très difficile et demande de travailler avec les équations de Maxwell. Heureusement il existe une méthode très générale, basé sur des approximation, pour résoudre le problème de façon approché. C'est ce que l'on appelle le principe de Huygens-Fresnel.

3.1 Principe de Huygens Fresnel (1690)

Huygens émis l'hypothèse que la lumière était une onde qui se propage de proche en proche selon le principe des ondelettes secondaires mais ce principe n'était pas suffisant ².

Enoncé du principe de Huygens Fresnel (cf. BFR optique)

Chaque point M d'une surface Σ atteinte par la lumière peut être considérée comme une source secondaire émettant une onde sphérique. L'état vibratoire de cette source secondaire est proportionnel à celui de l'onde incidente en M et à l'élément de surface $d\Sigma$ entourant le point M. Les vibrations issues des différentes sources secondaires interfèrent entre elles.

Pour la suite, on choisira de présenter les étapes majeures pour aboutir aux approximations de Fresnel et Fraunhofer. Le développement intégrale est lisible sur le [TD de Montrouge](#) qui suit.

Hypothèses

- forme de l'onde en sortie de l'objet diffractant : $s(M) = A \int_{\Sigma} s_0(P) t(x, y) \frac{e^{ikPM}}{PM} dx dy$
- $x, y \ll D, d$ pupille petite, ³
- $X, Y \ll D$ petits angles. ⁴ on pose dans ce cas : $\alpha = \frac{X}{D}$ et $\beta = \frac{Y}{D}$

2. il permet de retrouver les lois de la réfraction et de la réflexion mais il ne fait pas intervenir la longueur d'onde dans le phénomène de diffraction alors que l'expérience montre clairement une dépendance du phénomène en la longueur d'onde. De plus on ne peut conclure que sur la surface d'onde et pas sur la forme de l'onde ou des ondelettes elles-mêmes.

3. On retrouve ici les conditions de Gauss. La première condition traduit le fait qu'on ne s'intéresse qu'à la diffraction par de petits objets ou, ce qui est équivalent, qu'il n'y a de la lumière que proche de l'axe optique.

