TD 11 : Lois limites - 2 v2

Exercice 1. *Poisson et biais par la taille*

Comment interpréter l'équation de Stein pour la loi de Poisson (Lemme 10) en terme de biais par la taille ?

Exercice 2. *Méthode de Stein-Chen pour la loi de Poisson - estimée.*

On veut ici montrer la borne $\|\Delta f_A\|_\infty \leq \lambda^{-1}(1-e^{-\lambda})$, où on définit $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

1. Réécrire la formule donnée en cours pour f_A sous la forme suivante : pour $k \geq 0$,
$$f_A(k+1) = \lambda^{-(k+1)} k! e^{\lambda} \Big(\mathrm{Po}_\lambda\big(A \cap [\![0,k]\!]\big) \mathrm{Po}_\lambda\big([\![0,k]\!]^\complement\big) - \mathrm{Po}_\lambda\big(A \cap [\![0,k]\!]^\complement\big) \mathrm{Po}_\lambda\big([\![0,k]\!]\big) \Big).$$
2. Montrer en considérant $A^\complement$ que majorer Δf_A suffit.
3. Analyser les variations de $f_{\{j\}}$ et conclure pour un A quelconque.

Exercice 3. *Méthode de Stein-Chen pour la loi de Poisson*

1. Soit W une variable aléatoire entière positive, avec $\mathbb{E}[W] = \lambda$. Soit $Z \sim \mathrm{Po}(\lambda)$. Supposons que W^s a la loi de W biaisée par la taille. Montrer que
$$d_{VT}(W, Z) \leq (1 \wedge \lambda)\, \mathbb{E}[|W + 1 - W^s|].$$
2. À partir de l'Exercice 5 du TD 10, obtenir gratuitement l'asymptotique du nombre de sommets isolés au seuil.
3. *Généralisation :* Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables de Bernoulli à priori dépendantes, de paramètres $(p_i)_{1\leq i\leq n}$. On pose $W = \sum X_i$ et $\lambda = \mathbb{E}[W] = \sum p_i$. Soit $Z \sim \mathrm{Po}(\lambda)$. Supposons que l'on dispose sur le même espace de variables $(Y_{ij})_{1\leq i\neq j\leq n}$ telles que $\mathbb{P}((X_j)_{j\neq i} \in \cdot | X_i = 1) = \mathbb{P}((Y_{ij})_{j\neq i} \in \cdot)$. Soit I un indice choisi indépendamment du reste, avec $\mathbb{P}(I = i) = p_i/\lambda$. Montrer que $W^s := 1 + \sum_{j\neq I} Y_{Ij}$ a la loi de W biaisée par la taille.
4. Déduire que
$$d_{VT}(W, Z) \leq (1 \wedge \lambda^{-1}) \sum_{i=1}^{n} p_i \left(p_i + \sum_{j\neq i} \mathbb{E}[|X_j - Y_{ij}|] \right)$$
5. On suppose qu'on a un graphe de dépendance défini sur $[n]$ tel que quand il n'y a pas d'arêtes entre i et j, alors X_i et X_j sont indépendants. Dans ce cas montrer que si les Y_{ij} sont bien choisis,
$$d_{VT}(W, Z) \leq (1 \wedge \lambda^{-1}) \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{j\sim i} (p_i p_j + \mathbb{E}[X_i X_j])\,.$$

6. Appliquer au nombre d'apparitions d'un mot donné de longueur k dans une suite $26^k + k - 1$ lettres iid uniformes.