

ODYSSÉE VERS LA CONDENSATION DE BOSE-EINSTEIN

I. LE CRITÈRE DE CONDENSATION

1 Il est utile de se rappeler que $k_B T$ a la dimension d'une énergie, soit

$$[k_B T] = [E] = M L^2 T^{-2}$$

où la seconde égalité découle, par exemple, de l'expression de l'énergie cinétique. Ainsi, on peut définir une vitesse caractéristique V_T par

$$V_T = \sqrt{\frac{k_B T}{M}}$$

Un résultat important de théorie cinétique des gaz relie la vitesse des particules d'un gaz monoatomique à sa température :

$$\frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

Ici, V_T^2 va donc correspondre, à une constante près, à la moyenne du carré de la vitesse des particules.

2 La longueur d'onde de de Broglie d'une particule est définie par $\Lambda_T \equiv h/p$ où p est la norme de sa quantité de mouvement. Avec $p = M V_T$ et la question 1,

$$\Lambda_T \equiv \frac{h}{M V_T} = \frac{h}{\sqrt{k_B T M}}$$

À un facteur $\sqrt{2\pi}$ près, c'est bien l'expression de l'énoncé. Λ_T dépend de la température du gaz, d'où l'appellation « longueur d'onde thermique de de Broglie ».

La longueur d'onde thermique de de Broglie donne l'échelle caractéristique des phénomènes quantiques dans un gaz à la température T . Pour de l'air à température ambiante, on trouve $\Lambda_T \sim 10^{-11}$ m. Dans ce cas, les phénomènes quantiques liés à la température apparaissent à des échelles subatomiques et sont négligeables. Ils n'auront une influence qu'à (très) basse température.

3 Les effets quantiques apparaissent lorsque la distance interatomique d est de l'ordre de Λ_T . Pour $d \sim \Lambda_T$, il y a une seule particule dans un volume Λ_T^3 d'où $n^* \simeq \Lambda_T^{-3}$, et

$$\mathcal{D} = \Lambda_T^3 n^* \simeq 1$$

4 On remonte à la température en utilisant la définition de Λ_T donnée à la question 2, d'où :

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi M k_B \Lambda_T^2}$$

Par définition de \mathcal{D} ,

$$\Lambda_T = \left(\frac{\mathcal{D}_c}{n^*} \right)^{1/3}$$

Donc

$$T_c = \frac{h^2 n^{*2/3}}{2\pi M k_B \mathcal{D}_c^{2/3}}$$

Pour des atomes de rubidium,

$$T_c = 86 \text{ nK}$$

5 Utilisons la vitesse V_T définie à la question 1. Pour une température $T_F = 130^\circ\text{C}$,

$$V_F = \sqrt{\frac{k_B T_F}{M}} = 2,0 \times 10^2 \text{ m.s}^{-1}$$

6 L'intérieur du four étant à l'équilibre thermodynamique, la coexistence des phases gazeuse et solide du rubidium implique que sa pression doit être égale à la pression de vapeur saturante, $P = 0,1 \text{ Pa}$. Le gaz étant à haute température et à basse pression, on s'attend à ce que la loi des gaz parfaits soit particulièrement bien vérifiée. Si N est le nombre d'atomes du gaz à l'intérieur du four et V son volume, la loi des gaz parfaits s'écrit

$$PV = Nk_B T_F$$

Finalemnt
$$n_F^* = \frac{N}{V} = \frac{P}{k_B T_F} = 1,8 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$$

La densité dans l'espace des phases \mathcal{D}_F vaut

$$\mathcal{D}_F = n_F^* \Lambda_T^3 = \frac{n_F^* h^3}{(2\pi M k_B T_F)^{3/2}} = 1,5 \times 10^{-14}$$

La figure 2 du sujet permet de vérifier les ordres de grandeur obtenus.

7 Comme le sujet stipule que le poids est négligé (première page), la seule force à considérer est la force de frottement fluide. On applique le principe fondamental de la dynamique à un atome dans le référentiel terrestre, supposé galiléen,

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha (v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y)$$

En projetant suivant \vec{e}_x ,
$$M \frac{dv_x}{dt} = -\alpha v_x$$

La solution de cette équation est une exponentielle décroissante, $v_x \propto e^{-t/\tau_M}$ avec un temps caractéristique

$$\tau_M = \frac{M}{\alpha} = 4,8 \times 10^{-5} \text{ s}$$

On peut vérifier qu'à cette échelle l'effet de la gravité est négligeable comparé à celui de la force exercée par les lasers

$$Mg \sim 10^{-24} \text{ N} \ll \alpha V_F \sim 10^{-17} \text{ N}$$

8 D'après le résultat de la question 5, les atomes qui sortent du four ont une vitesse de l'ordre de $2 \times 10^2 \text{ m.s}^{-1}$. La force n'agit pas sur v_z , en conséquence l'atome va rester dans la zone d'interaction de longueur $d_I = 6 \text{ cm}$ pendant une durée τ_I telle que

$$\tau_I = \frac{d_I}{V_F} = 3,1 \times 10^{-4} \text{ s}$$

D'après la question 7, les vitesses v_x et v_y vont être multipliées par un facteur $\exp(-\tau_I/\tau_M) = 1,5 \times 10^{-3}$. Par conséquent

$$v_x, v_y \ll v_z$$

On collimate le faisceau laser.