4. La seconde condition impose que les rayons considérés soient tous faiblement inclinés sur l'axe

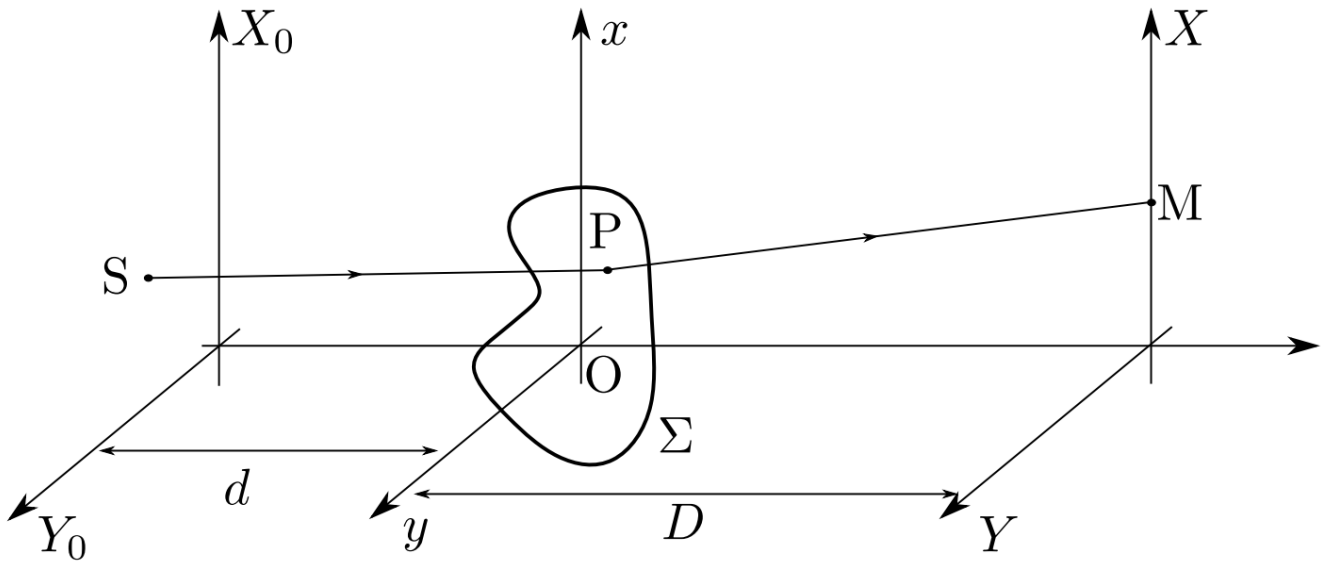


FIGURE 1 – Géométrie considérée

- on obtient : $PM = D \left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \frac{r^2}{2D^2} - \frac{\alpha x + \beta y}{D} \right) \rightarrow$ donc $PM \approx D$ pour le terme dans l'amplitude **MAIS** pas pour le terme dans la phase, , **il faut tenir compte des variations de PM à l'échelle de la longueur d'onde**
- L'onde DIFFRACTÉE est

$$s(M) = A s_0 \frac{e^{i\varphi_0}}{dD} \int_{\Sigma} t(x, y) e^{-ik[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y] + ik \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right)} dx dy$$

$$\text{avec } \varphi_0 = \frac{kd}{2} (\alpha_0^2 + \beta_0^2) + \frac{kD}{2} (\alpha^2 + \beta^2) = k \frac{X_0^2 + Y_0^2}{2d} + k \frac{X^2 + Y^2}{2D},$$

3.2 La diffraction de Fraunhofer

Il s'agit du cas où la phase quadratique proportionnelle à r^2 peut être négligée. On obtient donc :

$$s(\mathbf{M}) = \tilde{s}_0 \int_{\Sigma} t(x, y) e^{-ik[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y]} dx dy$$

Dans le cas où on ne peut pas négliger ce terme on dit qu'il s'agit de la **diffraction de Fresnel**. Expérimentalement, on a observé la diffraction de Fresnel en introduction. C'était le cas où l'on avait des phénomènes d'interférences dans la figure de diffraction centrale. La diffraction de Fresnel ne se fait pas à l'infini.

On peut passer de Fresnel à Fraunhofer en éloignant l'écran ! on le fait devant le jury.

Application à une fente On obtient après calcul (que l'on trouve dans le poly de Montrouge ci-dessus), l'intensité après l'objet diffractant :

$$I(X, Y) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a (X - X_0)}{\lambda f} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b (Y - Y_0)}{\lambda f} \right)$$

3.3 Retour sur la manip introductive

Dans notre manip' introductive, on a pris un obstacle rectangulaire et non une fente. Pour retrouver la figure de diffraction plus facilement. On peut s'intéresser au théorème de Babinet qui suit.

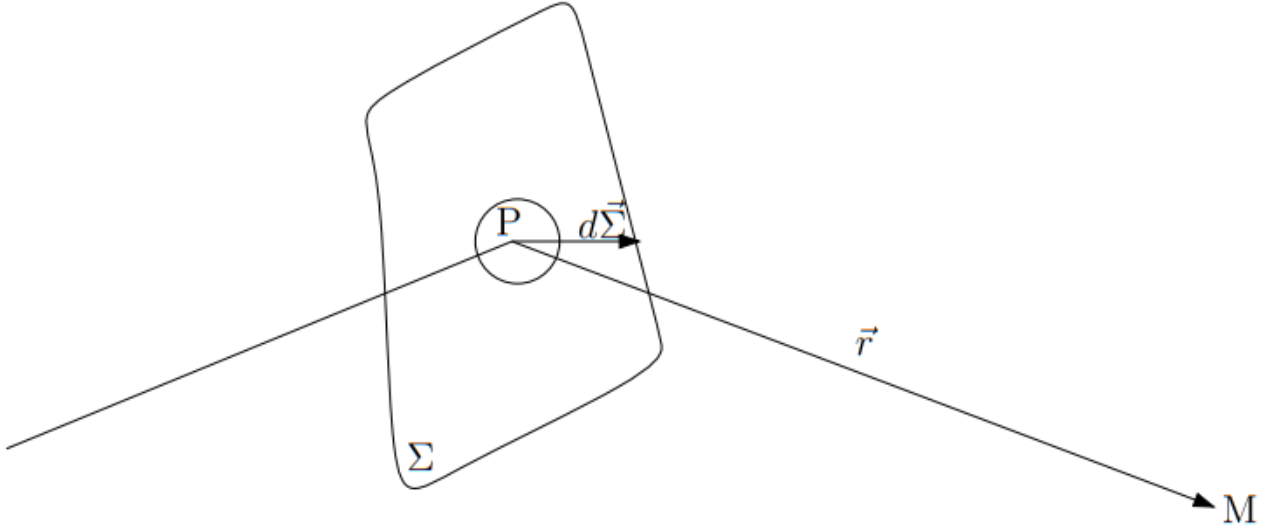


FIGURE 1.2 – Principe de Huygens-Fresnel.

