Corrigé TD 3 : Phase sous-critique suite

1 Exercice 1

1.1 Cas $c < 1$

Soit X_k le nombre de composantes arbres de taille k. Dans le cours on a calculé

$$\mathbb{E}[X_k] = \binom{n}{k} k^{k-2} \left(\frac{c}{n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{\binom{2}{k} - k + 1 + (n-k)k}.$$

On fait les majorations suivantes :
- $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} e^{-k(k-1)/2n}$ (démontrée dans le TD1).
- Pour $k \geq k_0$, $k! \geq \frac{1}{10}\sqrt{k} k^k e^{-k}$, conséquence de la formule de Stirling.
- Pour tout ϵ, pour k assez grand $\binom{k}{2} - k + 1 + (n-k)k \geq nk - (1+\epsilon)k(k-1)/2$.

On obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_k] &\leq \frac{10n^k}{\sqrt{k}k^k e^{-k}} \left(\frac{c}{n}\right)^{k-1} \exp\left(-ck + (1+\epsilon)c\frac{k(k-1)}{2n}\right) \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right) \\
&\leq \frac{10n}{ck^{5/2}} \exp\left(k \log c + k - kc\right) \\
&= \frac{10n}{ck^{5/2}} \left[\exp(-\alpha)\right]^k,
\end{aligned}$$

où on est passé de la première à la deuxième ligne en prenant ϵ suffisamment petit pour que $(1+\epsilon)c < 1$. Maintenant on considère $\sum_{k=k_+}^{n} \mathbb{E}[X_k]$. On minore k par k_+ dans le terme polynomial et on le laisse tel quel dans le terme exponentiel.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=k^+}^{n} \mathbb{E}[X_k] &\leq \frac{10n}{ck_+^{5/2}} \sum_{k=k^+}^{n} \left[\exp(-\alpha)\right]^k \leq \frac{10n}{ck_+^{5/2}} \frac{\exp(-\alpha)^{k^+}}{1 - \exp(-\alpha)} \\
&\leq \mathrm{cte} \exp(-\alpha f(n)),
\end{aligned}$$

après développement et compensation des termes. Reste à appliquer l'inégalité de Markov pour montrer que $\mathbb{P}(\sum_{k=k_+}^{n} X_k > 0) = o(1)$.

1.2 Cas $c > 1$

Ici c'est plus difficile et vous n'êtes pas obligés de lire. En premier lieu on a besoin d'une meilleure inégalité sur les coefficients binomiaux.

Lemme 1. *Pour $n \geq k \geq 1$,*

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}\left(1 - \frac{k-1}{2n}\right)^k.$$

Démonstration. On va majorer la quantité $\binom{n}{k}/\frac{n^k}{k!}$ en commençant par son logarithme.

$$\begin{aligned}
\log\left(\binom{n}{k}/\frac{n^k}{k!}\right) &= \log\left(1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) \\
&= \log(1) + \log\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \log\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&= k\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{k}\log\left(1-\frac{i}{n}\right) \\
&\leq k\log\left(1-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{k}\frac{i}{n}\right) = k\log\left(1-\frac{k-1}{2n}\right).
\end{aligned}$$

L'inégalité provient de la concavité de $\log(\cdot)$. Prendre l'exponentielle permet de conclure. $\square$

On minore également $\binom{2}{k} - k + 1 + (n-k)k \geq nk - \frac{k(k-1)}{2} - 2k$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_k] &\leq \frac{10n^k}{\sqrt{k}k^k e^{-k}}\left(\frac{c}{n}\right)^{k-1}\exp\left(-ck + c\frac{k(k-1)}{2n} + \frac{2k}{n}\right)\left(1-\frac{k-1}{2n}\right)^k \\
&\leq \frac{10e^2 n}{ck^{5/2}}\exp\left(k\log c + k - ck + c\frac{k(k-1)}{2n} + k\log\left(1-\frac{k-1}{2n}\right)\right) \\
&= \frac{10e^2 n}{ck^{5/2}}\exp\left(\log\left(c\left(1-\frac{k-1}{2n}\right)\right) + 1 - c\left(1-\frac{k-1}{2n}\right)\right)^k \\
&= \frac{10e^2 n}{ck^{5/2}}\exp\left(-\hat{\alpha}\right)^k,
\end{aligned}$$

où on définit $\hat{c} = c(1-\frac{k-1}{2n})$ et $\hat{\alpha} = \hat{c} - 1 - \log(\hat{c}) > 1$ (Fallait le voir ...)

On veut maintenant estimer $\sum_{k=k_+}^{n}\mathbb{E}[X_k]$. On coupe la somme en deux à $\frac{n}{\log n}$.