Non-intuitivement, la mélasse, qui n'agit pourtant directement que sur v_x et v_y , va aussi modifier la vitesse moyenne suivant z ! En effet les atomes les plus lents vont interagir plus longtemps avec la mélasse, donc être mieux collimatés et plus nombreux à la sortie du dispositif. Au contraire, les atomes rapides vont garder leur dispersion initiale, et beaucoup seront perdus. En moyenne la vitesse suivant z va diminuer.

9 Le vecteur densité de courant de particules j est par définition le nombre de particules traversant un élément de surface par élément de temps. Si l'on suppose que toutes les particules se déplacent à la vitesse moyenne V_F , on trouve

$$n^* j = \frac{j}{V_F} = 2,04 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}$$

On voit ici, et on peut le vérifier sur la figure 2, que la densité des atomes chute d'un facteur 10^6 en sortie de four, à cause de leur dispersion, et ce malgré la présence de la mélasse transverse.

III. LE RALENTISSEUR ET LE PIÈGE MAGNÉTO-OPTIQUE

10 L'onde électromagnétique émise par un laser est en général bien modélisée par une onde gaussienne. En tant que telle elle est caractérisée par deux paramètres, son rayon minimal (ici $r_0 = 3 \text{ mm}$) et sa longueur de Rayleigh L_R qui dépend de la longueur d'onde $\lambda \simeq \lambda_0$ du laser à travers la relation

$$L_R = \frac{\pi r_0^2}{\lambda_0} = 36 \text{ m}$$

Le faisceau peut être considéré plan tant que la distance de l'observateur au col du laser (à l'endroit où son rayon est minimal) est largement inférieure à L_R . Or, d'après la figure 1, comme le ralentisseur a une longueur inférieure à 2 m, on peut considérer que le faisceau est plan tout le long du ralentisseur.

11 Le laser est polarisé dans la direction \vec{e}_z , et on a pu voir précédemment que l'onde était plane et se propage suivant l'axe (Ox) . Son champ électrique s'écrit donc

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_z$$

12 Si la pulsation du laser est ω_0 , la longueur d'onde λ du laser va être donnée par

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{hc}{\Delta\mathcal{E}_0} = 782 \text{ nm}$$

Cette valeur est très proche de la longueur d'onde de la transition atomique du rubidium donnée par le sujet.

Le facteur de qualité d'un oscillateur harmonique est le rapport entre la fréquence de résonance du système et la largeur de la bande passante de cette même résonance. Dans le cadre de l'oscillateur harmonique amorti, il a l'expression

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma} = \frac{\Delta\mathcal{E}_0}{\hbar\Gamma} = 6,5 \times 10^7$$

C'est une valeur très élevée, les raies spectrales d'un atome sont particulièrement fines.

13 Comme on se place en régime stationnaire, on peut passer en notation complexe pour simplifier les calculs. En notant

$$\underline{x}(t) = \underline{X}(\omega) e^{i\omega t}$$

L'équation différentielle devient

$$\frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} + \Gamma \frac{d\underline{x}}{dt} + \omega_0^2 \underline{x} = \frac{q_e}{m_e} E_0 e^{i\omega t + \varphi_0}$$

Remplaçons \underline{x} par son expression :

$$(-\omega^2 + i\Gamma\omega + \omega_0^2) \underline{X}(\omega) = \frac{q_e E_0 e^{i\varphi_0}}{m_e}$$

L'amplitude $X(\omega)$ des oscillations vérifie

$$X(\omega) = |\underline{X}(\omega)| = \frac{q_e E_0}{m_e \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}}$$

On obtient un filtre passe-bande, les oscillations de l'électron sont amorties sauf au voisinage de la résonance.

14 La résonance correspond au maximum de l'amplitude $X(\omega)$, donc au minimum de son dénominateur. La méthode la plus simple pour trouver ce minimum consiste à annuler la dérivée par rapport à ω de l'expression sous la racine carrée. On a

$$\frac{d}{d\omega} [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2] = 0$$

soit

$$4\omega(\omega^2 - \omega_0^2) + 2\Gamma^2 \omega = 0$$

Or, ω n'est pas nulle, donc

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{2}$$

et finalement

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{2}}$$

On en déduit l'écart relatif avec la pulsation propre

$$\left| \frac{\omega_r - \omega_0}{\omega_0} \right| = 2,1 \times 10^{-16}$$

La pulsation de résonance de l'oscillateur harmonique amorti est extrêmement proche de la pulsation propre ω_0 (ce qui est cohérent avec l'important facteur de qualité).

15 Le maximum de la fonction, X_{\max} ($\omega = \omega_r$), correspond à l'amplitude du mouvement de l'électron à la résonance.