Soit P un point de la surface Σ éclairée et M un point de l'espace (point d'observation), on note θ l'angle entre les directions $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ et $d\vec{\Sigma}$ le vecteur normal à Σ en P . Alors

$$ds(M) = A(\theta) t(x, y) s_0(P) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \longrightarrow s(M) = \int_{\Sigma} A(\theta) t(x, y) s_0(P) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma, \quad (\text{I.1})$$

où $k = 2\pi/\lambda$ et λ est la longueur d'onde de la source. On a ici sommé les amplitudes complexes car les différentes sources secondaires interfèrent entre elles.

Le facteur $A(\theta)/A(0)$, appelé *facteur d'obliquité* ou *d'inclinaison*, permet de tenir compte de l'anisotropie du diagramme d'émission des sources secondaires et de l'absence de diffraction vers l'arrière [$A(\pi) = 0$]. On écrit $A(\theta) = A(1 + \cos \theta)/2$. En pratique, on considère des rayons faiblement inclinés sur l'axe optique, auquel cas $A(\theta) \approx A(0) \equiv A$, soit

$$s(M) = A \int_{\Sigma} t(x, y) s_0(P) \frac{e^{ikPM}}{PM} d\Sigma. \quad (\text{I.2})$$

Remarque Le principe de Huygens-Fresnel peut en fait (ou évidemment) être dérivé des équations de Maxwell. La théorie de Kirchhoff permet de formuler des équations sur les solutions d'une équation d'onde scalaire, notamment le théorème intégral de Kirchhoff et Helmholtz. En supposant de surcroît toutes les distances caractéristiques

septembre 2020

grandes devant la longueur d'onde, et en se limitant à la diffraction à grande distance, on obtient la formule dite de Fresnel-Kirchhoff de la diffraction, qui n'est rien d'autre que l'équation (I.1), à ceci prêt que l'expression de $A(\theta)$ y est explicite. [Voir par exemple Born & Wolf ou fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_de_Kirchhoff].

2. On applique le principe de Huygens-Fresnel au cas considéré [surface Σ de transmittance $t(x, y)$]. Soit M un point d'observation de coordonnées X, Y , et P un point courant de Σ de coordonnées x, y . Alors

$$s(M) = A \int_{\Sigma} s_0(P) t(x, y) \frac{e^{ikPM}}{PM} dx dy.$$

Or $\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} X-x \\ Y-y \\ D \end{pmatrix}$ et $PM^2 = D^2 \left[1 + \left(\frac{x-X}{D} \right)^2 + \left(\frac{y-Y}{D} \right)^2 \right]$, soit

$$PM = D \sqrt{1 + \left(\frac{x}{D} \right)^2 + \left(\frac{X}{D} \right)^2 + \left(\frac{y}{D} \right)^2 + \left(\frac{Y}{D} \right)^2 - 2 \frac{xX + yY}{D^2}}.$$

On se place maintenant dans la situation où

$$x, y \ll D, d \quad \text{pupille petite,} \quad (I.3)$$

$$X, Y \ll D \quad \text{petits angles.} \quad (I.4)$$

On retrouve ici les conditions de Gauss. La première condition traduit le fait qu'on ne s'intéresse qu'à la diffraction par de petits objets ou, ce qui est équivalent, qu'il n'y a de la lumière que proche de l'axe optique. La seconde condition impose que les rayons considérés soient tous faiblement inclinés sur l'axe. On introduit pour cela les angles

directeurs de $\overrightarrow{OM}$, notés $\alpha = \frac{X}{D}$ et $\beta = \frac{Y}{D}$, i.e. $\overrightarrow{OM} = D \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$. La condition (I.4) se réécrit alors

$$\alpha, \beta \ll 1. \quad (I.5)$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} PM &\approx D \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{D} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{X}{D} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{D} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{D} \right)^2 - \frac{xX + yY}{D^2} \right] \\ &= D \left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \frac{r^2}{2D^2} - \frac{\alpha x + \beta y}{D} \right), \end{aligned} \quad (I.6)$$

avec $r^2 = x^2 + y^2 = OP^2$.

