

---

## Corrigé TD 1 : Introduction, premier et second moment

---

### 1 Exercice 1

1. Être un arbre : non monotone
2. Être une forêt : décroissante
3. Contenir une copie du carré  $C_4$  : croissante
4. Avoir une composante connexe de taille  $\leq C$  pour  $C > 0$  : décroissante
5. Avoir un chemin induit de longueur 5 : non monotone
6. Contenir un graphe stable induit de taille 10 : décroissante
7. Être eulérien : non monotone

### 2 Exercice 2

- 1.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X]^2 &= \mathbb{E}[X \mathbf{1}(X > 0)] \leq \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[\mathbf{1}(X > 0)^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] \mathbb{P}(X > 0).\end{aligned}$$

Où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On déduit facilement l'inégalité demandée :  $\mathbb{P}(X = 0) \leq 1 - \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}$ .

2. Bienaymé-Tchébychev donne  $\mathbb{P}(X = 0) \leq \frac{\text{Var } X}{\mathbb{E}[X]^2} = \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2} - 1$ , ce qui est une borne plus faible. En pratique on montre que  $\mathbb{E}[X^2] \sim \mathbb{E}[X]^2$ , ce qui implique que les deux bornes en question tendent vers 0 et donc que  $X \neq 0$  avec grande probabilité.
3. Par Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} - 1\right| \geq \epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} - \left(\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]}\right)^2\right| \geq \epsilon\right) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \text{Var}\left(\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]}\right) = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2} - 1\right),\end{aligned}$$

qui tend vers 0.

### 3 Exercice 3

Soit  $Z$  le nombre de triangles. On a  $\mathbb{E}[Z] = \binom{n}{3}p^3$  donc si  $p = o(1/n)$ ,  $\mathbb{E}[Z] \rightarrow 0$  et donc  $\mathbb{P}(Z > 0) \rightarrow 0$  par l'inégalité de Markov.

Pour  $np \rightarrow \infty$ , on doit alors considérer le second moment. On considère les paires de triangles, que l'on regroupe par le cardinal de leur intersection (3 pour le premier terme, 2 pour le second, 1 ou 0 pour le troisième).

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z^2] &= \sum_{T_1, T_2} \mathbb{P}(T_1 \in G, T_2 \in G) \\ &= \mathbb{E}[Z] + \binom{n}{4} \binom{4}{2} 2p^5 + \left( \binom{n}{3}^2 - \binom{n}{3} - \binom{n}{4} \binom{4}{2} 2 \right) p^6.\end{aligned}$$

Le premier terme est un  $O(n^3p^3)$ , le suivant un  $O(n^4p^5)$  et le troisième est  $\leq \mathbb{E}[Z]^2$ . On obtient donc

$$\mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 \leq O(n^3p^3) + O(n^4p^5).$$

Mais comme  $\mathbb{E}[Z]^{-2} = O((np)^{-6})$ ,

$$\frac{\mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2}{\mathbb{E}[Z]^2} \leq O((np)^{-3}) + O(n^{-1}(np)^{-1}) = o(1).$$

On a donc  $\mathbb{E}[Z^2] \sim \mathbb{E}[Z]^2$ , ce qui permet d'appliquer la méthode du second moment pour montrer que  $Z > 0$  avec grande proba.

### 4 Exercice 4

1.  $\text{diam}(G_{n,p}) > 2$  si et seulement si il existe  $x \neq y \in [n]$  tels que  $x \not\sim y$  et pour tout  $z \in [n]$ ,  $z \not\sim x$  ou  $z \not\sim y$ .
2. Soit  $Z$  le nombre de tels paires de sommets (mauvaises paires).

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{n(n-1)}{2}(1-p)(1-p^2)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}(1-p) \exp(-(n-2)(p^2 + o(p^2))).$$

On déduit que si  $p \geq (1+\epsilon)\sqrt{2\frac{\log n}{n}}$ ,  $\mathbb{E}[Z] \rightarrow 0$ , donc  $Z = 0$  avec grande probabilité.