16 Le résultat demandé est très général, on peut réécrire l'équation du mouvement sous la forme

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = F_f - m_e \omega_0^2 x + F_e$$

où $F_e = (q_e E_0 / m_e) \cos(\omega t + \varphi_0)$ est la force électrique exercée sur la particule. Multiplions les deux membres de l'équation par $v = dx/dt$,

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} = -m_e \omega_0^2 x \frac{dx}{dt} + F_f v + F_e v$$

Ce qui se réécrit $m_e \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -m_e \omega_0^2 \frac{dx^2}{dt} + F_f v + F_e v$

Les deux premiers termes sont des dérivées exactes, et en conséquence s'annulent lorsque intégrés le long d'une période. Les deux termes suivants correspondent aux puissances respectives de la force de frottement et de la force créée par l'onde électromagnétique. On en déduit que, moyennée sur une période, la somme de ces deux puissances doit valoir zéro :

$$\langle P_f \rangle = - \langle P_e \rangle$$

La moyenne des puissances des forces non conservatives s'annule sur une période. La puissance de la force de frottement dépend de la moyenne du carré de la vitesse de l'électron

$$\langle P_f \rangle = -m_e \Gamma \langle v(t)^2 \rangle$$

Or, la position de l'atome est une fonction sinusoïdale, d'amplitude $X(\omega)$, donc s'écrit, en repassant en notation réelle,

$$x(t) = X(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$$

et la vitesse

$$v(t) = X(\omega) \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

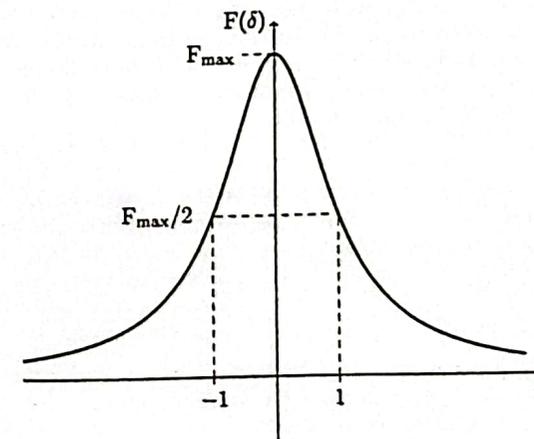
ce qui implique $\langle x \rangle = 0$, $\langle v \rangle = 0$ et $\langle v^2 \rangle = X(\omega)^2 \omega^2 / 2$. On obtient donc

$$\langle P_e \rangle = - \langle P_f \rangle = -\frac{1}{2} m_e \Gamma X(\omega)^2 \omega^2 = \frac{-m_e \Gamma X_{\max}^2 \omega^2}{2(\delta^2 + 1)}$$

et par identification,

$$P_{\max} = \frac{1}{2} m_e \Gamma X_{\max}^2 \omega^2$$

17 La fonction est paire et maximale en $\delta = 0$ où elle atteint la valeur F_{\max} . Elle tend également vers 0 aux deux infinis et a une largeur de 2 à mi-hauteur. Cela donne l'allure suivante :



Un atome qui se déplace à la vitesse $v_z = 300 \text{ m.s}^{-1}$ « voit » une onde dont la pulsation est la pulsation de résonance

$$\omega_0 = \left(1 + \frac{v_z}{c} \right) \omega_L$$

S'il ralentit et passe à une vitesse $v'_z < v_z$, la pulsation qu'il observe devient

$$\omega = \omega_0 + \frac{(v_z - v'_z)\omega_L}{c}$$

donc

$$\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\Gamma/2} = \frac{2(v'_z - v_z)\omega_L}{c\Gamma}$$

On cherche la vitesse v'_z pour laquelle la force est divisée par 5, c'est-à-dire

$$F(\delta) = \frac{F_{\max}}{1 + \delta^2} = \frac{F_{\max}}{5}$$

Cela implique

$$4 = \delta^2 = \frac{4(\omega - \omega_0)^2}{\Gamma^2}$$

soit

$$\left| \frac{(v'_z - v_z)\omega_L}{c} \right| = \Gamma$$

et comme $v'_z < v_z$,

$$v'_z = v_z - \frac{c\Gamma}{\omega_L} = v_z - \frac{c\Gamma(1 + v_z/c)}{\omega_0}$$

Numériquement,

$$v'_z = 295 \text{ m.s}^{-1}$$

Dès lors, la force qui s'exerce sur l'atome va diminuer très rapidement à mesure qu'il ralentit et que la longueur d'onde qu'il observe est modifiée. Le laser ne pourra pas ralentir les atomes de plus de quelques mètres par seconde.

Tout ce raisonnement suppose bien sûr que le laser est monochromatique. En pratique, dans ce type d'expérience, les lasers utilisés ont des bandes de fréquences particulièrement fines, de l'ordre de la dizaine de MHz. En comparaison, on peut vérifier que les écarts de fréquence dus à l'effet Doppler sont de l'ordre de la dizaine de GHz.

18 Un laser à fréquence variable va pouvoir passer de la fréquence ω_0 , où il ralentit les atomes qui se déplacent à 300 m.s^{-1} , jusqu'à une fréquence proche de ω_L où il ralentit des atomes presque immobiles. En pratique le laser va balayer de manière répétée cette gamme de fréquences. Il n'y a pas de problèmes techniques particuliers à implémenter cette solution (surnommée « chirp cooling »), et elle a l'avantage de ne pas nécessiter de matériel supplémentaire. Elle pose néanmoins deux problèmes :

- Elle provoque le **groupement des atomes**, qui ne vont donc pas arriver dans le piège magnétique de façon continue. Les atomes les plus rapides vont rattraper les atomes lents avant d'être ralentis.
- Le laser utilisé pour le ralentissement traverse aussi le piège magnétique. Pour ralentir les atomes de manière efficace la longueur d'onde doit s'approcher de la longueur d'onde de transition des atomes au repos, et donc peut perturber les atomes piégés (et presque immobiles). Le ralentissement Zeeman décrit dans les questions suivantes permet d'éviter ce problème.