On peut alors faire l'approximation $PM \approx D$ dans la norme $s_0(P)/PM$ dans (I.2) : la norme ne varie significativement que si les variations de PM sont de l'ordre de D . En revanche, **pour évaluer la phase $\Phi = k PM$, il faut tenir compte des variations de PM à l'échelle de la longueur d'onde, λ , et l'on garde donc les ordres plus élevés du développement :**

$$\Phi/k = D - (\alpha x + \beta y) + \frac{D}{2} (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{r^2}{2D}. \quad (I.7)$$

Finalement, l'onde émise par le point P est, au point M , $s_P(M) \approx e^{i\Phi}/D$. On trouve de même $s_0(P) = s_0 e^{i\Phi_0}/d$, où

$$\Phi_0/k = d + (\alpha_0 x + \beta_0 y) + \frac{d}{2} (\alpha_0^2 + \beta_0^2) + \frac{r^2}{2d}, \quad (I.8)$$

avec $\alpha_0 = -\frac{X_0}{d}$ et $\beta_0 = -\frac{Y_0}{d}$ les angles directeurs de $\vec{SO}$, supposés faibles ($\alpha_0, \beta_0 \ll 1$), et (X_0, Y_0) les coordonnées du point source S . Si S est sur l'axe optique, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

L'onde diffractée s'écrit alors

$$s(M) = A s_0 \frac{e^{i\varphi_0}}{dD} \int_{\Sigma} t(x, y) e^{-ik[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y] + ik\frac{r^2}{2}(\frac{1}{d} + \frac{1}{D})} dx dy. \quad (I.9)$$

Remarque 1 On a ici omis le terme phase global $\exp[ik(d + D)]$ qui ne joue aucun rôle et qu'on peut donc toujours oublier.

On a aussi introduit la phase

$$\varphi_0 = \frac{kd}{2}(\alpha_0^2 + \beta_0^2) + \frac{kD}{2}(\alpha^2 + \beta^2) = k\frac{X_0^2 + Y_0^2}{2d} + k\frac{X^2 + Y^2}{2D}, \quad (I.10)$$

qui ne dépend que des positions de la source et du plan d'observation, et donc pas, en particulier, de l'objet diffractant. Comme on ne s'intéresse en général qu'à la figure de diffraction, c'est-à-dire à l'intensité lumineuse en M , $|s(M)|^2$, on «oublie» la plupart du temps cette phase φ_0 et surtout sa dépendance en M . Notons au passage que ces termes de phase correspondent à la phase accumulée par une onde sphérique pour aller de la source S au point O ($\exp[ik(X_0^2 + Y_0^2)/2d]$, onde sphérique de rayon de courbure d) et par une onde sphérique pour aller du point O au point M ($\exp[ik(X^2 + Y^2)/2D]$, onde sphérique de rayon de courbure D).

On écrit donc par la suite $\tilde{s}_0 = \frac{A s_0}{dD} e^{i\varphi_0}$ en omettant le fait que sa phase, stricto sensu, dépend du point d'observation M . On verra plus loin (voir exercice III) qu'il est en fait possible de supprimer cette dépendance en M .

Remarque 2 On n'a jusqu'ici pas précisé à quelle grandeur physique l'ébranlement s correspond. En particulier, on ne précise pas son unité. On pourrait ajouter partout un coefficient γ qui viendrait assurer l'adimensionnalité de s , par exemple en écrivant pour une onde sphérique $s_0(P) = \gamma s_0 e^{ikr}/r$: γ a la dimension d'une longueur. En pratique, on ne calculera les figures qu'à un facteur multiplicatif près, commun à toutes les figures. On « cachera » donc par la suite le problème dans le coefficient s_0 , proportionnel à l'amplitude de l'onde émise par la source.