Réciproquement, si  $p \leq (1-\epsilon)\sqrt{2\frac{\log n}{n}}$ ,  $\mathbb{E}[Z] \rightarrow \infty$ , et on doit regarder le second moment.

La somme ci-dessous sera découpée selon la taille de l'intersection  $\{x_1, y_1\} \cap \{x_2, y_2\}$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z^2] &= \sum_{x_1 < y_1, x_2 < y_2} \mathbb{P}((x_1, y_1) \text{ et } (x_2, y_2) \text{ mauvaises paires}) \\ &= \mathbb{E}[Z] + \binom{n}{3} \binom{3}{2} (1-p)^2 (1-p^3 - 2p^2)^{n-3} + \mathbb{E}[Z]^2 \left( 1 - \frac{\binom{2}{n} + \binom{n}{3} \binom{2}{3}}{\binom{n}{2}^2} \right) \\ &= \mathbb{E}[Z]^2 + o(\mathbb{E}[Z]^2).\end{aligned}$$

La méthode du second moment donne alors que  $Z > 0$  avec grande proba.

## 5 Exercice 5

La loi du degré d'un sommet uniforme (comme celle d'un sommet fixe) dans  $G_{n,p}$  est une binomiale de paramètres  $n - 1$  et  $p$ .

Dans  $G_{n,m}$

$$\mathbb{P}(\deg(x) = k) = \mathbb{P}(\deg(1) = k) = \frac{\binom{k}{n-1} \binom{\binom{n}{2} - n + 1}{m-k}}{\binom{\binom{n}{2}}{m}}.$$

C'est la loi hypergéométrique de paramètres  $(\binom{n}{2}, m, n - 1)$ . La loi hypergéométrique de paramètres  $(N, r, t)$  est la loi du nombre de boules rouges tirées quand on tire sans remise  $t$  boules parmi un ensemble de  $N$  boules dont  $r$  sont rouges.

## 6 Exercice 6

1. Majorer  $n(n-1) \cdots (n-k+1)$  par  $n^k$  et minorer  $k!$  par  $(k/e)^k$  suffit. La première inégalité est triviale, la deuxième vient de  $k^k/k! \leq e^k$ .
2. Il suffit de montrer que

$$\left(1 - \frac{k(k-1)}{2n}\right) \leq \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq e^{-\frac{k(k-1)}{2n}}.$$

La borne supérieure provient de l'application de l'inégalité  $1 + x \leq e^x$  à chaque facteur du produit. Pour la borne inférieure, on prend le logarithme.

$$\begin{aligned} \log \left( \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \right) &= \sum_{i=0}^{k-1} \log \left(1 - \frac{i}{n}\right) \geq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\frac{i}{n}}{\frac{k-1}{n}} \log \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &= \frac{k}{2} \log \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \end{aligned}$$

où pour l'inégalité on a utilisé le fait que le logarithme, fonction concave, est au dessus de sa corde entre 0 et  $\frac{k-1}{n}$ . On conclut avec l'inégalité de Bernoulli  $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ .

On déduit que  $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$  est vrai non seulement pour  $k$  fixé mais aussi pour  $k = o(\sqrt{n})$ . On a en fait montré, sous la même condition, que  $n(n-1) \cdots (n-k) \sim n^k$ .

## 7 Exercice 7

1. Soit  $Z$  le nombre de stables induits de taille  $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \sum_{A \subset [n], |A| = \lceil \frac{n}{2k} \rceil} \mathbb{P}(A \text{ induit un stable}) \\ &= \binom{n}{\lceil \frac{n}{2k} \rceil} (1-p)^{\binom{\lceil \frac{n}{2k} \rceil}{2}} \\ &\leq \left(\frac{ne}{2k}\right)^{\frac{n}{2k}+1} (1-n^{1/g-1})^{n^2} = (2ke)^n e^{-n^2 n^{1/g-1}} = (2ke)^n e^{-n^{1+1/g}} = o(1). \end{aligned}$$

On a utilisé l'Exercice 6.1 puis l'inégalité  $(1+x) \leq e^x$ . Ensuite l'inégalité de Markov donne qu'avec grande probabilité il n'y a pas de tel stable.