19 Pour retrouver la dimension du magnéton de Bohr rapidement, on peut se servir de l'expression de la pulsation du laser, $\omega_0 + \mu_B B_z / \hbar$.

$$\left[\frac{\mu_B B}{\hbar} \right] = T^{-1}$$

Utilisons la force de Lorentz, de norme qvB_z , dimensionnellement : $[qB_z] = M.T^{-1}$. Introduisons la masse $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ de l'électron, $[qB_z/m_e] = T^{-1}$.

Par conséquent,

$$\left[\frac{qB_z}{m} \right] = \left[\frac{\mu_B B_z}{\hbar} \right]$$

D'où

$$\mu_B = \frac{q_e \hbar}{m_e} \simeq 1,88 \times 10^{-23} \text{ J.T}^{-1}$$

Sa valeur numérique est donnée en fin de sujet et on vérifie que l'ordre de grandeur est bon.

Une des expériences qui a mis en évidence la quantification du moment magnétique des atomes est celle de **Stern et Gerlach**. Dans cette expérience, un faisceau d'atomes traverse un champ magnétique orienté perpendiculairement au mouvement. On observe que le faisceau se sépare en exactement deux faisceaux, plutôt que de s'élargir comme le prévoit la théorie classique.

20 La pulsation ω_0 est remplacée par $\omega_0 + \mu_B B_z / \hbar$. Pour ralentir des atomes qui se déplacent à la vitesse v'_z , le champ B_z doit vérifier

$$\omega_0 + \frac{\mu_B B_z}{\hbar} = \omega_L \left(1 + \frac{v'_z}{c} \right)$$

Pour agir sur des atomes se déplaçant à la fois à la vitesse de sortie du four v_z et à la vitesse finale v_f le champ magnétique doit varier de ΔB_z , donc

$$\frac{\mu_B \Delta B_z}{\hbar} = \omega_L \left(\frac{v_z}{c} - \frac{v_f}{c} \right)$$

Comme on veut $v_f = 0$

$$\Delta B_z = \frac{\omega_L \hbar v_z}{\mu_B c}$$

ce qui donne l'ordre de grandeur de la variation du champ magnétique,

$$\Delta B_z = \frac{-\omega_L \hbar v_z}{c \mu_B} \simeq \frac{-\omega_0 \hbar v_z}{c \mu_B} - 27,4 \text{ mT}$$

Sur la figure 3 on lit environ $-200 \text{ gauss} = -20 \text{ mT}$ entre le minimum et le maximum, ce qui est cohérent. Par contre, on voit que le champ n'est pas nul au début du ralentisseur, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse du sujet, selon lequel les atomes les plus rapides ($v_z = 300 \text{ m.s}^{-1}$) entrent en résonance avec le faisceau ralentisseur en champ nul.

21 On applique le théorème de l'énergie cinétique au système de l'atome. L'atome subit une accélération constante a , ce qui correspond à un travail $-Ma(z - z_1)$ entre les points z_1 et z (par analogie avec la pesanteur par exemple). On écrit donc

$$-Ma(z - z_1) = E_c(z) - E_c(z_1) = \frac{1}{2}Mv_z^2 - \frac{1}{2}Mv_1^2$$

Ainsi

$$v_z = \sqrt{v_1^2 + 2a(z_1 - z)}$$

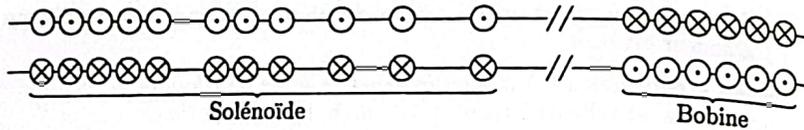
22 En utilisant les résultats des deux questions précédentes, on trouve

$$B_z = -\frac{\hbar\omega_0}{\mu_B} + \frac{\hbar\omega_L}{\mu_{BC}} \sqrt{v_1^2 + 2a(z_1 - z)}$$

Par identification avec la formule proposée dans le sujet

$$b_1 = \frac{\hbar\omega_L v_1}{\mu_{BC}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2a}{v_1^2}$$

23 D'après la figure 3, le champ magnétique est positif dans la direction z sur le premier enroulement, et négatif sur le second. En suivant la règle du « tire-bouchon », on obtient les sens de circulation représentés sur la figure ci-dessous.



La variation du champ magnétique est réalisée dans le solénoïde par la modification de la densité des enroulements. Supposons que le solénoïde soit suffisamment long par rapport à son diamètre, et l'évolution de la densité de l'enroulement suffisamment lente pour que le champ magnétique sur l'axe du solénoïde puisse être donné par l'approximation du « solénoïde infini » :

$$B_z = \mu_0 n(z) I$$

où I est l'intensité de courant et $n(z)$ la densité du nombre de spires. Au pic de champ magnétique, on observe un champ $B_z = 150$ gauss = 15 mT, ce qui donne l'ordre de grandeur de la densité d'enroulement. Pour $I = 3,2$ A,

$$n(z) = \frac{B_z}{\mu_0 I} \simeq 3,5 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$$

D'après la figure 1, le solénoïde mesure approximativement 0,5 m, donc il y aurait environ 2000 enroulements. On peut suivre le même raisonnement pour la bobine ralentisseur, qui crée un champ de 50 gauss et mesure une dizaine de centimètres. On trouve environ 100 enroulements.