3. La **diffraction de Fraunhofer** correspond au cas où la phase quadratique dans (I.9),

$$\Phi_Q = \frac{kr^2}{2} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right), \quad (\text{I.11})$$

proportionnelle à r^2 , peut être négligée. L'onde diffractée s'écrit dans ce cas

$$s(M) = \tilde{s}_0 \int_{\Sigma} t(x, y) e^{-ik[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y]} dx dy. \quad (\text{I.12})$$

On distingue trois cas important où la condition de Fraunhofer est réalisée :

- Diffraction d'une onde plane ($1/d = 0$) à l'infini ($1/D = 0$). Dans ce cas, l'onde incidente est repérée par son vecteur d'onde $\vec{k}_0$ et la direction d'observation par le vecteur d'onde $\vec{k}$, avec

$$\vec{k}_0 = k \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{k} = k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'onde diffractée $s(M)$ prend alors la forme

$$s(M) = \tilde{s}_0 \int_{\Sigma} t(P) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{OP}} d\Sigma. \quad (\text{I.13})$$

- Diffraction d'une onde plane ($1/d = 0$) à grande distance ($1/D \approx 0$). On retrouve la formule précédente dans le cas où

$$kr^2 \ll 2D \Leftrightarrow D \gg \frac{r^2}{2\lambda}.$$

Cette condition n'est en pratique pas très restrictive. Par exemple, pour un objet de taille $r = 50 \mu\text{m}$, éclairé par une lumière de longueur d'onde $\lambda = 500 \text{ nm}$, il suffit de placer l'écran à $d \gg 2,5 \text{ mm}$ pour que la condition soit vérifiée.

- Diffraction au voisinage de **l'image géométrique** de la source. Cette situation correspond à la situation où $1/d \neq 0$, $1/D \neq 0$ mais $(1/d + 1/D) = 0$. En fait, on peut reprendre les calculs précédents en écrivant $d = -D$: la source effective est située sur l'écran d'observation. Voir *Sextant* p.139.

C'est le fait que la diffraction de Fraunhofer corresponde à cette situation qui la rend si importante en pratique !

La *diffraction de Fresnel* correspond à la situation où les termes quadratiques (en r^2) ne sont plus négligeables, tout en omettant les ordres suivants du développement.

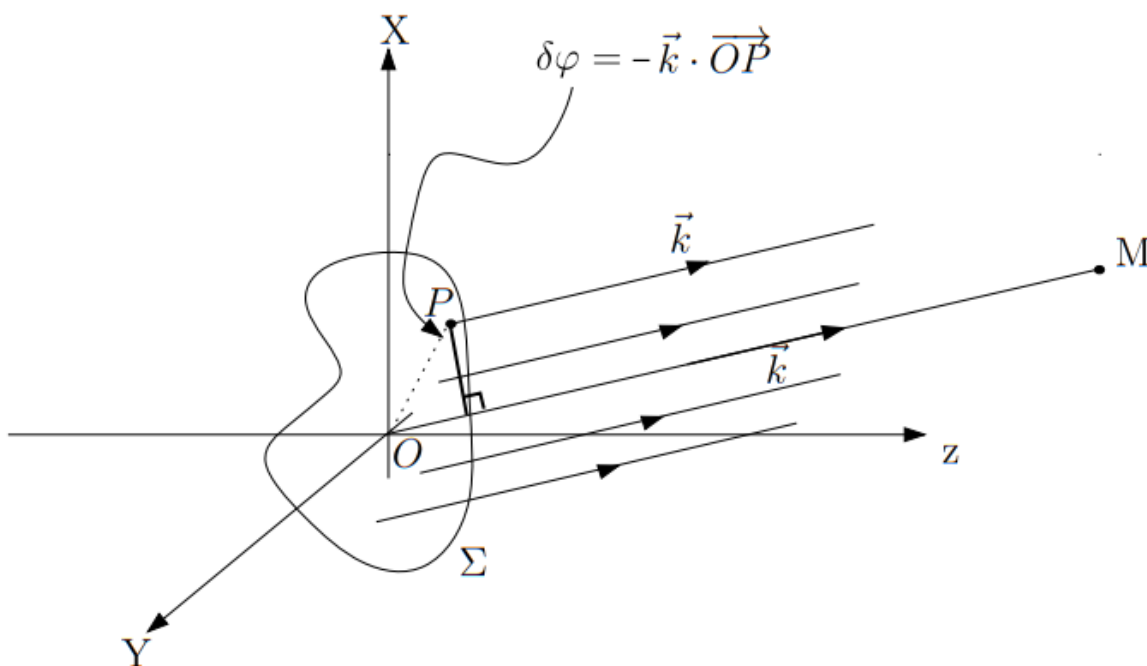


FIGURE 1.3 – Calcul de l'amplitude de la vibration lumineuse dans l'approximation de Fraunhofer. $\delta\varphi$ est le déphasage de l'onde émise en P par rapport à l'onde émise en O.