Dans la première, on a que c et $\hat{c}$ sont proches, ce qui se traduit par exemple par le fait que pour tout $k \in [k_+, \frac{n}{\log}]$, $\hat{\alpha} > \alpha(1 - 1/\log(n))$. On procède ensuite comme dans le cas précédent.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=k^+}^{\frac{n}{\log n}}\mathbb{E}[X_k] &\leq \frac{10e^2 n}{ck_+^{5/2}}\sum_{k=k^+}^{\frac{n}{\log n}}[\exp(-\hat{\alpha})]^k \leq \frac{10e^2 n}{ck_+^{5/2}}\frac{\exp(-\alpha+\alpha/\log(n))^{k^+}}{1-\exp(-\alpha+\alpha/\log(n))} \\
&\leq \frac{10e^2 n}{ck_+^{5/2}}\frac{\exp(-\alpha)^{k^+}}{1-\exp(-\alpha)}(1+O(1)) \leq \mathrm{cte}\exp(-\alpha f(n)).
\end{aligned}$$

Dans la deuxième somme on majore plus brutalement le terme exponentiel par 1, mais on ne touche pas au terme polynomial.

$$\sum_{k=\frac{n}{\log n}}^{n} \mathbb{E}[X_k] \leq \frac{10e^2 n}{c} \sum_{k=\frac{n}{\log n}}^{n} \frac{1}{k^{5/2}} \leq \text{cte} \times n \times O\left(\left(\frac{n}{\log n}\right)^{-3/2}\right) = o(1).$$

On conclut comme dans l'autre cas.

2 Exercice 2

On veut montrer que la probabilité de l'évènement $E =$

$$\left\{\text{les } l \text{ plus grandes composantes sont des arbres de taille comprise entre } \frac{1-\epsilon}{\alpha}\log(n) \text{ et } \frac{1+\epsilon}{\alpha}\log(n)\right\}$$

tend vers 1. On va montrer que E est impliqué par des évènements qui sont vrais avec grande proba. On sait qu'avec grande probabilité,

— aucune composante n'a plus d'un cycle (Lemme 3)

— les composantes unicycliques sont de taille $\leq \log\log\log\log(n)$ (Lemme 4 + inégalité de Markov)

— les l plus grands arbres sont de taille comprise entre $\frac{1-\epsilon}{\alpha}\log(n)$ et $\frac{1+\epsilon}{\alpha}\log(n)$ (Lemme 6).

On dénomme A, B et C ces évènements. Il est immédiat que $A \cap B \cap C \subset E$. Donc $E^{\complement} \subset A^{\complement} \cup B^{\complement} \cup C^{\complement}$. On conclut en écrivant :

$$\mathbb{P}(E^{\complement}) \leq \mathbb{P}(A^{\complement}) + \mathbb{P}(B^{\complement}) + \mathbb{P}(C^{\complement}) = o(1) + o(1) + o(1) = o(1).$$

3 Exercice 3

1. On procède comme indiqué en comptant d'abord le nombre $t^*_{n,k}$ d'arbres de taille $n \geq 2$ dont le degré à la racine est $k \geq 1$. Un tel arbre se construit en choisissant
   — une partition de $[n]$ en une racine ρ et k ensembles $I_1, \ldots, I_k$,
   — puis un arbre enraciné sur chacun des $I_1, \ldots, I_k$.
   L'arbre se construit alors en reliant ρ à la racine de chacun des k arbres et en faisant de ρ la nouvelle racine.

   On a alors trop compté, du fait qu'on a ordonné notre partition : chaque arbre a été compté autant de fois qu'il est possible d'ordonner les sous-arbres à la racine, c'est-à-dire $k!$ fois. En réunissant tout ça on obtient donc :

   $$t^*_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1 \geq 1, \ldots, i_k \geq 1 \\ i_1 + \ldots + i_k = n-1}} \binom{n}{1, i_1, \ldots, i_k} \prod_{j=1}^{k} t^*_{i_j}.$$

   On conclut en sommant sur k.

2.

$$\begin{aligned}
T^*(x) &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1 \geq 1, \ldots, i_k \geq 1, \\ i_1 + \ldots + i_k = n-1}} \binom{n}{1, i_1, \ldots, i_k} \prod_{j=1}^{k} t^*_{i_j} \\
&= x + x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1 \geq 1, \ldots, i_k \geq 1, \\ i_1 + \ldots + i_k = n-1}} \frac{n!}{i_1! i_2! \cdots i_k!} \prod_{j=1}^{k} t^*_{i_j} \\
&= x + x \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1 \geq 1, \ldots, i_k \geq 1, \\ i_1 + \ldots + i_k = n-1}} \prod_{j=1}^{k} \left(t^*_{i_j} \frac{x^{i_j}}{i_j!} \right) \\
&= x + x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\substack{i_1 \geq 1, \ldots, i_k \geq 1, \\ i_1 + \ldots + i_k = n-1}} \prod_{j=1}^{k} \left(t^*_{i_j} \frac{x^{i_j}}{i_j!} \right) \\
&= x + x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \geq 1, \ldots, i_k \geq 1} \prod_{j=1}^{k} \left(t^*_{i_j} \frac{x^{i_j}}{i_j!} \right) \\
&= x + x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^*_n \frac{x^n}{n!} \right)^k = x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^*(x)^k \right) = x \exp(T^*(x)).
\end{aligned}$$

3. Par Stirling, le terme général de cette série est $\asymp k^{-3/2}$, d'où l'absolue convergence. On en déduit la convergence en norme uniforme sur le disque $D(0, 1/e)$, ce qui implique que $T*$ est une série entière de rayon de convergence $1/e$, continue au bord.
4. Application immédiate.