24 Le principal avantage à se placer dans une configuration où le champ magnétique s'annule est de permettre de limiter le courant maximal nécessaire (qui est déjà de 3,4 A) et ainsi la puissance dissipée par effet Joule.

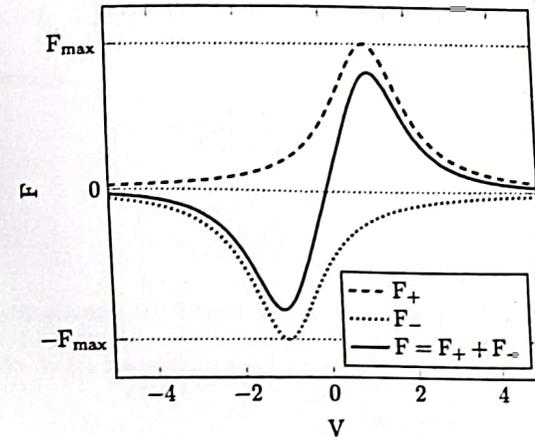
25 Le champ magnétique \vec{B} est supposé nul, et on peut réécrire δ sous la forme

$$\begin{aligned} \delta_{\pm} &= \frac{\omega_{\pm} - \omega_0}{\Gamma/2} \\ &= -\frac{\omega_0 - \omega_L \pm \omega_L v/c}{\Gamma/2} \\ \delta_{\pm} &= -(\pm V - \Delta) \end{aligned}$$

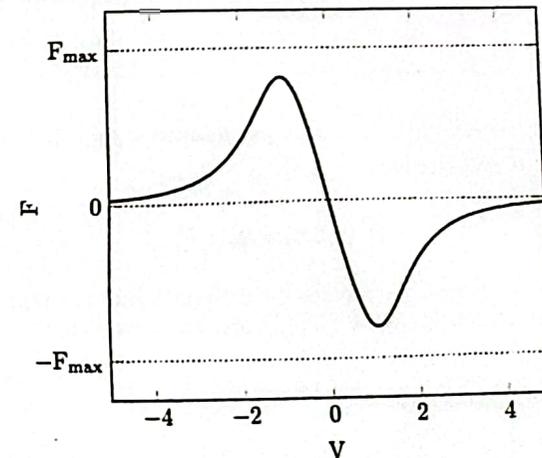
Et donc

$$F_{\pm} = \pm \frac{F_{\max}}{1 + (\pm V - \Delta)^2}$$

26 La fonction $F_+(V)$ vaut $F(V - \Delta)$, avec $\Delta = 1$, où F est la fonction déjà représentée sur la figure 17. De même, $F_-(V)$ vaut $-F(V + 1)$. Les trois fonctions F_+ , F_- et $F_x = F_+ + F_-$ sont représentées ci-dessous.



Sur la figure, le cas $\omega_L > \omega_0$ (qui correspond à $\Delta > 0$) est représenté. On y voit que la force et la vitesse sont toujours de même signe, donc les lasers vont accélérer les atomes. Dans le cas contraire ci-dessous, représenté avec $\Delta = -1$, la force et la vitesse sont de signes opposés, et les lasers ralentissent les atomes. Pour obtenir le ralentissement voulu, la pulsation du laser ω_L doit être plus petite que la pulsation de la transition atomique ω_0 .



27 Si $|V| \ll |\Delta|$, on a

$$\begin{aligned} F_+ &= \frac{F_{\max}}{1 + (\Delta - V)^2} \\ &= \frac{F_{\max}}{1 + \Delta^2 - 2V\Delta} + o\left(\frac{V}{\Delta}\right) \\ F_+ &= \frac{F_{\max}}{1 + \Delta^2} \left(1 + \frac{2V\Delta}{1 + \Delta^2}\right) + o\left(\frac{V}{\Delta}\right) \end{aligned}$$

Et de même,

$$F_- = \frac{-F_{\max}}{1 + (\Delta + V)^2} = \frac{F_{\max}}{1 + \Delta^2} \left(-1 + \frac{2V\Delta}{1 + \Delta^2} \right) + o\left(\frac{V}{\Delta}\right)$$

ce qui donne une force totale:

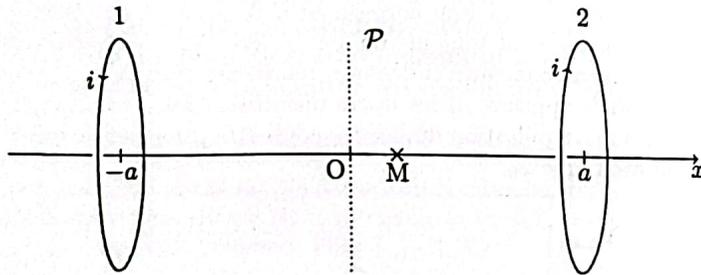
$$F = F_+ + F_- \simeq \frac{4V\Delta F_{\max}}{(1 + \Delta^2)^2} = -\alpha V$$

En identifiant,

$$\alpha = -\frac{4\Delta F_{\max}}{(1 + \Delta^2)^2}$$

Pour que α soit positif, Δ doit être négatif: on retrouve le résultat de la question précédente.