2. Soit  $Z$  le nombre de cycles de longueur  $a$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \frac{1}{2a} \sum_{x_1, \dots, x_a \text{ distincts}} \mathbb{P}(x_1 \sim x_2 \sim \dots \sim x_a \sim x_1) \\ &= \frac{1}{2a} n(n-1) \dots (n-a+1) p^a \leq \frac{1}{2a} n^{a+a(1/g-1)} = n^{a/g}. \end{aligned}$$

Donc si  $Y$  est le nombre de cycles de longueur  $< g$ ,

$$\mathbb{E}[Y] \leq n^{3/g} + \dots + n^{(g-1)/g} \leq gn^{(g-1)/g}.$$

On applique l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(Y > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \leq \frac{gn^{(g-1)/g}}{n/4} = O(n^{-1/g}) = o(1).$$

3. Pour construire  $G'$ , on part de  $G$  et on enlève un sommet dans chaque cycle de longueur  $< g$ .  $G'$  est alors le graphe induit sur les sommets restants.  $G'$  ne contient alors plus de cycles de longueur  $< g$ .

Maintenant soit  $X$  un stable induit de  $G'$ . Alors  $X$  était déjà un stable induit de  $G$ . Donc

$$|X| \leq \left\lceil \frac{n}{2k} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\lceil n/2 \rceil}{k} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{|G'|}{k} \right\rceil.$$

4. Si  $G'$  est  $k$ -colorable, on regarde la couleur qui contient le plus de sommets. L'ensemble de ses sommets induit un stable, de taille au moins  $\left\lceil \frac{|G'|}{k} \right\rceil$ . Absurde.

## 8 Exercice 8

1. Soit  $Z$  le nombre de copies de  $K_4$ , le graphe complet à 4 sommets.

$$\mathbb{E}[Z] = \binom{n}{4} p^6 \asymp n^4 p^6.$$

On a donc que pour  $p = o(n^{-2/3})$ ,  $\mathbb{P}(Z \geq 1) \leq \mathbb{E}[Z] = o(1)$ , donc aucune copie de  $K_4$  avec grande proba. On regarde le second moment en supposant  $pn^{2/3} \rightarrow \infty$  :

$$\mathbb{E}[Z^2] = \sum_{A, B \subset [n], |A|=|B|=4} \mathbb{P}(A, B \text{ induisent } K_4).$$

On sépare selon le cardinal de  $A \cup B$  :  $|A \cup B| \in \{4, 5, 6\}$ , ou  $\in \{7, 8\}$  :

$$\mathbb{E}[Z^2] = \binom{n}{4} p^6 + 20 \binom{n}{5} p^9 + 90 \binom{n}{6} p^{11} + \left( \binom{n}{4}^2 - 20 \binom{n}{5} - 90 \binom{n}{6} \right) p^{12}.$$

Le dernier terme est majoré par  $\mathbb{E}[Z]^2$ . On déduit que

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2}{\mathbb{E}[Z]^2} &= O(n^{-4} p^{-6} + n^{-3} p^{-3} + n^{-2} p^{-1}) \\ &= O((pn^{2/3})^{-6} + p^{3/2} (pn^{2/3})^{-9/2} + p^2 (pn^{2/3})^{-3}) = o(1). \end{aligned}$$

Ceci permet d'appliquer la méthode du second moment et de montrer que le seuil est  $n^{-2/3}$ .

2. (a) Le nombre de sommets qui appartient à 2 triangles différents est borné par le nombre de copies du graphes "noeud papillon"  $\bowtie$ , plus deux fois le nombre de copies du graphe "losange"  $\diamond$ . Soit  $Z$  cette quantité.