Remarque 1 La formule de Fraunhofer peut être retrouvée simplement dans le cas de la diffraction d'une onde plane à l'infini. Dans ce cas en effet, L'onde émise par un point P de Σ au point M présente un déphasage $\delta\varphi$ (voir FIG. 3) par rapport à celle émise par le point O égal à

$$\delta\varphi = -\vec{k} \cdot \vec{OP}.$$

De même, l'onde reçue au point P est déphasée par rapport à celle reçue au point O d'une grandeur

$$\delta\varphi_0 = \vec{k}_0 \cdot \vec{OP}.$$

On obtient alors directement

$$s(M) \propto \int_{\Sigma} t(P) e^{i[\delta\varphi(P) + \delta\varphi_0(P)]} d\Sigma = \int_{\Sigma} t(P) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{OP}} d\Sigma.$$

Remarque 2 Base de l'optique de Fourier [Cf. TD Diffraction (2)].

On a une relation de transformée de Fourier entre $t(x, y)$ et le profil d'intensité diffracté dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer. On appelle *plan de Fourier* le plan où l'on observe cette figure de diffraction.

Remarque 3 On peut en fait montrer que l'on est dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer quand la taille de la tache de diffraction est grande devant la taille de l'image géométrique (*i.e.* sans diffraction). Voir *Sextant* p.140.

4. *Diffraction par une fente rectangulaire* Dans le plan focal focal de la lentille, éclairée par une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k}_0 = k \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ 1 \end{pmatrix}$, en $M = \begin{pmatrix} X = f\alpha \\ Y = f\beta \\ D \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} s(M) &= \tilde{s}_0 \int_{-b/2}^{+b/2} dy \int_{-a/2}^{+a/2} dx \frac{1}{ab} e^{-ik[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y]} \\ &= \tilde{s}_0 \frac{1}{ab} \left[-\frac{1}{ik(\alpha - \alpha_0)} \left(-2i \sin \frac{ka(\alpha - \alpha_0)}{2} \right) \right] \left[-\frac{1}{ik(\beta - \beta_0)} \left(-2i \sin \frac{kb(\beta - \beta_0)}{2} \right) \right] \\ &= \tilde{s}_0 \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a(X - X_0)}{\lambda f} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi b(Y - Y_0)}{\lambda f} \right), \end{aligned}$$

avec $X_0 = f\alpha_0$ et $Y_0 = f\beta_0$. D'où le profil d'intensité, en notant $I_0 = |\tilde{s}_0|^2$,

$$I(X, Y) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a(X - X_0)}{\lambda f} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b(Y - Y_0)}{\lambda f} \right).$$

Pour une fente infiniment fine $b \rightarrow 0$, $I \rightarrow I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi aX}{\lambda f} \right)$, de largeur $\frac{2\lambda f}{a}$ (première annulation en $\frac{\lambda f}{a}$) : la figure de diffraction est **perpendiculaire** à la fente diffractante.