28 Considérons le schéma suivant.



La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe x , donc, sur l'axe, le champ \vec{B} doit être parallèle à \vec{e}_x .

$$\vec{B}(x, 0, 0) = B_x(x)\vec{e}_x$$

Par ailleurs, la distribution de courant est antisymétrique par rapport au plan \mathcal{P} passant par O et perpendiculaire à \vec{e}_x . Si M appartient au plan,

$$\vec{B}(M) \cdot \vec{e}_x = 0$$

et en particulier

$$B_x(0, 0, 0) = 0$$

Pour x proche de O ,

$$\vec{B}(x, 0, 0) = B_x(0, 0, 0)\vec{e}_x + \left. \frac{dB_x}{dx} \right|_0 x \vec{e}_x = -B'x \vec{e}_x$$

La règle du « tire-bouchon » permet de deviner l'orientation du champ en fonction de la proximité à l'une ou l'autre spire. B_x doit être positif pour $x < 0$ et négatif quand $x > 0$, d'où $B' \geq 0$.

29 Seule l'expression de δ_i est modifiée par la présence du champ magnétique. On peut réécrire δ_i :

$$\delta_i = \frac{\omega_L - \omega_0 - (\omega_L/c)\vec{v} \cdot \vec{e}_i - (m\mu_B/\hbar)\vec{B} \cdot \vec{e}_i}{\Gamma/2}$$

Pour δ_+ par exemple,

$$\delta_+ = \Delta - \frac{2}{\Gamma} \left(\frac{\omega_L v_x}{c} + \frac{m\mu_B B_x}{\hbar} \right)$$

$$\delta_+ = \Delta - V$$

avec

$$V = \frac{2}{\Gamma} \left(\frac{\omega_L v_x}{c} + \frac{m\mu_B B_x}{\hbar} \right)$$

Pour que les atomes soient piégés, la force générée par les lasers doit être dirigée vers le centre du piège. D'après la question 27, la force F_x est égale à $-\alpha V$. La contribution du champ magnétique à la force va donc être égale à:

$$F_{x,B} = -\frac{\alpha m\mu_B}{\hbar} B_x$$

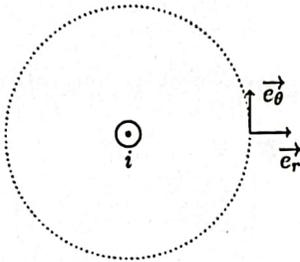
Or, on a montré à la question précédente que B_x devait être négatif pour $x > 0$, et positif pour $x < 0$. Pour que la force soit dirigée vers le centre du piège en toutes circonstances, le nombre quantique m doit être négatif.

30 On réutilise la définition de « densité dans l'espace des phases » donnée au début du sujet.

$$\mathcal{D}_P = \Lambda_{T_P}^3 n_P^* = \frac{h^3 n_P^*}{(2\pi M k_B T_P)^{3/2}} = 1,31 \times 10^{-7}$$

IV. LE REFROIDISSEMENT ÉVAPORATIF ET LA CONDENSATION DE BOSE-EINSTEIN

31 Considérons le dessin suivant.



Remarquons déjà que tout plan contenant le fil est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique doit lui être perpendiculaire. Dans le système de coordonnées cylindriques d'axe z , $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$, cela signifie que \vec{B} est colinéaire à \vec{e}_θ . De plus, comme le système est invariant par rotation selon θ et par translation selon z ,

$$\vec{B}(r, \theta, z) = B(r)\vec{e}_\theta$$

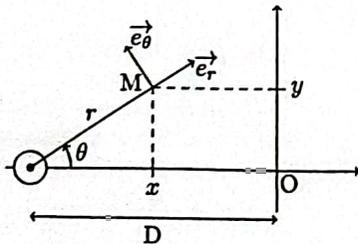
Appliquons maintenant le théorème d'Ampère sur un contour circulaire, de rayon r , centré sur le fil et de normale \vec{e}_z (dessiné en pointillés sur la figure). On obtient :

$$\mu_0 I = \int \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\theta=0}^{2\pi} B(r) \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = 2\pi r B(r)$$

d'où

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

32 Étudions désormais la situation suivante.



D'après le schéma (dessiné dans le cas $x < 0$),

$$r = \sqrt{(x+D)^2 + y^2}$$

Pour un point M au voisinage de O, $|x|, |y| \ll D$, donc $r \simeq D(1 + x/D)$ à l'ordre le plus bas en $x/D, y/D$. De plus, d'après le schéma, si $x < 0$ et $|x|, |y| \ll D$,

$$\theta \simeq \tan \theta = \frac{y}{x+D} \simeq \frac{y}{D}$$

d'où

$$\vec{e}_\theta \simeq -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \simeq -\frac{y}{D} \vec{e}_x + \vec{e}_y$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi D(1+x/D)} \left(-\frac{y}{D} \vec{e}_x + \vec{e}_y \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \left(1 - \frac{x}{D} \right) \left(-\frac{y}{D} \vec{e}_x + \vec{e}_y \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \left(\vec{e}_y - x' \vec{e}_y' - y' \vec{e}_x' \right) \end{aligned}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{B_1}{4} \left(\vec{e}_y - x' \vec{e}_y' - y' \vec{e}_x' \right)$$

33 Le fil O_2 est le symétrique du fil O_1 par rapport au plan passant par O et normal à \vec{e}_x (ligne en tirets sur la figure), donc puisque le champ magnétique est un pseudo-vecteur, \vec{B}_2 est l'antisymétrique de \vec{B}_1 :

$$\begin{cases} B_{2,x}(x, y, 0) = B_{1,x}(-x, y, 0) \\ B_{2,y}(x, y, 0) = -B_{1,y}(-x, y, 0) \end{cases}$$

et ainsi

$$\vec{B}_2(x, y, 0) = \frac{B_1}{4} \left(-\vec{e}_y - x' \vec{e}_y' - y' \vec{e}_x' \right)$$

