Corrigé TD 4 : Galton-Watson

1 Exercice 1

1. On procède par induction pour montrer la propriété $S_k = |A^k|, \forall k : 0 \le k \le N-1$. La propriété est trivialement vraie au rang 1, et on voit que A^{k+1} est obtenu de A^k en enlevant un élément et en rajoutant ξ_k autres, d'où l'hérédité.

   Enfin par définition N est le premier temps k où $S_k = |A^k| = 0$.

2. On montre par induction (récurrence forte) la propriété suivante : $\forall i$,
   — A^{τ_i} contient tous les sommets à distance i de x,
   — $|A^{\tau_i}| = Z_i$,
   — et B_{τ_i} contient tous les sommets à distance $< i$ de x.

   Cette propriété est vraie aux rangs $i = 1$ et $i = 2$.

   Pour l'hérédité, considérons l'algorithme à partir de τ_i. La file contient alors tous les sommets à distance i, sommets que l'on va explorer tour à tour, en ajoutant à la file leurs voisins qui ne sont pas dans B_{τ_i}, c'est-à dire exactement les sommets qui sont à distance $i+1$. Après Z_i pas, c'est-à-dire en $\tau_{i+1} = \tau_i + Z_i$, on a exploré tous les sommets à distance i (ils sont maintenant dans B) et on a bien ajouté tous leurs voisins à la file. La nouvelle taille de la file est bien $\sum_{k=\tau_i}^{\tau_{i+1}-1} \xi_k$, d'où le résultat.

3. (a) Par hypothèse la suite $(\xi_k)_k$ est i.i.d. de loi μ et $S_{k+1} - S_k = \xi_k - 1$. Donc on a bien une marche aléatoire débutée en 1, et $\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = y) = \mathbb{P}(\xi_k - 1) = k+1$.

   Par ailleurs, N est bien le temps d'atteinte de 0 par la question 1.

   (b)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[Z_{i+1} = a | \tau_1, \dots, \tau_i, Z_1, \dots, Z_i] &= \mathbb{P}(\sum_{k=\tau_i}^{\tau_{i+1}-1} \xi_k = a | \tau_1, \dots, \tau_i, Z_1, \dots, Z_i) \\
&= \mathbb{P}(\sum_{k=\tau_i}^{\tau_i+Z_i-1} \xi_k = a | \tau_1, \dots, \tau_i, Z_1, \dots, Z_i) \\
&= \mu^{\star Z_i}(a).
\end{aligned}
$$

   On reprend ensuite l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[\cdot | Z_1, \dots, Z_i]$, ce qui donne le résultat.

   (c) $\{|T| < \infty\} = \{N < \infty\}$ est par définition de N, $\{|T| < \infty\} = \{\exists i, Z_i = 0\}$ par la question 2.

4. Soit $\rho_i = \mathbb{P}(Z_i = 0)$. Alors $\rho_0 = \mathbb{P}(\xi_0 = 0) = \varphi(0)$.
On calcule alors $\mathbb{P}(Z_{i+1} = 0)$ par récurrence :

$$\rho_{i+1} = \mathbb{P}(Z_{i+1} = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_{i+1} = 0 | Z_1 = k)\mu(k)$$

. On utilise le fait que $\mathbb{P}(Z_{i+1} = 0|Z_1 = k) = \mathbb{P}(Z_i = 0)^k$. Cette égalité provient du fait que si la première génération a k éléments, l'extinction est équivalente à l'extinction de la descendance de tout le monde. Or ces différentes descendances sont indépendantes. Plus rigoureusement on pourrait montrer qu'un processus de branchement démarré en k a la même loi (en tant que processus de Markov) que la somme de k processus de branchements démarrés en 1. On obtient

$$\rho_{i+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_i^k \mu(k) = \varphi(\rho_i).$$

Comme on a $\rho = \lim \uparrow \rho_i$ par probabilité d'une union infinie, on déduit que ρ est le point fixe de φ dans le bassin d'attraction de 0, donc le plus petit. Dessin :

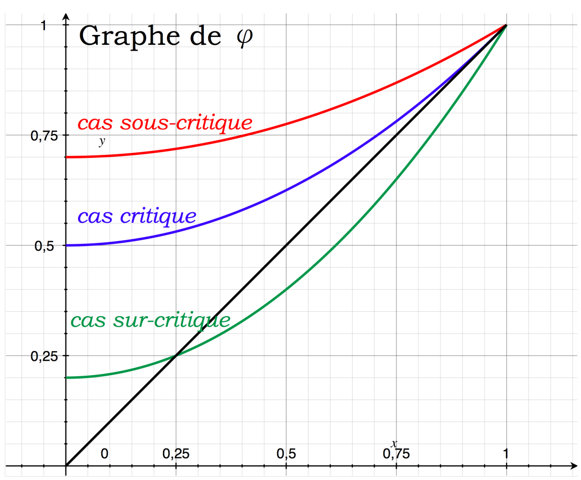

Figure 1 – dessin piqué sur https ://commons.wikimedia.org/wiki/File :GWpointfixe.png