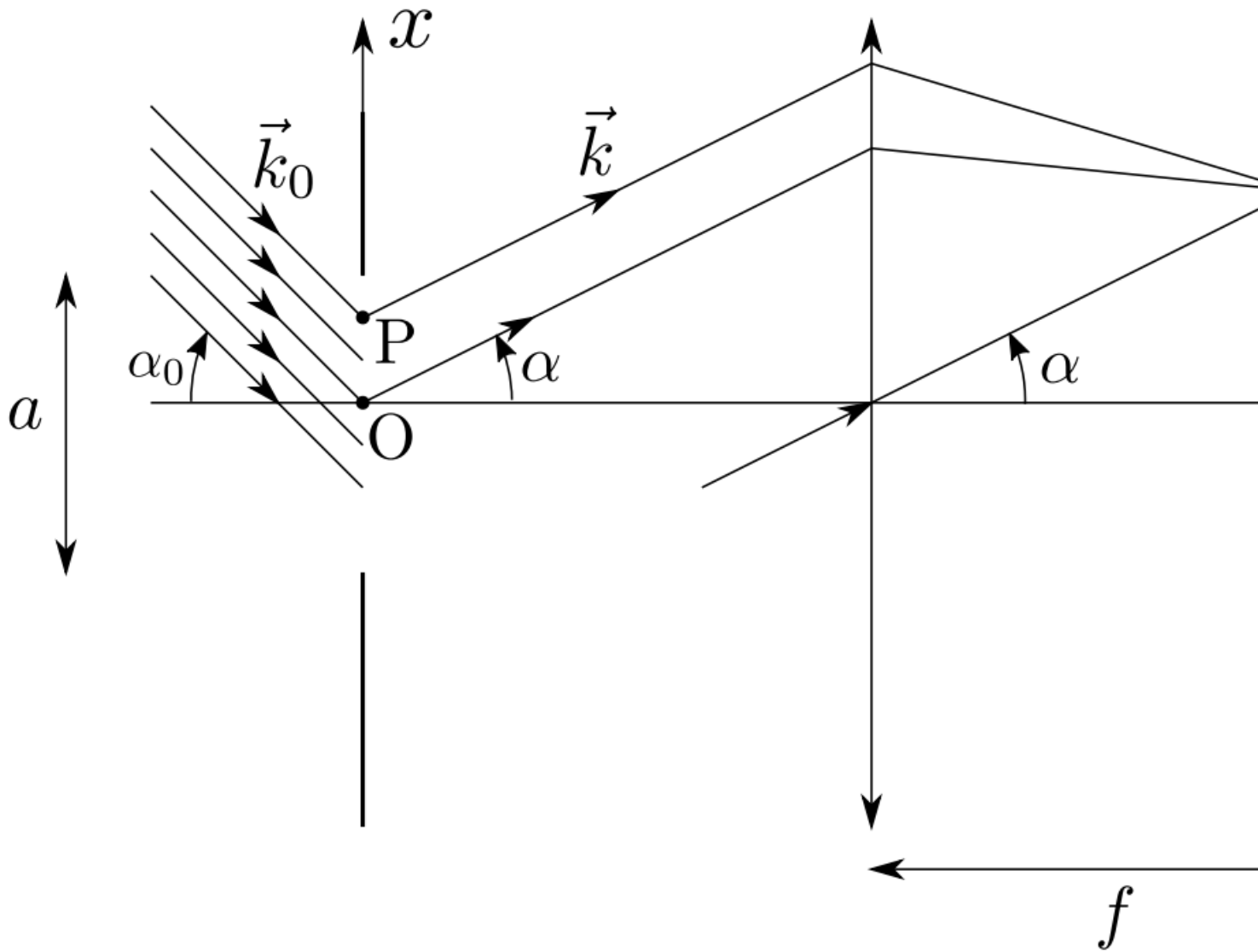


FIGURE 2 – Diffraction par une fente rectangulaire

6. Théorème de Babinet.

Soit deux écrans Σ_1 et Σ_2 de transmittance $t_1(x, y)$ et $t_2(x, y)$ complémentaires ($\forall x, y \quad t_1(x, y) + t_2(x, y) = 1$).

En dehors de l'image géométrique, les figures de diffraction données par les deux écrans sont identiques.

DÉMONSTRATION : La vibration en M pour l'écran Σ_1 s'écrit

$$s_{\Sigma_1}(M) = A \int_{\Sigma_1} \frac{e^{ikPM}}{PM} t_1(x, y) dx dy,$$

et de même pour l'écran Σ_2

$$s_{\Sigma_2}(M) = A \int_{\Sigma_2} \frac{e^{ikPM}}{PM} t_2(x, y) dx dy.$$

En l'absence d'objet diffractant Σ_i , au point M , on ne voit que l'image géométrique de la source. En dehors de l'image géométrique, il n'y a donc pas d'éclairement en l'absence d'objet diffractant :

$$\text{Hors de l'image géométrique : } I = s \cdot s^* = 0 \longrightarrow s = 0.$$

Or, cette situation correspond à $t(x, y) = 1$ en tout point. Comme $t_1 + t_2 = 1$ en tout point, en dehors de l'image géométrique, on en déduit

$$s = A \int \frac{e^{ikPM}}{PM} t_1(x, y) dx dy + A \int \frac{e^{ikPM}}{PM} t_2(x, y) dx dy = s_{\Sigma_1}(M) + s_{\Sigma_2}(M) = 0.$$

Donc $s_{\Sigma_1}(M) = -s_{\Sigma_2}(M)$, soit

$$\boxed{I_{\Sigma_1}(M) = I_{\Sigma_2}(M) \quad \text{pour } M \text{ en dehors de l'image géométrique.}}$$

Pour aller plus loin

L'expérience dite de la tache de Poisson est la diffraction d'un laser sur une bille d'acier de 3mm. On constate l'existence d'un point lumineux au centre de l'ombre de la bille. On peut aussi observer des anneaux concentriques au tour de ce point.