D'après le théorème de superposition,

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -\frac{B_1}{2} \left(x' \vec{e}_y' + y' \vec{e}_x' \right)$$

34 Le système créé par les fils O_3 et O_4 est l'antisymétrique de celui créé par O_1 et O_2 par rapport au plan passant par O et normal à $\vec{e}_x - \vec{e}_y$ (ligne en pointillés sur la figure). En conséquence le champ magnétique créé par ces deux nouveaux fils est la symétrique du précédent par rapport à ce plan. Cela correspond tout simplement à inverser les axes Ox et Oy , et le champ $\vec{B}_1 + \vec{B}_2$ est invariant sous cette transformation. Donc, par théorème de superposition, l'ajout des deux fils va simplement doubler le champ magnétique.

35 L'énergie potentielle magnétique d'un dipôle \vec{M} plongé dans un champ \vec{B} est donnée par

$$\mathcal{E} = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$

36 La position d'équilibre stable du dipôle correspond à celle qui minimise son énergie potentielle. Plongé dans le champ \vec{B} , le dipôle va donc s'orienter dans la direction de celui-ci. Si de plus le dipôle peut se mouvoir il se placera à l'endroit où la norme du champ est maximale, car \mathcal{E} est alors minimale. La norme du champ fournie dans le sujet est minimale au point O et tend vers l'infini quand x, y ou z diverge. Elle n'a pas de maxima locaux d'énergie. Le dipôle va donc s'éloigner vers l'infini, et sortir du piège.

Un résultat plus général montre que dans le vide, la norme d'un champ magnétique ne peut pas avoir de maximum local. Donc classiquement, il est impossible de piéger un dipôle magnétique avec un champ magnétique.

37 L'énergie du dipôle magnétique vaut

$$\mathcal{E}_{m_F} = -m_F g_F \mu_B B$$

Si $m_F g_F$ est négatif, l'énergie sera minimale lorsque la norme du champ magnétique $B(\vec{x})$ est minimale, et donc pour $\vec{x} = \vec{0}$. Dans ces conditions

$$\mathcal{E}_{m_F} = -m_F g_F \mu_B \left[B_0 + \left(\frac{B_1^2}{B_0 D^2} - \frac{B''}{z_0^2} \right) \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{B''}{z_0^2} z^2 \right]$$

On reconnaît l'expression de l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique anisotrope

$$-m_F g_F \mu_B B_0 + M \omega_r^2 \frac{r^2}{2} + M \omega_z^2 \frac{z^2}{2}$$

avec

$$\begin{cases} \omega_r = \sqrt{\frac{-m_F g_F \mu_B}{M} \left(\frac{B_1^2}{B_0 D^2} - \frac{B''}{z_0^2} \right)} \\ \omega_z = \sqrt{\frac{-2m_F g_F \mu_B}{M} \frac{B''}{z_0^2}} \end{cases}$$

Rappelons que comme $m_F g_F < 0$, les termes sous la racine sont bien positifs.

38 À l'instant initial, l'énergie totale du système est $E_0 = 3N_0 k_B T_0$. Après l'application de la radio-fréquence, l'énergie des atomes chassés du piège est donnée par $E_{\text{chassés}} = (N_0 - N_1) \eta k_B T_0$ tandis que celle des atomes toujours piégés vaut $E_{\text{piégés}} = 3N_1 k_B T_1$. L'onde radio n'ajoute pas d'énergie au système total, donc par conservation de l'énergie, $E_0 = E_{\text{chassés}} + E_{\text{piégés}}$, ce qui se traduit par

$$3N_0 T_0 = (N_0 - N_1) \eta T_0 + 3N_1 T_1$$

39 Remplaçons dans l'expression précédente les instants 0 et 1 par t et $t + dt$,

$$\begin{aligned} 3N(t)T(t) &= [N(t) - N(t + dt)] T(t) \eta + 3N(t + dt)T(t + dt) \\ &= -\frac{\eta}{3} dN T(t) + 3[N(t) + dN] [T(t) + dT] \end{aligned}$$

En ne gardant que les termes d'ordre 1, on arrive à

$$0 = dN \left(1 - \frac{\eta}{3} \right) T(t) + N(t) dT$$

ce qui donne l'équation suivante:

$$\left(1 - \frac{\eta}{3} \right) \frac{dN}{N} = -\frac{dT}{T}$$

40 On a vu à la question 37 que les atomes sont piégés dans un potentiel harmonique. Lorsque leur température diminue, leur énergie moyenne (donnée par $3k_B T$) va aussi diminuer. Or, l'énergie d'une particule dans un potentiel harmonique est proportionnelle à l'amplitude de ses oscillations. En conséquence, quand la température diminue, la position moyenne des atomes va se rapprocher du centre du piège. La densité particulaire au centre du piège va donc augmenter.