2 Exercice 2

1. On peut montrer par induction (et on a probablement déjà utilisé) que $|B_k| = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i$. Ainsi, comme $\xi_k = \#\{y \in [n] \setminus B_k, y \sim x\}$, et que les arêtes que l'on considère sont indépendantes des arêtes considérées jusqu'à maintenant, donc conditionnellement à $\xi_0, \dots, \xi_{k-1}$,

$$\xi_k \sim \mathrm{Bi}(n - 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i, p).$$

2. On peut construire des variables ξ'_i i.i.d. de loi $\mathrm{Bi}(n,p)$ telles que $\xi'_i > \xi_i$ p.s. (par exemple, on complète en rajoutant des binomiales de bon paramètre, puis on vérifie que la somme a bien la loi d'une suite i.i.d.) et considérer l'arbre T' associé, qui a la loi demandée. Comme la marche associée S' domine S p.s., elle ne peut toucher 0 qu'après, donc on a automatiquement $N' \geq |\mathcal{C}(x)|$ p.s.
3. ξ'_1 s'écrit comme une somme de n variables i.i.d. $B_1, \ldots, B_n$ de loi $\mathrm{Be}(p)$, d'où $\varphi(s) = \mathbb{E}[s^{B_1+\ldots+B_n}] = \mathbb{E}[s^{B_1}]^n = (ps + (1-p))^n = (\frac{c}{n}s + (1-\frac{c}{n}))^n = (1 + \frac{c(s-1)}{n})^n$. On déduit que $\varphi(s)/s \leq e^{c(s-1)}/s = e^{c(s-1)-\log(s)}$.
4. On dérive $c(s-1) - \log(s)$ par rapport à s pour optimiser la borne, on trouve $s = 1/c > 1$, pour lequel on a alors $\varphi(s)/s \leq e^{1-c+\log(c)} = e^{-\alpha} < 1$.
5. On a bien $D_0 = 1$, et
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[D_{k+1}|D_1, \ldots, D_k] &= \mathbb{E}[s^{S'_k+\xi'_{k+1}-1+k+1}\varphi(s)^{-(k+1)}|D_1, \ldots, D_k] \\ &= D_k\, \mathbb{E}[s^{\xi'_{k+1}}]/\varphi(s) = D_k.\end{aligned}$$
6. Pour tout k, $N' \wedge k$ est un temps d'arrêt borné, le théorème d'arrêt s'applique donc sans problème, et on obtient
$$1 = \mathbb{E}[D_{k\wedge N'}] = \mathbb{E}[s^{S'_{k\wedge N'}}(\varphi(s)/s)^{-k\wedge N'}].$$
Comme $s > 1$ et $k \wedge N'$ est avant le premier temps d'atteinte de 0, $s^{k\wedge N'} > 1$ p.s, et on obtient $1 \geq \mathbb{E}[(\varphi(s)/s)^{-k\wedge N'}] \geq \mathbb{E}[e^{\alpha(N'\wedge k)}]$ par la question 4. Maintenant, comme p.s. $N' \wedge k$ croit vers N' quand $k \to \infty$, le théorème de convergence monotone donne $\mathbb{E}[e^{\alpha N'}] \leq 1$. On a donc un moment exponentiel.
7. $$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max_{x=0}^{n} \mathcal{C}(x) \geq \frac{1+\epsilon}{\alpha}\log n) &\leq n\,\mathbb{P}(C(1) \geq \frac{1+\epsilon}{\alpha}\log n) \\ &\leq \mathbb{P}(N' \geq \frac{1+\epsilon}{\alpha}\log n) \\ &= \mathbb{P}(e^{\alpha N'} \geq n^{1+\epsilon}) \\ &\leq n \times \frac{1}{n^{1+\epsilon}} = o(1).\end{aligned}$$
Où on utilise successivement : la proba d'une union, le fait que N' domine stochastiquement $\mathcal{C}(1)$ (question 2), la croissance de $e^{\alpha\cdot}$ et l'inégalité de Markov avec le résultat de la question 6.