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{n(n-1) \dots (n-4)}{|\text{Aut}(\bowtie)|} p^{6+2} + 2 \frac{n(n-1) \dots (n-3)}{|\text{Aut}(\diamond)|} p^5 = O(n^5/n^6 + n^4/n^5) = o(1).$$

D'où le résultat par la méthode du premier moment.

- (b) Soit  $Z$  le nombre de chemins induits de taille  $k = \lfloor \sqrt{\log n} \rfloor$ .

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{n(n-1) \dots (n-k)}{2} p^k (1-p)^{\binom{k+1}{2}-k} \sim \frac{n^{k+1}}{2} (c/n)^k \times 1 \asymp nc^k.$$

Où on a utilisé l'Exercice 6 pour l'équivalent de la factorielle tombante. En tout cas on a montré que  $\mathbb{E}[Z] \rightarrow \infty$ . Passons au second moment.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^2] &= \sum_{x_0, \dots, x_k, y_0, \dots, y_k} \mathbb{P}(x_0, \dots, x_k, y_0, \dots, y_k \text{ chemins induits}) \\ &\leq \mathbb{E}[Z]^2 + \sum_{x_0, \dots, x_k, y_0, \dots, y_k, \text{avec des arêtes en commun}} p^{2k - \#\{\text{arêtes en commun}\}}. \end{aligned}$$

On a séparé les termes où les deux chemins sont disjoints, dont la somme est classiquement majoré par  $\mathbb{E}[Z]^2$ . Pour le reste, on a majoré brutalement : on compte maintenant des chemins non induits, et on a majoré le facteur en  $(1-p)$  par 1. Maintenant pour  $j \geq 1$ , on pose  $N_{k,j}$  le nombre de couples de chemins

de taille  $k$  qui ont  $j$  arêtes en commun. On majore très brutalement  $N_{k,j}$  par le nombre d'ensembles de  $2k + 1 - j$  points, décorés par suites de longueur  $k + 1$  (vérifier que c'est légitime!).

$$N_{k,j} \leq n^{2k+1-j} (2k + 1 - j)^{2k+2} \leq n^{2k+1-j} (3k)^{3k},$$

et, en conséquence,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 &\leq \sum_{j=1}^k N_{k,j} p^{2k-j} \leq \sum_{j=1}^k n^{2(k+1-j)} (3k)^{3k} p^{2k-j} \\ &\leq kn(3k)^{3k} c^{2k} = o(n^2) = o(\mathbb{E}[Z]^2). \end{aligned}$$

On peut donc appliquer la méthode du second moment.

(c) Soit  $Z$  le nombre de sommets de degré  $k = \lfloor \sqrt{\log n} \rfloor$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \sum_{x \in [n]} \mathbb{P}(\deg(x) = k) \\ &= n \mathbb{P}(\text{Bi}(n-1, p) = k) \\ &= n \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\ &\sim n \frac{(n-1)^k}{k!} \frac{c^k}{n^k} (1-c/n)^{n-1-k} \\ &\sim \frac{nc^k e^{-c}}{k!} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^2] &= \sum_{x,y \in [n]} \mathbb{P}(\deg(x) = k, \deg(y) = k) \\ &= \mathbb{E}[Z] + n(n-1) \\ &\quad \times \left( p \binom{n-2}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-k} \right)^2 + (1-p) \left( \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k} \right)^2 \\ &= \mathbb{E}[Z] + n^2 p \frac{n^{2k-2}}{k!^2} p^{2k-2} (1-p)^{2n-2-2k} (1+o(1)) \\ &\quad + n^2 (1-p) \frac{n^{2k}}{k!^2} p^{2k} (1-p)^{2n-4-2k} (1+o(1)) \\ &= \mathbb{E}[Z] + p \mathbb{E}[Z]^2 (1+o(1)) + \mathbb{E}[Z]^2 (1+o(1)). \end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont des  $o(\mathbb{E}[Z]^2)$ , le troisième est  $\sim \mathbb{E}[Z]^2$ . On peut donc appliquer la méthode du second moment.