41 D'après la définition de Λ_T , la densité dans l'espace des phases \mathcal{D}_0 vérifie

$$\mathcal{D}_0 = n_0^* \Lambda_T^3 \propto \frac{n_0^*}{T^{3/2}}$$

et en utilisant la relation $n_0^* = \alpha N T^{-3/2}$,

$$\mathcal{D}_0 \propto N T^{-3}$$

Or, d'après la question 39,

$$\left(1 - \frac{\eta}{3} \right) \frac{dN}{N} = -\frac{dT}{T}$$

En intégrant

$$d(\log T) = d(\log N^{3/(1-\eta/3)})$$

d'où

$$T = C^{1-\eta/3} N^{3/(1-\eta/3)}$$

En conséquence

$$\mathcal{D}_0 \propto N^{1+3(1-\eta/3)} = N^{4-\eta}$$

Pendant l'évaporation, le nombre d'atomes N diminue, et \mathcal{D}_0 va augmenter si et seulement si

$$\eta > 4$$

42 Reprenons la relation de proportionnalité de la question précédente,

$$\frac{\mathcal{D}_0(t)}{\mathcal{D}_P} = \left(\frac{N(t)}{N_P} \right)^{4-\eta}$$

Quand $\eta \rightarrow \infty$, la plus infime évaporation augmente drastiquement la densité, mais pour obtenir cette évaporation, il faut extraire du piège uniquement des atomes dont l'énergie thermique est extrêmement importante. Ces atomes ont une faible probabilité d'apparaître, et en pratique, le temps nécessaire au refroidissement va donc augmenter très rapidement avec η . Il est nécessaire de trouver un compromis entre un temps d'évaporation trop long et une évaporation trop importante.

43 On applique une dernière fois la relation liant n^* et T donnée en début de sujet,

$$\mathcal{D}_0 = n_0^* \Lambda_T^3 = 1,16$$

Même si l'on est encore légèrement en dessous de la valeur critique nécessaire à l'apparition de la condensation de Bose-Einstein (2,612), l'ordre de grandeur de la densité est correct.

44 Lorsque l'on coupe le piège les atomes ne sont plus soumis à aucune force (on néglige, comme dans tout le sujet, le poids). Les atomes vont donc avoir au temps τ une position $\vec{r}(\tau) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \tau$, où \vec{r}_0 et \vec{v}_0 sont respectivement la position et la vitesse initiale. Au bout d'un temps τ suffisamment long, la position initiale deviendra négligeable par rapport à $\vec{v}_0 \tau$ et la distribution des positions sera simplement la distribution des vitesses initiales, multipliées par un facteur τ . L'image obtenue mesure la densité du nuage atomique, soit la distribution des positions au temps τ , elle reflète donc bien la distribution initiale des vitesses.

Dans la première case de la figure 6 du sujet, on observe une distribution de position qui semble gaussienne, d'écart-type (en ordre de grandeur) $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0,5 \text{ mm}$. On en déduit que l'ordre de grandeur de la vitesse des particules est donné par

$\sqrt{\langle r^2 \rangle} / \tau = 2 \text{ cm.s}^{-1}$. La relation entre vitesse et température vue à la question 1 est toujours valide ici, on en déduit :

$$T = \frac{M \langle v^2 \rangle}{k_B} = \frac{M \langle r^2 \rangle}{\tau^2 k_B} = 6 \times 10^{-6} \text{ K}$$

On peut vérifier que la densité dans l'espace des phases obtenue est de l'ordre de 10^{-3} : il n'y a pas apparition de la condensation de Bose-Einstein.

45 L'inégalité d'Heisenberg relie l'écart-type de la position Δx_i ($i = z, r$) à l'écart-type de l'impulsion Δp_i par la relation,

$$\Delta p_i \cdot \Delta x_i \geq \frac{\hbar}{2}$$

Or $p_i = Mv_i$, donc $\Delta v_i \cdot \Delta x_i \geq \hbar/2M$, et le sujet précise que cette inégalité est en fait une égalité :

$$\Delta x_i \cdot \Delta v_i = \frac{\hbar}{2M}$$

L'énergie moyenne d'un atome de masse M piégé dans un potentiel harmonique de pulsation ω_i est donnée par

$$E = \frac{M}{2} \omega_i^2 \langle x^2 \rangle = \frac{M}{2} \omega_i^2 (\Delta x_i)^2$$

Or, l'énergie de l'atome est fixée par la température, donc $\Delta x_i \propto \omega_i^{-1}$.

On peut différencier deux cas :

- Pour des temps de vol courts, la position finale des atomes est dominée par leur position au temps initial, donc doit être proportionnelle à ω_i^{-1} . Comme $\omega_r > \omega_z$, l'étalement sur l'image en absorption va être **plus important suivant z que suivant r** .
- Au contraire pour des temps de vol plus importants, la position finale des atomes va être dominée par leurs vitesses initiales. Comme Δv_i est inversement proportionnel à Δx_i au sein du piège, la largeur de la distribution des positions sur l'image va cette fois être proportionnelle à ω_i . L'étalement sur l'image en absorption sera **plus important suivant r que suivant z** .

L'ellipse observée sur l'image en absorption va donc inverser grand axe et petit axe, c'est **l'inversion de l'ellipticité**.

Avec un nuage dit « thermique », les particules se comportent de manière classique, la relation de Heisenberg redevient une inégalité. L'écart-type de la distribution des vitesses initiales respecte la théorie cinétique des gaz et est donné par la relation :

$$\Delta v_i = \sqrt{\langle v_i^2 \rangle} = \sqrt{\frac{k_B T}{M}}$$

En particulier, ces écarts-types ne dépendent pas de la taille du piège. Il n'y a pas **d'inversion**.