3 Exercice 3

1. Cette propriété est vraie pour $x = 1$ par définition de ρ. Maintenant on veut raisonner par récurrence. Soit T_1 le temps d'atteinte de 1.
$$\mathbb{P}_x(N < \infty) = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}(N < \infty)] = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}(N < \infty) \circ \theta_{T_1}\, \mathbb{1}(T_1 < \infty)].$$

La dernière égalité est même une égalité d'évènement : Comme la marche ne descend que par des pas -1,

$$\{\text{toucher } 0\} = \{\text{toucher } 1 \text{ puis toucher } 0\}.$$

On applique ensuite Markov fort, qui donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(N < \infty) &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_{T_1}}[\mathbb{1}(N < \infty)]\,\mathbb{1}(T_1 < \infty)] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_1[\mathbb{1}(N < \infty)]\,\mathbb{1}(T_1 < \infty)] \\ &= \rho\,\mathbb{E}_x[\mathbb{1}(T_1 < \infty)] = \rho\,\mathbb{E}_{x-1}[\mathbb{1}(N < \infty)]\end{aligned}$$

où la dernière égalité est due au fait que sous $\mathbb{P}_x$, la marche aléatoire $(S_k - 1)_k$ suit la loi $\mathbb{P}_{x-1}$, et son temps d'atteinte de 0 est T_1. On conclut par récurrence.

2.

$$\begin{aligned}&\overline{\mathbb{P}}_{x_0}(S_{i+1} - S_i = k | S_0 = x_0, \ldots, S_i = x_i) \\ &= \frac{\overline{\mathbb{P}}_{x_0}(S_{i+1} - S_i = k, S_0 = x_0, \ldots, S_i = x_i)}{\overline{\mathbb{P}}_{x_0}(S_0 = x_0, \ldots, S_i = x_i)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_{x_0}(S_{i+1} - S_i = k, N < \infty, S_0 = x_0, \ldots, S_i = x_i)}{\mathbb{P}_{x_0}(N < \infty, S_0 = x_0, \ldots, S_i = x_i)}.\end{aligned}$$

On a une disjonction de cas : si $x_i = 0$, alors l'évènement $S_i = x_i = 0$ implique que $N < \infty$ et $S_{i+1} = 0$. La grosse fraction vaut 1 si et seulement si $k = 0$.
Si $x_i \neq 0$, alors aucun des $x_0, \ldots x_i$ n'est nul sinon on conditionne par un évènement vide (la marche S est une marche arrêtée en 0). Donc la condition $N < \infty$ ne dépend que de ce qui se passe après le temps i en bas, et $i + 1$ en haut.

$$\begin{aligned}\cdots &= \frac{\mathbb{E}_{x_0}[\mathbb{1}(S_{i+1} - S_i = k, S_0 = x_0, \ldots, S_i = x_i)\,\mathbb{1}(N < \infty) \circ \theta_{i+1}]}{\mathbb{E}_{x_0}[\mathbb{1}(S_0 = x_0, \ldots, S_i = x_i)\,\mathbb{1}(N < \infty) \circ \theta_i]} \\ &= \frac{\mathbb{E}_{x_0}[\mathbb{1}(S_{i+1} - S_i = k, S_0 = x_0, \ldots, S_i = x_i)\,\mathbb{E}_{S_{i+1}}[\mathbb{1}(N < \infty)]]}{\mathbb{E}_{x_0}[\mathbb{1}(S_0 = x_0, \ldots, S_i = x_i)\,\mathbb{E}_{S_i}[\mathbb{1}(N < \infty)]]} \\ &= \frac{\mathbb{E}_{x_0}[\mathbb{1}(S_{i+1} - S_i = k, S_0 = x_0, \ldots, S_i = x_i)]\,\mathbb{E}_{x_0+k}[\mathbb{1}(N < \infty)]}{\mathbb{E}_{x_0}[\mathbb{1}(S_0 = x_0, \ldots, S_i = x_i)\,\mathbb{E}_{x_0}[\mathbb{1}(N < \infty)]} \\ &= \frac{\mathbb{P}_{x_0}(S_0 = x_0, \ldots, S_i = x_i)\mu(k+1)\rho^{x_0+k}}{\mathbb{P}_{x_0}(S_0 = x_0, \ldots, S_i = x_i)\rho^{x_0}} = \mu(k+1)\rho^k,\end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété de Markov simple en haut et en bas. On déduit que sous $\overline{\mathbb{P}}$, S est une chaîne de Markov de noyau de transition

$$p(x, y) = \begin{cases} \delta_y(0) & \text{si } x = 0 \\ \mu((y - x) + 1)\rho^{y-x} & \text{sinon.} \end{cases}.$$

C'est à dire une marche aléatoire arrêtée en 0, de loi $\overline{\mu}(1 + \cdot)$ où $\overline{\mu}(k) = \mu(k)\rho^{k-1}$. Ceci nous dit que sous $\overline{\mathbb{P}}$, T est un arbre de Galton-Watson de loi $\overline{\mu}$.

3. On a $\overline{\varphi}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(k)\rho^{k-1}s^k = \varphi(\rho s)/\rho$. Donc le graphe de $\overline{\varphi}$ est la restriction du graphe de φ à gauche et en dessous du premier point fixe. On est en régime sous-critique.